المتميز

فى

الرياضيات البحتة

الجبر

الجزء النظرى

و

حلول تمارين

الوحدة الأولى

(الجزء الأول)

ω | $م_{ل}$ | $هـ^{\pi ت}$ | $\tilde{س}_{ر}$

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الأولى .... التباديل و التوافيق و نظرية ذات الحدين

١ – ١ مبدأ العد _ التباديل _ التوافيق

أولاً : مبدأ العد :

نعلم أن :

مبدأ العد الأساسى :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى $م_1$ طريقة و كان عدد طرق إجراء عمل ثان يساوى $م_2$ طريقة و كان عدد طرق إجراء عمل ثالث يساوى $م_3$ طريقة ، .... ، و هكذا

فإن عدد إجراء هذه الأعمال معاً = $م_1 \times م_2 \times م_3 \times .... \times م_ن$

مبدأ العد المشروط :

إذا أضيف شرط أو أكثر إجراء إحدى الأعمال سمى مبدأ العد بمبدأ العد المشروط

و فى هذه الحالة نبدأ بالشروط

مبدأ العد (قاعدة الضرب) :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة ، و عدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة

فإن : عدد طرق إجراء الأول و الثانى = (ن × م) طريقة

مبدأ العد (قاعدة الجمع) :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوى ن طريقة ، و عدد طرق إجراء عمل آخر يساوى م طريقة

فإن : عدد طرق إجراء الأول أو الثانى = (ن + م) طريقة

ملاحظات :

(١) للربط بين عدد طرق الأعمال : $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، .... ، $م_ن$ باستخدام حرف العطف (و) يكون عدد الطرق الممكنة لهذه الأعمال هو **حاصل ضربها**

(٢) للربط بين عدد طرق الأعمال : $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، .... ، $م_ن$ باستخدام حرف العطف (أو) يكون عدد الطرق الممكنة لهذه الأعمال هو **ناتج جمعها**

ثانياً : مضروب العدد :

مضروب العدد الصحيح الموجب ن (يرمز له بالرمز $\lfloor ن$) يساوى حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من أو تساوى ن

أى أن : $\lfloor ن$ = ن (ن – ١) (ن – ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١

و بالتالى يكون :

$\lfloor ن$ = حاصل ضرب عوامل عددها ن تبدأ بالعدد ن و كل منها ينقص عن سابقه بمقدار " ١ " و ينتهى دائماً بالعدد " ١ "

ملاحظات :

(١) $\lfloor ن \in ص_+$

(٢) أصغر عوامل $\lfloor ن$ يساوى " ١ " و أكبرهم يساوى " ن "

(٣) عندما : ن = ٠ فإن : $\lfloor ٠$ = ١

(٤) عندما : ن = ١ فإن : $\lfloor ١$ = ١

(٥) عندما : $\lfloor أ$ = ١ فإن : أ = ١ أو أ = ٠

(٦) $\underline{|ن} = ن \; \underline{|ن - ١}$ حيث : $ن \in ص^{+}$

$= ن (ن - ١) \; \underline{|ن - ٢} = ...$ و هكذا

(٧) مضروب أى عدد يقبل القسمة على مضروب أى عدد أصغر منه

لأن : من (٦) ينتج : $\dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ١}} = ن$ ..... و هكذا

، $\dfrac{\underline{|ن}}{ن} = \underline{|ن - ١}$

(٦) ناتج مضروب بعض الأعداد :

مضروب العدد	٠	١	٢	٣	٤	٥
الناتج	١	١	٢	٦	٢٤	١٢٠
مضروب العدد	٦	٧	٨	٩	١٠	
الناتج	٧٢٠	٥٠٤٠	٤٠٣٢٠	٣٦٢٨٨٠	٣٦٢٨٨٠٠	

(٧) يستخدم مضروب العدد كما يلى :

١) إذا علم ن :

نوجد الناتج بضرب ن فى الأعداد السابقة له حتى العدد ١

٢) إذا علم الناتج نقسمه بالتوالى على : ١ ثم ٢ ثم ٣ ....

ثم على م حتى نحصل على العدد ١ فيكون : ن = م

ثالثاً : التباديل :

هى كل ترتيب يمكن تكوينه من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها و يرمز لعدد تباديل ن من العناصر المتمايزة مأخوذة ر فى كل مرة بالرمز $^{ن}ل_{ر}$ و يقرأ : " ن لام ر " حيث :

$^{ن}ل_{ر} = ن (ن - ١) (ن - ٢) \times .... \times (ن - ر + ١)$

حيث : $ن \geq ر$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

ملاحظات :

(١) $^{ن}ل_{ر}$ يعنى عدد طرق إختيار ر عنصر من بين ن عنصر مع الترتيب

(٢) $^{ن}ل_{ر}$ = حاصل ضرب عوامل عددها ر تبدأ بالعدد ن و كل عامل ينقص عن سابقه بمقدار " ١ " ، و العامل الأخير يزيد عن الفرق بين ن ، ر بمقدار " ١ "

(٣) التباديل لا تسمح بتكرار العناصر (يهتم فيها بالترتيب)

(٤) $^{ن}ل_{ر} \in ص^{+}$ (٥) $^{ن}ل_{٠} = ١$

(٦) $^{ن}ل_{١} = ن$ (٧) $\underline{|ن} = {}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن - ١}$

(٨) $^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ل_{ك}$ إذا و فقط إذا كان : ر = ك

(٩) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ك$ فإن :

١) إذا علم ر : نحلل ك إلى عوامل ثم نكتب هذه العوامل كحاصل ضرب أعداد متتالية عددها ر ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ن

٢) إذا علم ن : نقسم ك على ن ثم على العدد السابق له مباشرة فالسابق له مباشرة و هكذا حتى نحصل على الواحد الصحيح ثم نكتب تبديلتين متساويتين و منها نحصل على قيمة ر

(١٠) $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$ حيث : $ن \geq ر$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

تستخدم إذا تساوت تبديلتين و علم ن أو ر بإختصار المضروبات

رابعاً : التوافيق :

هى كل مجموعة يمكن الحصول عليها من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب

و يرمز لعدد التوافيق المكونة كل منها من $ر$ من الأشياء و المختارة من بين $ن$ من العناصر فى نفس الوقت بالرمز ${}^{ن}ق_{ر}$

" و يقرأ : $ن$ قاف $ر$ " كما يرمز له أيضاً بالرمز $\binom{ن}{ر}$

" و يقرأ : $ن$ فوق $ر$ "

حيث : $ن \geq ر$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

ملاحظات :

(١) ${}^{ن}ق_{ر}$ هو عدد التوافيق المكونة كل منها من $ر$ من الأشياء المختارة معاً من بين $ن$ من العناصر فى نفس الوقت بصرف النظر عن الترتيب

(٢) التوافيق لا يهتم فيها بالترتيب

(٣) ${}^{ن}ق_{ر} = \dfrac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$ لكل : $ن \geq ر$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

(٤) ${}^{ن}ق_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ر}\ \underline{|ن - ر}}$

لكل : $ن \geq ر$ ، $ر \in ط$ ، $ن \in ص^{+}$

(٥) ${}^{ن}ق_{ر} \geq ١$ **(٦)** ${}^{ن}ق_{ر} \leq {}^{ن}ل_{ر}$

(٧) ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$ **(٨)** ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

(٩) إذا كان : ${}^{ن}ق_{س} = {}^{ن}ق_{ص}$ فإن :

$س = ص$ أو $س + ص = ن$

عدد طرق اختيار عينة مع الإحلال و بدون إحلال :

عند اختيار $ر$ من الأشياء من بين $ن$ من الأشياء يراعى أن :

(أ) إذا كان : الاختيار مع الإحلال (التكرار) و الترتيب فإن :

عدد الطرق الاختيار $= ن^{ر}$

مثال توضيحى :

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

الحل

لاحظ : الترتيب مهم فالعدد : ١٢ مثلاً يختلف عن العدد : ٢١

، التكرار مسموح به " مع الاحلال "

الجدول التالى يوضح عدد طرق تكوين الأعداد :

رقم الآحاد	١				٢				٣				٤			
رقم العشرات	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤	١	٢	٣	٤
العدد	١١	١٢	١٣	١٤	٢١	٢٢	٣٢	٤٢	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٤١	٤٢	١٣	٤٤

، $\because$ عدد العناصر $= ٤$ " $ن = ٤$ "

، العدد مكون من رقمين : أى : عدد الخانات $= ٢$ " $ر = ٢$ "

$\therefore$ عدد طرق اختيار الرقم بخانة الآحاد $= ٤$

، عدد طرق اختيار الرقم بخانة العشرات $= ٤$

$\therefore$ عدد طرق اختيار العدد $= ٤ \times ٤ = (٤)^{٢} = ١٦$

أى أن : إذا كان : الاختيار مع الإحلال (التكرار) و الترتيب

فإن : عدد الطرق الاختيار $= ن^{ر}$

(ب) إذا كان : الاختيار بدون إحلال (بدون تكرار) مع مراعاة الترتيب

فإن : عدد الطرق الاختيار $= {}^{ن}ل_{ر}$

مثال توضيحى :

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

الحل

لاحظ : الترتيب مهم فالعدد : ١٢ مثلاً يختلف عن العدد : ٢١

، التكرار غير مسموح به " بدون احلال "

الجدول التالى يوضح عدد طرق تكوين الأعداد :

رقم الآحاد	١			٢			٣			٤		
رقم العشرات	٢	٣	٤	١	٣	٤	١	٢	٤	١	٢	٣
العدد	١٢	١٣	١٤	٢١	٣٢	٤٢	٣١	٣٢	٣٤	٤١	٤٢	٤٣

∵ عدد العناصر = ٤ " ن = ٤ "

، العدد مكون من رقمين : أى : عدد الخانات = ٢ " ر = ٢ "

∴ عدد طرق اختيار الرقم بخانة الآحاد = ٤

، عدد طرق اختيار الرقم بخانة العشرات = ٣

∴ عدد طرق اختيار العدد = ٤ × ٣ = $^{٤}ل_{٢}$ = ١٢

أى أن : إذا كان : الاختيار بدون إحلال (بدون تكرار) مع مراعاة الترتيب

فإن : عدد الطرق الاختيار = $^{ن}ل_{ر}$

(٣) إذا كان : الاختيار بدون إحلال (بدون تكرار) دون مراعاة الترتيب

فإن : عدد الطرق الاختيار = $^{ن}ق_{ر}$

مثال توضيحى :

بكم طريقة يمكن اختيار رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

الحل

لاحظ : الترتيب غير مهم فالرقمين : ١ ، ٢ مثلاً هما نفس الرقمين : ٢ ، ١

، التكرار غير مسموح به " بدون احلال "

الجدول التالى يوضح عدد طرق اختيار الأرقام :

الرقم الأول	١			٢		٣
الرقم الثانى	٢	٣	٤	٣	٤	٤
الرقمين	١ ، ٢	١ ، ٣	١ ، ٤	٢ ، ٣	٢ ، ٤	٣ ، ٤

∵ عدد العناصر = ٤ " ن = ٤ " ، المراد اختيار رقمين : " ر = ٢ "

∴ عدد طرق اختيار الرقمين = ٦ = $\frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١}$ = $^{٤}ق_{٢}$

أى أن : إذا كان : الاختيار بدون إحلال (بدون تكرار) دون مراعاة الترتيب

فإن : عدد الطرق الاختيار = $^{ن}ق_{ر}$

(٤) إذا كان : الاختيار مع الإحلال (التكرار) و بدون ترتيب فإن :

عدد الطرق الاختيار = $^{ن + ر - ١}ق_{ر}$

مثال توضيحى :

بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

الحل

لاحظ : الترتيب غير مهم فالرقمين : ١ ، ٢ مثلاً هما نفس الرقمين : ٢ ، ١

، التكرار مسموح به " مع الاحلال "

الجدول التالى يوضح عدد طرق اختيار الأرقام :

الرقم الأول	١				٢			٣		٤
الرقم الثانى	١	٢	٣	٤	٢	٣	٤	٣	٤	٤
الرقمين	١ ، ١	١ ، ٢	١ ، ٣	١ ، ٤	٢ ، ٢	٢ ، ٣	٢ ، ٤	٣ ، ٣	٣ ، ٤	٤ ، ٤

∵ عدد العناصر = ٤ " ن = ٤ " ، المراد اختيار رقمين : " ر = ٢ "

∴ عدد طرق اختيار الرقمين = ١٠ = $\frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١}$ = $^{٥}\text{ق}_{٢}$ = $^{٤ + ٢ - ١}\text{ق}_{٢}$

أى أن : إذا كان : الاختيار مع الإحلال (التكرار) و بدون ترتيب

فإن : عدد الطرق الاختيار = $^{\text{ن} + \text{ر} - ١}\text{ق}_{\text{ر}}$

و يمكن تلخيص ذلك بالجدول التالى :

و	مع مراعاة الترتيب	دون مراعاة الترتيب
الاختيار مع الإحلال (مع التكرار)	$\text{ن}^{\text{ر}}$	$^{\text{ن} + \text{ر} - ١}\text{ق}_{\text{ر}}$
الاختيار بدون إحلال (بدون تكرار)	$^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ر}}$	$^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

ملاحظات :

(أ) لحل المسائل اللفظية المتعلقة بمبدأ العد نستخدم :

١) **التباديل** : إذا كان الترتيب مهم و تضمنت المسألة إحدى العبارات التالية :

تكوين أعداد أو سحب كرة (مثلاً) بترتيب مع الاحلال أو سحب على التوالى (واحدة تلو الأخرى)

و عند السحب بترتيب مع الاحلال نستخدم الأسس

أو ترشيح لمناصب محددة (رئيس ، نائب ، سكرتير ، .....)

أو توزيع أشخاص على مقاعد

٢) **التوافيق** : إذا كان الترتيب غير مهم و تضمنت المسألة إحدى العبارات التالية :

اختيار أرقام أو سحب بدون ترتيب مع الاحلال و بدون احلال

أو تشكيل لجنة أو وفد أو فريق أو ....

أو توزيع جوائز أو كتب أو هدايا أو .... ، أو حل أسئلة اختبار

(٢) إذا كان : عدد أضلاع المضلع المحدب = ن

فإن : عدد القطع المستقيمة الممثلة فيه (أضلاع + أقطار)

= $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}$

، ∵ قطر المضلع هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متتاليين

∴ عدد أقطار المضلع = عدد جميع القطع المستقيمة − عدد أضلاعه

= $^{\text{ن}}\text{ق}_{٢} - \text{ن}$

(٣) عدد المثلثات الناتجة من توصيل ر رأس من رؤوس مضلع عدد أضلاعه ن ضلعاً = $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

قانون النسبة بين توفيقتين متتاليتين :

$$\frac{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}$$

البرهان :

الطرف الأيمن = $\frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \div \frac{\text{ن}!}{(\text{ر}-١)!\,(\text{ن}-\text{ر}+١)!}$

= $\frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{(\text{ر}-١)!\,(\text{ن}-\text{ر}+١)!}{\text{ن}!}$

= $\frac{١}{\text{ر}\,(\text{ر}-١)!\,(\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{(\text{ر}-١)!\,(\text{ن}-\text{ر}+١)\,(\text{ن}-\text{ر})!}{١}$

= $\frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}$ = الطرف الأيسر

قانون جمع توفيقتين متتاليتين :

$${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-١} = {}^{ن+١}ق_{ر}$$

البرهان :

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} + \frac{ن!}{(ر-١)!\,(ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{(ن-ر+١)\,ن! + ر\,ن!}{ر!\,(ن-ر+١)!} = \frac{ن!\,(ن-ر+١+ر)}{ر!\,(ن-ر+١)!}$$

$$= \frac{(ن+١)\,ن!}{ر!\,(ن-ر+١)!} = \frac{(ن+١)!}{ر!\,((ن+١)-ر)!}$$

$$= {}^{ن+١}ق_{ر} = \text{الطرف الأيسر}$$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٥

اختير ٣ أشخاص معاً من مجموعة مكونة ٥ من رجال ، ٤ نساء أوجد كم طريقة يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة فى كل من الحالات الآتية :

(أ) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس ؟

(ب) إذا كان الأشخاص الثلاثة منهم اثنان فقط من نفس الجنس ؟

الحل

(أ) عدد الطرق $= {}^{٥}ق_{٣} + {}^{٤}ق_{٣} = ١٠ + ٤ = ١٤$

(ب) يمكن اختيار رجلين و أمرأة واحدة أو رجل واحد و أمرأتين

∴ عدد الطرق $= {}^{٥}ق_{٢} \times {}^{٤}ق_{١} + {}^{٥}ق_{١} \times {}^{٤}ق_{٢}$

$= ١٠ \times ٤ + ٥ \times ٦ = ٤٠ + ٣٠ = ٧٠$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥

يدرس الطالب فى السنة الأولى بإحدى الكليات الجامعية ٨ مواد دراسية و لا يحق له الانتقال إلى السنة الدراسية إلا إذا نجح فى ٦ منها فكم طريقة يمكن بها للطالب أن ينتقل للسنة الثانية ؟

الحل

على الطالب أن ينجح فى ٨ مواد أو ٧ مواد أو ٦ مواد

عدد الطرق $= {}^{٨}ق_{٨} + {}^{٨}ق_{٧} + {}^{٨}ق_{٦} = ١ + ٨ + ٢٨ = ٣٧$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٦

حقيبة بها ١٢ كرة حمراء ، ٨ كرات بيضاء أوجد عدد طرق سحب ٥ كرات من نفس اللون فى الحالات الآتية :

(أ) إذا كان السحب مع الإحلال و الترتيب

(ب) إذا كان السحب بدون إحلال مع الترتيب

(جـ) إذا كان السحب بدون إحلال و دون ترتيب

الحل

(أ) ∵ السحب مع الاحلال و الترتيب

∴ عدد طرق السحب $= (١٢)^{٥} \times (٨)^{٥} = ٢٤٨٨٣٢ \times ٣٢٧٦٨$

(ب) ∵ السحب بدون الاحلال مع الترتيب

∴ عدد طرق السحب $= {}^{١٢}ل_{٥} \times {}^{٨}ل_{٥} = ٩٥٠٤٠ \times ٦٧٢٠ = ٦٣٨٣٣٨٨٠٠$

(جـ) ∵ السحب بدون الاحلال و دون الترتيب

∴ عدد طرق السحب $= {}^{١٢}ق_{٥} \times {}^{٨}ق_{٥} = ٧٩٢ \times ٥٦ = ٤٤٣٥٢$

إجابة تفكير ناقد صفحة ٦

أوجد عدد طرق وقوف ٤ سيارات متجاورة فى ساحة انتظار بها ١٠ أماكن وقوف فى الحالات الآتية :

(أ) إذا كان الموقف على شكل دائرة

(ب) **إذا كان الموقف على شكل صف**

الحل

(أ) ∵ الموقف على شكل دائرة   ∴ عدد الطرق = ١٠ ٤| = ٢٤٠ طريقة

(ب) ∵ الموقف على شكل صف

∴ عدد الطرق = (١٠ – ٤ + ١) ٤| = ١٦٨ طريقة

توضيح :

(أ) أولاً : دراسة عدد طرق وقوف الأربع سيارات متجاورين :

نفرض وقوف الأربع سيارات بالأماكن : أ ، ب ، حـ ، ء حيث :

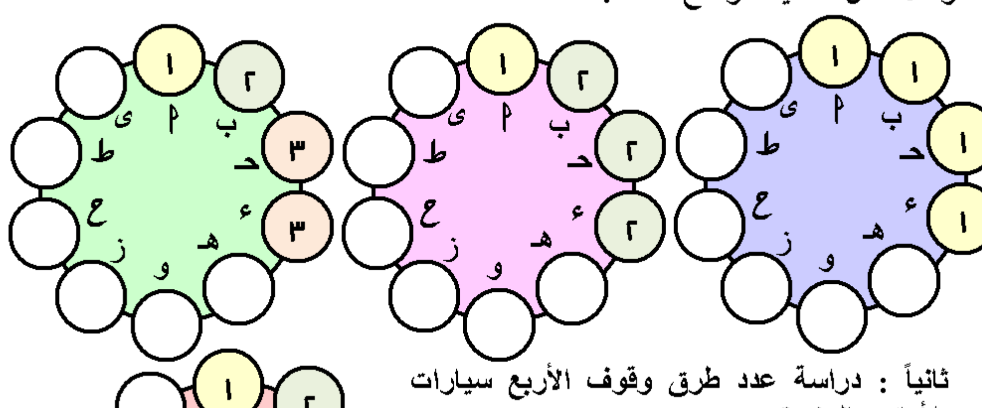
لكل سيارة الحق فى الوقوف بأى من هذه الأماكن و يكون :

عدد طرق وقوف السيارة الأولى = ٤ ، عدد طرق وقوف السيارة الثانية = ٣

، عدد وقوف السيارة الثالثة = ٢ ، عدد طرق وقوف السيارة الرابعة = ١

∴ عدد طرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤| = ٢٤ طريقة

و الأشكال التالية توضح ذلك :



ثانياً : دراسة عدد طرق وقوف الأربع سيارات بالأماكن العشرة :

إذا وقفت كل سيارة بالمكان التالى لمكانها السابق فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة (بالتتابع) نجد أن :

عدد الطرق = ١٠ طرق

و الأشكال التالية توضح ذلك :

أحمد الشنتورى

أى أن : عدد الطرق = ١٠ ⌊٤ = ٢٤٠ طريقة

و بصف عامة :

عدد طرق ترتيب ر من العناصر فى ن من الأماكن المتجاورة حول دائرة

= ن ⌊ر

ملاحظات :

(١) عدد طرق ترتيب ن من العناصر فى ن من الأماكن حول دائرة

= ⌊ن − ١ = $\frac{⌊ن}{ن}$

(٢) توجد حالات أخرى للترتيب حول دائرة

(ب) أولاً : دراسة عدد طرق وقوف الأربع سيارات متجاورين :

نفرض وقوف الأربع سيارات بالأماكن : م ، ب ، حـ ، ء حيث :

لكل سيارة الحق فى الوقوف بأى من هذه الأماكن و يكون :

عدد طرق وقوف السيارة الأولى = ٤ ، عدد طرق وقوف السيارة الثانية = ٣

، عدد وقوف السيارة الثالثة = ٢ ، عدد طرق وقوف السيارة الرابعة = ١

∴ عدد طرق = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ⌊٤ = ٢٤ طريقة

و الأشكال التالية توضح ذلك :

المقاعد	م	ب	حـ	ء	هـ	و	ز	ع	ط	ى
الأشخاص	١	١	١	١						

المقاعد	م	ب	حـ	ء	هـ	و	ز	ع	ط	ى
الأشخاص	١	٢	٢	٢						

المقاعد	م	ب	حـ	ء	هـ	و	ز	ع	ط	ى
الأشخاص	١	٢	٣	٣						

المقاعد	م	ب	حـ	ء	هـ	و	ز	ع	ط	ى
الأشخاص	١	٢	٣	٤						

ثانياً : دراسة عدد طرق وقوف الأربع سيارات بالأماكن العشرة :

إذا وقفت كل سيارة بالمكان التالى لمكانها نحو اليمين (بالتتابع) نجد أن :

عدد الطرق = ٧ طرق = (١٠ − ٤ + ١) طريقة

و الأشكال التالية توضح ذلك :

	المقاعد	م	ب	حـ	ء	هـ	و	ز	ع	ط	ى
١	الأشخاص	١	٢	٣	٤						
٢	الأشخاص		١	٢	٣	٤					
٣	الأشخاص			١	٢	٣	٤				
٤	الأشخاص				١	٢	٣	٤			
٥	الأشخاص					١	٢	٣	٤		
٦	الأشخاص						١	٢	٣	٤	
٧	الأشخاص							١	٢	٣	٤

أى أن : عدد الطرق = (١٠ − ٤ + ١) ⌊٤ = ١٦٨ طريقة

و بصف عامة :

عدد طرق ترتيب ر من العناصر فى ن من الأماكن المتجاورة فى صف

= (ن − ر + ١) ⌊ر

ملاحظة :

عدد طرق ترتيب ن من العناصر فى ن من الأماكن فى صف = ⌊ن

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٦

أوجد قيمة ر فى كل مما يأتى :

(أ) ${}^{8}ل_{3ر-1} = 6720$ (ب) ${}^{9}ل_{ر-4} = 9!$

الحل

(أ) ∵ ${}^{8}ل_{3ر-1} = 6720 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = {}^{8}ل_{5}$

∴ $3ر - 1 = 5$ ∴ $ر = 2$

(ب) ∵ ${}^{9}ل_{ر-4} = {}^{9}ل_{9}$ ، ${}^{ن}ل_{ن} = {}^{ن}ل_{ن-1}$

∴ $ر - 4 = 9$ ∴ $ر = 13$

أو : ${}^{9}ل_{ر-4} = {}^{9}ل_{8}$ ∴ $ر - 4 = 8$ ∴ $ر = 12$

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٧

أوجد قيمة ن إذا كان : ${}^{ن-4}ل_{9} = {}^{ن-4}ل_{9}$

الحل

∵ ${}^{ن-4}ل_{9} = {}^{ن-4}ل_{9}$ ∴ $0 < 9 \le ن - 4$

∴ $ن \ge 13$ ∴ $ن \in \{13 ، 14 ، 15 ، ....\}$

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٧

إذا كان ${}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن-1}ل_{ن} = 3 : 5$ فأوجد قيمة ن

الحل

∵ ${}^{2ن+1}ل_{ن-1} : {}^{2ن-1}ل_{ن} = 3 : 5$

∴ $\frac{(2ن+1)!}{(ن+2)!} \div \frac{(2ن-1)!}{(ن-1)!} = \frac{3}{5}$

∴ $\frac{(2ن+1)!}{(ن+2)!} \times \frac{(ن-1)!}{(2ن-1)!} = \frac{3}{5}$

∴ $\frac{(2ن+1)(2ن)(2ن-1)!}{(ن+2)(ن+1)(ن)(ن-1)!} \times \frac{(ن-1)!}{(2ن-1)!} = \frac{3}{5}$

و منها : $10(2ن+1) = 3(ن+2)(ن+1)$

∴ $20ن + 10 = 3ن^2 + 9ن + 6$ ∴ $3ن^2 - 11ن - 4 = 0$

∴ $(3ن+1)(ن-4) = 0$

و منها : $ن = -\frac{1}{3}$ مرفوض ، $ن = 4$

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٦

أوجد قيمة كل من : ن ، ر فى كل مما يأتى :

(أ) ${}^{ن-ر}ل_{2} = 90$ ، ${}^{ن+ر}ل_{2} = 380$

(ب) ${}^{ن}ل_{ر} = 60480$ ، $ر! = 720$

الحل

(أ) ∵ ${}^{ن-ر}ل_{2} = 90 = 10 \times 9 = {}^{10}ل_{2}$ ∴ $ن - ر = 10$ (1)

، ∵ ${}^{ن+ر}ل_{2} = 380 = 20 \times 19 = {}^{20}ل_{2}$ ∴ $ن + ر = 20$ (2)

بجمع (1) ، (2) ينتج : $2ن = 30$ ∴ $ن = 15$

بالتعويض فى (2) ينتج : $15 + ر = 20$ ∴ $ر = 5$

(ب) ∵ $ر! = 720 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6!$ ∴ $ر = 6$

، ∵ ${}^{ن}ل_{ر} = 60480$ ∴ ${}^{ن}ل_{6} = 60480 = {}^{9}ل_{6}$ ∴ $ن = 9$

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ٨

إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠$ فأوجد قيم كل من : ن ، ر الممكنة

الحل

∵ $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = {}^{٢١٠}ل_{١}$ ∴ ن = ٢١٠ ، ر = ١ أو

∵ $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = {}^{١٥}ل_{٢}$ ∴ ن = ١٥ ، ر = ٢ أو

∵ $^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ = {}^{٧}ل_{٣}$ ∴ ن = ٧ ، ر = ٣

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ٨

أوجد قيمة ن فى كل مما يأتى :

(أ) $^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ (ب) $^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$

الحل

(أ) ∵ $^{ن+١}ق_{ن-١} = ٦٦$ ∴ $^{ن+١}ق_{٢} = ٦٦$

، ∵ $٦٦ = {}^{١٢}ق_{٢}$ ∴ $^{ن+١}ق_{٢} = {}^{١٢}ق_{٢}$

∴ ن + ١ = ١٢ ∴ ن = ١١

(ب) ∵ $^{٢٥}ق_{٢ن-١٤} = {}^{٢٥}ق_{ن-١}$ ∴ ٢ن − ١٤ = ن − ١

و منها : ن = ١٣ " تحقق "

أو : ٢ن − ١٤ + ن − ١ = ٢٥ و منها : ن = $\frac{٤٠}{٣}$ مرفوض

إجابة حاول أن تحل (١٠) صفحة ٩

أحسب قيمة ر إذا كان $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$

الحل

∵ $^{٧}ق_{ر} : {}^{٧}ق_{ر-١} = \frac{١}{٣}$ ∴ $\frac{٧ - ر + ١}{ر} = \frac{١}{٣}$

و منها : ٢٤ − ٣ر = ر ∴ ٤ر = ٢٤ ∴ ر = ٦

إجابة حاول أن تحل (١١) صفحة ٩

إذا كان $^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$

، $^{ن}ق_{ر-٢} + {}^{ن}ق_{ر-١} = ٣٤٣٢$ أوجد قيم كل من : ن ، ر

الحل

∵ $^{١٣}ق_{ر} : {}^{١٣}ق_{ر+١} = ٩ : ٥$ ∴ $\frac{ر + ١}{١٣ - (ر + ١) + ١} = \frac{٩}{٥}$

و منها : ١١٧ − ٩ر = ٥ر + ٥ ∴ ١٤ر = ١١٢ ∴ ر = ٨

∴ $^{ن}ق_{٦} + {}^{ن}ق_{٧} = ٣٤٣٢$ ∴ $^{ن+١}ق_{٧} = ٣٤٣٢ = {}^{١٤}ق_{٧}$

∴ ن + ١ = ١٤ ∴ ن = ١٣

إجابة حاول أن تحل (١٢) صفحة ١٠

(أ) أوجد قيمة ن التى تحقق : $^{ن}ق_{٣} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

(ب) أوجد قيمة : $\frac{^{١٧}ق_{٦} + {}^{١٧}ق_{٥}}{^{١٧}ق_{٥}}$

الحل

(أ) ∵ $^{ن}ق_{٣} + ٢\,{}^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١} = ١٢٠$

∴ $(^{ن}ق_{٣} + {}^{ن}ق_{٢}) + (^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{١}) = ١٢٠$

∴ $^{ن+١}ق_{٣} + {}^{ن+١}ق_{٢} = ١٢٠$ ∴ $^{ن+٢}ق_{٣} = ١٢٠ = {}^{١٠}ق_{٣}$

∴ ن + ٢ = ١٠ ∴ ن = ٨

(ب) المقدار $= \frac{{}^{17}\text{ق}_{6}}{{}^{17}\text{ق}_{5}} + \frac{{}^{17}\text{ق}_{5}}{{}^{17}\text{ق}_{5}} = \frac{17-6+1}{6} + 1 = 3$

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٠

أثبت أن $\ {}^{n}\text{ق}_{r} : {}^{n-1}\text{ق}_{r-1} = \frac{n}{r}$ و من ذلك أثبت أن :

$$\frac{{}^{25}\text{ق}_{4} + {}^{24}\text{ق}_{3}}{{}^{24}\text{ق}_{3} + {}^{23}\text{ق}_{2}} = \frac{58}{9}$$

الحـــل

$$\frac{{}^{n}\text{ق}_{r}}{{}^{n-1}\text{ق}_{r-1}} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \times \frac{(r-1)!\,(n-r)!}{(n-1)!}$$

$$= \frac{n\,(n-1)!}{r\,(r-1)!\,(n-r)!} \times \frac{(r-1)!\,(n-r)!}{(n-1)!} = \frac{n}{r}$$

$$\frac{{}^{25}\text{ق}_{4} + {}^{24}\text{ق}_{3}}{{}^{24}\text{ق}_{3} + {}^{23}\text{ق}_{2}} = \frac{\frac{{}^{25}\text{ق}_{4}}{{}^{24}\text{ق}_{3}} + 1}{\frac{{}^{23}\text{ق}_{2}}{{}^{24}\text{ق}_{3}} + 1} = \frac{\frac{25}{4} + 1}{\frac{3}{24} + 1} = \frac{\frac{29}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{58}{9}$$

إجابة حاول أن تحل (١٣) صفحة ١٠

أوجد قيمة ن الممكنة إذا كان : ${}^{n}\text{ق}_{8} \times {}^{n}\text{ق}_{6} \geq {}^{n}\text{ق}_{7} \times {}^{n}\text{ق}_{5}$

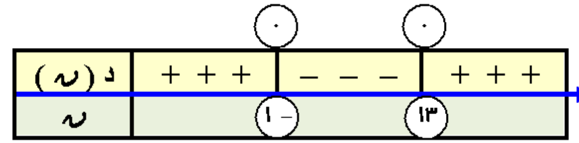
الحـــل

$\because\ {}^{n}\text{ق}_{8} \times {}^{n}\text{ق}_{6} \geq {}^{n}\text{ق}_{7} \times {}^{n}\text{ق}_{5}$

$\therefore\ \frac{{}^{n}\text{ق}_{8}}{{}^{n}\text{ق}_{7}} \times \frac{{}^{n}\text{ق}_{6}}{{}^{n}\text{ق}_{5}} \geq 1 \qquad \therefore\ \frac{n-8+1}{8} \times \frac{n-6+1}{6} \geq 1$

$\therefore\ (n-7)(n-5) \geq 48 \qquad \therefore\ n^{2} - 12n + 35 \geq 48$

$\therefore\ n^{2} - 12n - 13 \geq 0 \qquad \therefore\ (n-13)(n+1) \geq 0$



$\therefore\ n \geq 13$ أو $n \leq -1$ مرفوض لأن : $n \in$ ص$_{+}$

$\therefore\ n \in \{13 ، 14 ، 15 ، ....\}$

حل تمارين (١ – ١) صفحة ١٠ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين معاً أو ثلاثة أحرف مختلفة معاً من عناصر المجموعة { أ ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و } يساوى ....

(أ) ${}^{6}\text{ق}_{2} \times {}^{6}\text{ق}_{3}$ (ب) ${}^{6}\text{ل}_{2} \times {}^{6}\text{ل}_{3}$

(حـ) ${}^{6}\text{ق}_{2} + {}^{6}\text{ق}_{3}$ (ء) ${}^{6}\text{ل}_{2} + {}^{6}\text{ل}_{3}$

(٢) إذا كان : ${}^{n}\text{ق}_{5} : {}^{n}\text{ق}_{4} = 3 : 1$ فإن : ن = ...

(أ) ٧ (ب) ٩ (حـ) ١٧ (ء) ١٩

(٣) أشترك ١٢ لاعباً فى مسابقة للسباحة ، كم طريقة يمكن بها ترتيب المركز الأول و الثانى و الثالث ؟

(أ) ١٢٣٠ (ب) ١٣٢٠ (حـ) ٢٣١٠ (ء) ٣٢١٠

(٤) أى القيم الآتية يمكن أن تساويها ${}^{ن}ل_{ر}$ ؟

(أ) ٢٤ (ب) ٢٥ (حـ) ٢٧ (ء) ٣٠

(٥) إذا كان : ${}^{١٧}ل_{م+٥} = {}^{٢٩}ل_{م+٥}$ فإن : م = ...

(أ) -٥ (ب) ٠ (حـ) ٥ (ء) ١٢

(٦) إذا كان : ${}^{ن-٣}ل_{٧} = \underline{|٨}$ فإن : ن = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (حـ) ١١ (ء) ١٥

(٧) قيمة : ${}^{٥٠}ق_{٤} + \sum_{ر=١}^{٦} {}^{٥٦-ر}ق_{٣} = ...$

(أ) ${}^{٥٦}ق_{٤}$ (ب) ${}^{٥٦}ق_{٢}$ (حـ) ${}^{٥٥}ق_{٤}$ (ء) ${}^{٥٥}ق_{٣}$

(٨) يجب على الطالب أن يجيب على ١٠ أسئلة من ١٣ سؤالاً بشرط أن يجيب عن ٤ أسئلة على الأقل من الأسئلة الخمسة الأولى

كم طريقة يمكن بها أن يجيب الطالب ؟

(أ) ١٤٠ (ب) ١٩٦ (حـ) ٢٨٠ (ء) ٣٤٦

(٩) إذا كان : ${}^{ن+٢}ق_{٤} = ن^{٢} - ١$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٦ (ء) ١٠

الحل

(١) ∵ الاختيار بدون ترتيب و بدون احلال ، و أداة الربط " أو "

∴ عدد الطرق = ${}^{٦}ق_{٢} + {}^{٦}ق_{٣}$

(٢) ∵ ${}^{ن}ق_{٥} : {}^{ن}ق_{٤} = ٣ : ١$ ∴ $\frac{ن - ٥ + ١}{٥} = \frac{٣}{١}$

∴ ن − ٤ = ١٥ ومنها : ن = ١٩

(٣) ∵ الاختيار بترتيب بدون احلال ∴ عدد الطرق = ${}^{١٢}ل_{٣} = ١٣٢٠$

(٤) ∵ ٣٠ = ٦ × ٥ = ${}^{٦}ل_{٢}$ ∴ ${}^{ن}ل_{ر}$ يمكن أن = ٣٠

(٥) ∵ ${}^{١٧}ل_{م+٥} = {}^{٢٩}ل_{م+٥}$ ، ١٧ يستحيل أن تساوى ٢٩

∴ م + ٥ = ٠ ومنها : م = −٥

(٦) ∵ ${}^{ن-٣}ل_{٧} = {}^{٨}ل_{٧}$ ∴ ن − ٣ = ٨ ومنها : ن = ١١

(٧) المقدار = $({}^{٥٠}ق_{٤} + {}^{٥٠}ق_{٣}) + {}^{٥١}ق_{٣} + {}^{٥٢}ق_{٣} + {}^{٥٣}ق_{٣} + {}^{٥٤}ق_{٣} + {}^{٥٥}ق_{٣}$

$= ({}^{٥١}ق_{٤} + {}^{٥١}ق_{٣}) + {}^{٥٢}ق_{٣} + {}^{٥٣}ق_{٣} + {}^{٥٤}ق_{٣} + {}^{٥٥}ق_{٣}$

$= ({}^{٥٢}ق_{٤} + {}^{٥٢}ق_{٣}) + {}^{٥٣}ق_{٣} + {}^{٥٤}ق_{٣} + {}^{٥٥}ق_{٣}$

$= ({}^{٥٣}ق_{٤} + {}^{٥٣}ق_{٣}) + {}^{٥٤}ق_{٣} + {}^{٥٥}ق_{٣}$

$= ({}^{٥٤}ق_{٤} + {}^{٥٤}ق_{٣}) + {}^{٥٥}ق_{٣} = {}^{٥٥}ق_{٤} + {}^{٥٥}ق_{٣} = {}^{٥٦}ق_{٤}$

(٨) يمكن للطالب أن يختار :

٤ أسئلة على من الأسئلة الخمسة الأولى ، ٦ أسئلة من الأسئلة الثمانية التالية

فيكون : عدد الطرق = ${}^{٥}ق_{٤} + {}^{٨}ق_{٦}$ = ٥ × ٢٨ = ١٤٠ طريقة

أو أن يختار :

٥ أسئلة على من الأسئلة الخمسة الأولى ، ٥ أسئلة من الأسئلة الثمانية التالية

فيكون : عدد الطرق = ${}^{٥}ق_{٥} + {}^{٨}ق_{٥}$ = ١ × ٥٦ = ٥٦ طريقة

∴ عدد طرق اختيار الطالب للأسئلة = ١٤٠ + ٥٦ = ١٩٦ طريقة

(٩) ∵ ${}^{ن+٢}ق_{٤} = ن^{٢} - ١$

∴ (ن + ٢) (ن + ١) (ن) (ن − ١) = ٢٤ (ن^{٢} − ١)

∴ ن (ن + ٢) = ٢٤ ∴ ن^{٢} + ٢ن − ٢٤ = ٠

∴ (ن + ٦) (ن − ٤) = ٠　　∴ ن = ٤ أو ن = − ٦ مرفوض

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٠) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي و عددين فرديين من ٤ أعداد زوجية ، ٥ أعداد فردية

الحل

∵ الاختيار بدون ترتيب و بدون احلال ، و أداة الربط " و "

عدد الطرق = $ق^{٤}_{١} \times ق^{٥}_{٢}$ = ٤ × ١٠ = ٤٠ طريقة

(١١) كم طريقة يمكن بها اختيار عدد زوجي أو عددين فرديين من ٤ أعداد زوجية أو ٥ أعداد فردية

الحل

∵ الاختيار بدون ترتيب و بدون احلال ، و أداة الربط " أو "

∴ عدد الطرق = $ق^{٤}_{١} + ق^{٥}_{٢}$ = ٤ + ١٠ = ١٤ طريقة

(١٢) كم طريقة يمكن بها توزيع ٨ جوائز بالتساوى على ٤ طلاب

الحل

∵ عدد الجوائز = ٨ ، عدد الطلاب = ٤ ، التوزيع بالتساوى

∴ عدد الجوائز لكل طالب = ٢ دون إحلال و دون ترتيب

عدد طرق توزيع الجوائز للطالب الأول = $ق^{٨}_{٢}$ = ٢٨ طريقة

عدد طرق توزيع الجوائز للطالب الثانى = $ق^{٦}_{٢}$ = ١٥ طريقة

عدد طرق توزيع الجوائز للطالب الثالث = $ق^{٤}_{٢}$ = ٦ طريقة

عدد طرق توزيع الجوائز للطالب الرابع = $ق^{٢}_{٢}$ = ١ طريقة

عدد طرق توزيع الجوائز للطلاب = ٢٨ × ١٥ × ٦ × ١ = ٢٥٢٠ طريقة

(١٣) كم عدداً مكوناً من ٤ أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام

{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

(أ) مع الإحلال　　　(ب) بدون إحلال

الحل

∵ العدد مكون من ٤ أرقام (ر = ٤) من بين ٧ أرقام (ن = ٧)

(أ) ∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها مع الإحلال = $ن^{ر}$ = $٧^{٤}$ = ٢٤٠١ طريقة

(ب) ∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها بدون إحلال = $ل^{ن}_{ر}$ = $ل^{٧}_{٤}$ = ٨٤٠ طريقة

(١٤) إذا كانت : س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } و بفرض عدم السماح بتكرار الرقم ، أوجد عدد كل الأعداد الآتية المكونة من عناصر س إذا كان العدد :

(أ) مكوناً من ٣ أرقام بالضبط

(ب) مكوناً من ٣ أرقام على الأقل

(حـ) مكوناً من ٣ أرقام على الأكثر

الحل

∵ العدد مكون من ٣ أرقام (ر = ٣) من بين ٤ أرقام (ن = ٤)

(أ) ∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها بدون تكرار و مكونة من ٣ أرقام بالضبط

= $ل^{ن}_{ر}$ = $ل^{٤}_{٣}$ = ٢٤ طريقة

(ب) ∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها بدون تكرار و مكونة من ٣ أرقام على الأقل

هى الأعداد المكونة من ٣ أرقام " أو " ٤ أرقام

∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها = $ل^{٤}_{٣} + ل^{٤}_{٤}$ = ٢٤ + ٢٤ = ٤٨ طريقة

(حـ) ∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها بدون تكرار و مكونة من ٣ أرقام على الأكثر

هى الأعداد المكونة من ٣ أرقام " أو " رقمين " أو " رقم واحد

∴ عدد الأعداد التى يتم تكوينها = ${}^{٤}ل_{٣} + {}^{٤}ل_{٢} + {}^{٤}ل_{١}$

$= ٢٤ + ١٢ + ٤ = ٤٠$ طريقة

(١٥) أوجد قيمة كل من : ن ، ر فى كل مما يأتى :

(أ) ${}^{ن}ل_{٢} = ٢$ ، ${}^{ن+ر}ل_{٢} = ٩٠$

(ب) ${}^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠$ ، ${}^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦$

(جـ) ${}^{ن}ق_{٢} = ٢١$ ، ${}^{ن+ر}ل_{٣} = ٩٩٠$

(د) ${}^{ن}ق_{ر} = ١٠$ ، $(ن - ر)! = ٦$

الحل

(أ) ∵ ${}^{ن}ل_{٢} = ٢ = {}^{٢}ل_{٢}$ ∴ ن = ٢

∴ ${}^{ر+٢}ل_{٢} = ٩٠ = {}^{١٠}ل_{٢}$ ∴ $ر + ٢ = ١٠$ ∴ ر = ٨

(ب) ∵ ${}^{ن}ل_{٤} = ٨٤٠ = {}^{٧}ل_{٤}$ ∴ ن = ٧

، ${}^{٨}ل_{ر} = ٣٣٦ = {}^{٨}ل_{٣}$ ∴ ر = ٣

(جـ) ∵ ${}^{ن}ق_{٢} = ٢١ = {}^{٧}ق_{٢}$ ∴ ن = ٧

، ${}^{٧+ر}ل_{٣} = ٩٩٠ = {}^{١١}ل_{٣}$ ∴ $٧ + ر = ١١$ ∴ ر = ٤

(د) ∵ $(ن - ر)! = ٦ = ٣!$ ∴ $ن - ر = ٣$

أى : $ن = ٣ + ر$

∴ ${}^{٣+ر}ق_{ر} = ١٠ = {}^{٥}ق_{٢}$ ∴ $٣ + ر = ٥$ ∴ ر = ٢

(١٦) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٢ : ٣$ ، ${}^{ن}ق_{ر-٢} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٤ : ٣$ أوجد القيمة العددية لكل من : ن ، ر

الحل

∵ ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٢ : ٣$ ∴ $\frac{ن - ر + ١}{ر} = \frac{٢}{٣}$

و منها : $٣ن - ٥ر + ٣ = ٠$ (١)

، ∵ ${}^{ن}ق_{ر-٢} : {}^{ن}ق_{ر-١} = ٤ : ٣$ ∴ $\frac{ر - ١}{ن - (ر - ١) + ١} = \frac{٤}{٣}$

و منها : $٤ن - ٧ر + ١١ = ٠$ (٢)

و بحل المعادلتين (١) ، (٢) ينتج : ر = ٢١ ، ن = ٣٤

(١٧) أثبت أن : $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{ر + ١}{ن + ١}$

ثم استخدم ذلك فى ايجاد قيمة : $\frac{{}^{١٥}ق_{٦} + {}^{١٥}ق_{٧}}{{}^{١٥}ق_{٦}}$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن+١}ق_{ر+١}} = \frac{ن!}{ر!\,(ن - ر)!} \times \frac{(ر + ١)!\,(ن - ر)!}{(ن + ١)!}$

$= \frac{ن!}{ر!} \times \frac{ر!\,(ر + ١)}{ن!\,(ن + ١)} = \frac{ر + ١}{ن + ١}$

المقدار $= \frac{{}^{١٥}ق_{٦} + {}^{١٥}ق_{٧}}{{}^{١٥}ق_{٦}} = \frac{١٥ + ١}{٦ + ١} = \frac{١٦}{٧}$

(١٨) أثبت أن $^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-1}ق_{ر} = \frac{ن}{ن-ر}$

ثم استخدم ذلك فى حل المعادلة : $\frac{^{ن}ق_{8} + {}^{ن-1}ق_{8}}{^{ن-1}ق_{8}} = 3$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{\lfloor ن \rfloor}{\lfloor ر \rfloor \lfloor ن-ر \rfloor} \times \frac{\lfloor ر \rfloor \lfloor ن-ر-1 \rfloor}{\lfloor ن-1 \rfloor}$

$= \frac{ن \lfloor ن-1 \rfloor}{(ن-ر) \lfloor ن-ر-1 \rfloor} \times \frac{\lfloor ن-ر-1 \rfloor}{\lfloor ن-1 \rfloor} = \frac{ن}{ن-ر}$

، $\frac{^{ن}ق_{8}}{^{ن-1}ق_{8}} + 1 = 3$ $\therefore \frac{ن}{ن-8} = 2$

$\therefore ن = 2ن - 16$ و منها : $ن = 16$

(١٩) إذا كان : $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-1}$ ، $^{ن-1}ق_{ر} = \frac{40}{\lfloor ر \rfloor} \times {}^{ن}ل_{ر-2}$

أوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحل

$\because {}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ر-1}$ $\therefore \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = 1$

$\therefore \frac{ن-ر+1}{ر} = 1$ و منها : $ن = 2ر - 1$ (١)

، $\because {}^{ن-1}ق_{ر} = \frac{40}{\lfloor ر \rfloor} \times {}^{ن}ل_{ر-2}$ بالتعويض من (١) ينتج :

$^{2ر}ق_{ر} \times \lfloor ر \rfloor = 40 \times {}^{2ر-1}ل_{ر-2}$

$\therefore \frac{\lfloor 2ر \rfloor}{\lfloor ر \rfloor \lfloor ر \rfloor} \times \lfloor ر \rfloor = 40 \times \frac{\lfloor 2ر-1 \rfloor}{\lfloor ر+1 \rfloor}$

$\therefore \frac{2ر \lfloor 2ر-1 \rfloor}{\lfloor ر \rfloor} = 40 \times \frac{\lfloor 2ر-1 \rfloor}{(ر+1) \lfloor ر \rfloor}$ و منها :

$2ر^2 + 2ر = 40$ $\therefore ر^2 + ر - 20 = 0$

$\therefore (ر - 4)(ر + 5) = 0$

$\therefore ر = 4$ أو $ر = -5$ مرفوض

(٢٠) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = 120\ {}^{ن}ق_{ن-ر}$ فاحسب قيمة $^{12}ق_{2ر}$ ثم أوجد أقل قيمة للمتغير ن و التى تجعل العلاقة صحيحة

الحل

$\because {}^{ن}ل_{ر} = 120\ {}^{ن}ق_{ن-ر}$ $\therefore {}^{ن}ل_{ر} = 120\ {}^{ن}ق_{ر}$

$\therefore {}^{ن}ل_{ر} = 120 \times \frac{^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر \rfloor}$ و منها : $\lfloor ر \rfloor = \lfloor 5 \rfloor$ $\therefore ر = 5$

$\therefore {}^{12}ق_{2ر} = {}^{12}ق_{10} = {}^{12}ق_{2} = 66$ $\therefore {}^{ن}ل_{5} = 120\ {}^{ن}ق_{ن-5}$

$\therefore {}^{ن}ل_{5} = 120\ {}^{ن}ق_{5}$ $\therefore ن = 5$

و هى أقل قيمة للمتغير ن و التى تجعل العلاقة صحيحة

(٢١) أوجد قيمة كل من : ن ، ر إذا كان :

$^{ن}ق_{ر-1} : {}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+1} = 1 : 5 : 15$

الحل

$\because \frac{^{ن}ق_{ر}}{^{ن}ق_{ر-1}} = \frac{5}{1}$ $\therefore \frac{ن-ر+1}{ر} = \frac{5}{1}$

و منها : ن − ر + ١ = ٥ ر ∴ ن + ١ = ٦ ر (١)

، ∵ $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1}$ ∴ $\frac{\text{ن} - \text{ر}}{\text{ر} + 1} = \frac{3}{1}$

و منها : ن − ر = ٣ ر + ٣ ∴ ن − ٣ = ٤ ر (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج : ٤ = ٢ ر و منها : ر = ٢

بالتعويض ف (١) ينتج : ن + ١ = ١٢ و منها : ن = ١١

(٢٢) أثبت أن : $\frac{{}^{\text{ن}+1}\text{ق}_{\text{ر}+1}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن}+1}{\text{ر}+1}$

ثم استخدم ذلك فى ايجاد قيمة : $\frac{{}^{15}\text{ق}_{5} + {}^{15}\text{ق}_{4}}{{}^{15}\text{ق}_{4} + {}^{15}\text{ق}_{3}}$

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{\lfloor\text{ن}+1}{\lfloor\text{ر}+1 \; \lfloor\text{ن}-\text{ر}} \times \frac{\lfloor\text{ر} \; \lfloor\text{ن}-\text{ر}}{\lfloor\text{ن}}$

$= \frac{(\text{ن}+1)\lfloor\text{ن}}{(\text{ر}+1)\lfloor\text{ر}} \times \frac{\lfloor\text{ر}}{\lfloor\text{ن}} = \frac{\text{ن}+1}{\text{ر}+1}$

المقدار = $\frac{\frac{{}^{15}\text{ق}_{5}}{{}^{15}\text{ق}_{4}} + 1}{1 + \frac{{}^{15}\text{ق}_{3}}{{}^{15}\text{ق}_{4}}} = \frac{\frac{15}{5} + 1}{1 + \frac{4}{14}} = \frac{4}{\frac{9}{7}} = \frac{28}{9}$

(٢٣) إذا كان : $\frac{{}^{13}\text{ق}_{\text{ر}+1} + {}^{13}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{13}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{13}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = 2$ فأوجد قيمة : ر

الحل

∵ $\frac{{}^{13}\text{ق}_{\text{ر}+1} + {}^{13}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{13}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{13}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = 2$ ∴ $\frac{{}^{14}\text{ق}_{\text{ر}+1}}{{}^{14}\text{ق}_{\text{ر}}} = 2$

∴ $\frac{14 - (\text{ر}+1) + 1}{\text{ر}+1} = 2$ و منها : ١٤ − ر = ٢ ر + ٢

∴ ر = ٤

(٢٤) إذا كان : ${}^{30}\text{ل}_{\text{س}} = {}^{30}\text{ل}_{\text{س}+2\text{ص}}$ فما قيمة كل من س ، ص ؟

الحل

∵ ${}^{30}\text{ل}_{\text{س}} = {}^{30}\text{ل}_{\text{س}+2\text{ص}}$ ، ∵ ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}-1}$

∴ إما : س = ٣٠ ، س + ٢ ص = ٣٠ و منها : ص = ٠

أو : س = ٢٩ ، س + ٢ ص = ٢٩ و منها : ص = ٠

أو : س = ٣٠ ، س + ٢ ص = ٢٩ و منها : ص = $-\frac{1}{2}$

أو : س = ٢٩ ، س + ٢ ص = ٣٠ و منها : ص = $\frac{1}{2}$

أو : س < ٢٩ ∴ س = س + ٢ ص و منها : ص = ٠

∴ س ∈ { ٠ ، ١ ، ٢ ، .... ، ٣٠ } ، ص ∈ { ٠ ، $\frac{1}{2}$ ، $-\frac{1}{2}$ }

(٢٥) إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{8} \geq {}^{\text{ن}}\text{ل}_{7}$ فما قيمة ن ؟

الحل

∵ ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{8} \geq {}^{\text{ن}}\text{ل}_{7}$ ∴ $\frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ن}-8} \geq \frac{\lfloor\text{ن}}{\lfloor\text{ن}-7}$

∴ $\lfloor\text{ن}-7 \geq \lfloor\text{ن}-8$ ∴ $(\text{ن}-7)\lfloor\text{ن}-8 \geq \lfloor\text{ن}-8$

∴ ن − ٧ ≥ ١ ∴ ن ≥ ٨ ∴ ن ∈ { ٨ ، ٩ ، ١٠ ، .... }

(٢٦) إذا كان : $(\text{ر}+\text{ن})! = ٣٨٠\ (\text{ر}+\text{ن}-٢)!$ فأوجد قيمة ر + ن

الحل

$\because (\text{ر}+\text{ن})! = ٣٨٠\ (\text{ر}+\text{ن}-٢)! \quad \therefore \dfrac{(\text{ر}+\text{ن})!}{(\text{ر}+\text{ن}-٢)!} = ٢٠ \times ١٩$

$\therefore {}^{\text{ر}+\text{ن}}\text{ل}_{٢} = {}^{٢٠}\text{ل}_{٢} \quad \therefore \text{ر}+\text{ن} = ٢٠$

(٢٧) حل كل من المعادلات الآتية :

(أ) $(\text{ن}+٢)!\ (٣\text{ن}-٤)! = \text{ن}!\ (٣\text{ن}-٢)!$

(ب) $٢\ (٢\text{ن})! = (\text{ن}^٢ + ٣\text{ن} + ٢)\ (\text{ن}!)^٢$

(حـ) $(٢\text{ن})!\ (\text{ن}-٣)! = ٧٢\ (٣\text{ن}-٧)!$

الحل

(أ) $\dfrac{(\text{ن}+٢)!}{\text{ن}!} = \dfrac{(٣\text{ن}-٢)!}{(٣\text{ن}-٤)!} \quad \therefore {}^{\text{ن}+٢}\text{ل}_{٢} = {}^{٣\text{ن}-٢}\text{ل}_{٢}$

$\therefore \text{ن}+٢ = ٣\text{ن}-٢$ و منها : $\text{ن} = ٢$

(ب) $\dfrac{(٢\text{ن})!}{\text{ن}!} = \dfrac{(\text{ن}+٢)(\text{ن}+١)\ \text{ن}!}{٢!} = \dfrac{(\text{ن}+٢)!}{٢!}$

$\therefore {}^{٢\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}} = {}^{\text{ن}+٢}\text{ل}_{\text{ن}} \quad \therefore ٢\text{ن} = \text{ن}+٢$ و منها : $\text{ن} = ٢$

(حـ) بضرب الطرفين × (ن − ٢) ينتج :

$(٢\text{ن})!\ (\text{ن}-٢)\ (\text{ن}-٣)! = ٢٤ \times ٣\ (\text{ن}-٢)\ (٣\text{ن}-٧)!$

$\therefore (٢\text{ن})!\ (\text{ن}-٣)! = ٢٤\ (٣\text{ن}-٦)\ (٣\text{ن}-٧)!$

$\therefore (٢\text{ن})!\ (\text{ن}-٣)! = ٤!\ (٣\text{ن}-٦)!$

$\therefore \dfrac{(\text{ن}-٢)!}{٤!} = \dfrac{(٣\text{ن}-٦)!}{(٢\text{ن})!} \quad \therefore {}^{\text{ن}-٢}\text{ل}_{\text{ن}-٦} = {}^{٣\text{ن}-٦}\text{ل}_{\text{ن}-٦}$

$\therefore \text{ن}-٢ = ٣\text{ن}-٦$ و منها : $\text{ن} = ٢$ " مرفوض "

أ، $\text{ن}-٦ = ٠$ و منها : $\text{ن} = ٦$

(٢٨) أثبت أن : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \div {}^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}-١} = \dfrac{\text{ن}}{\text{ر}}$ ثم استخدم ذلك فى إيجاد قيمة كل من ن ، ر إذا كان :

$${}^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ \times {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}} = ٩٠ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}$$

الحل

للاثبات راجع : إجابة تفكير ناقد صفحة ١٠

$\because {}^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{\text{ر}+١} = ٩ \times {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}} \quad \therefore \dfrac{{}^{\text{ن}+٢}\text{ق}_{\text{ر}+١}}{{}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}} = \dfrac{٩}{١}$

$\therefore \dfrac{\text{ن}+٢}{\text{ر}+١} = \dfrac{٩}{١}$ و منها : $\text{ن} - ٩\text{ر} = ٧$ (١)

، $\because ٩ \times {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}} = ٩٠ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} \quad \therefore \dfrac{{}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١}} = \dfrac{٩٠}{٩}$

$\therefore \dfrac{\text{ن}+١}{\text{ر}} = \dfrac{١٠}{١}$ و منها : $\text{ن} - ١٠\text{ر} = -١$ (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن : ر = ٨ ، بالتعويض فى (١) ينتج أن : ر = ٧٩

(٢٩) (أ) إذا كان : $٤ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٥}$ ، $٣ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٦}$ ، $٣ \times {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٧}$ تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة : ن

(ب) إذا كان : $٢ \times {}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}+١}$ ، $٣ \times {}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}}$ ، $٦ \times {}^{١٤}\text{ق}_{\text{ر}-١}$ فى تتابع هندسى أوجد قيمة : ر

الحل

(أ) $\because\ ٤ \times {}^{ن}ق_{٥}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٦}$ ، $٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$ تكون متتابعة حسابية

$\therefore\ ٢ \times ٣ \times {}^{ن}ق_{٦} = ٤ \times {}^{ن}ق_{٥} + ٣ \times {}^{ن}ق_{٧}$ بالقسمة ÷ ${}^{ن}ق_{٦}$ ينتج :

$$٦ = ٤ \times \frac{{}^{ن}ق_{٥}}{{}^{ن}ق_{٦}} + ٣ \times \frac{{}^{ن}ق_{٧}}{{}^{ن}ق_{٦}}$$

$$\therefore\ ٦ = ٤ \times \frac{٦}{ن - ٦ + ١} + ٣ \times \frac{ن - ٧ + ١}{٧}$$

$\therefore\ ٦ = ٤ \times \frac{٦}{ن - ٥} + ٣ \times \frac{ن - ٦}{٧}$ بالضرب × ٧ (ن − ٥) ينتج :

$$٤٢ (ن - ٥) = ١٦٨ + ٣ (ن - ٦) (ن - ٥)$$

$$\therefore\ ٤٢ ن - ٢١٠ = ١٦٨ + ٣ ن^{٢} - ٣٣ ن + ٩٠$$

$\therefore\ ٣ ن^{٢} - ٧٥ ن + ٤٦٨ = ٠$ بالقسمة ÷ ٣ ينتج :

$ن^{٢} - ٢٥ ن + ١٥٦ = ٠$ $\therefore\ (ن - ١٣) (ن - ١٢) = ٠$

$\therefore\ ن = ١٣$ أو $ن = ١٢$

(ب) $\because\ ٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}$ ، $٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}$ ، $٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}$ فى تتابع هندسى

$$\therefore\ \frac{٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}}{٢ \times {}^{١٤}ق_{ر+١}} = \frac{٦ \times {}^{١٤}ق_{ر-١}}{٣ \times {}^{١٤}ق_{ر}}$$

$$\therefore\ \frac{١}{٢} \times \frac{ر + ١}{١٤ - (ر + ١) + ١} = \frac{٢}{٣} \times \frac{ر}{١٤ - ر + ١}$$

$$\therefore\ \frac{١}{٢} \times \frac{ر + ١}{١٤ - ر} = \frac{٢}{٣} \times \frac{ر}{١٥ - ر}$$

بالضرب × ٦ (١٤ − ر) (١٥ − ر) ينتج :

$٤٥ - ٣ ر^{٢} + ٤٢ ر = ٥٦ - ٤ ر^{٢}$ $\therefore\ ر^{٢} - ١٤ ر + ٤٥ = ٠$

$\therefore\ (ر - ٩) (ر - ٥) = ٠$ $\therefore\ ر = ٩$ أو $ر = ٥$

(٣٠) أوجد قيمة كل من ن ، ر فى كل مما يلى :

(أ) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+١} : {}^{ن}ق_{ر+٢} = ١ : ٢ : ٣$

(ب) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+١} = ١٥ : ٢٨ : ٢٤$

(جـ) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤} = ٣ : ١٤ : ١٤$

(ء) ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن-١}ق_{ر-١} = ٩ : ٥$ ، ${}^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٣ر-٥}$

(هـ) ${}^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ، ${}^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$

الحل

(أ) $\because\ \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{٢}{١}$ $\therefore\ \frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٢}{١}$

$\therefore\ \frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{٢}{١}$ $\therefore\ ن - ر = ٢ ر + ٢$

$\therefore\ ن - ٣ ر = ٢$ (١)

، $\because\ \frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٣}{٢}$ $\therefore\ \frac{ن - (ر + ٢) + ١}{ر + ٢} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore\ \frac{ن - ر - ١}{ر + ٢} = \frac{٣}{٢}$ $\therefore\ ٢ ن - ٢ ر - ٢ = ٣ ر + ٦$

$\therefore\ ٢ ن - ٥ ر = ٨$ (٢) بضرب (١) × − ٢ و جمعها مع (٢)

ينتج : ر = ٤ ، بالتعويض فى (١) ينتج : ن = ١٤

(ب) $\because\ \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{٢٤}{١٥}$ $\therefore\ \frac{ن - (ر + ١) + ١}{ر + ١} = \frac{٨}{٥}$

$\therefore\ \frac{ن - ر}{ر + ١} = \frac{٨}{٥}$ $\therefore\ ٥ ن - ٥ ر = ٨ ر + ٨$

$\therefore\ ن - ١٣ ر = ٨$ (١)

، ∵ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} = \frac{٢٨}{٢٤}$ ∴ $\frac{ن-(ر+٢)+١}{ر+٢} = \frac{٧}{٦}$

∴ $\frac{ن-ر-١}{ر+٢} = \frac{٧}{٦}$ ∴ $٦ن - ٦ر - ٦ = ٧ر + ١٤$

∴ $٦ن - ١٣ر = ١٤$ (٢) ، بطرح (١) من (٢) ينتج :

$ن = ١٢$ ، بالتعويض فى (١) ينتج : $ر = ٤$

(حـ) ∵ ${}^{ن}ق_{ر+٢} : {}^{ن}ق_{ر+٤}$ ∴ $ر + ٢ = ر + ٤$ مرفوض

أو $ن = ر + ٢ + ر + ٤$ ∴ $ن = ٢ر + ٦$ (١)

، ∵ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$ ∴ $\frac{{}^{ن}ق_{ر+٢}}{{}^{ن}ق_{ر+١}} \times \frac{{}^{ن}ق_{ر+١}}{{}^{ن}ق_{ر}} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $\frac{ن-(ر+٢)+١}{ر+٢} \times \frac{ن-(ر+١)+١}{ر+١} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $\frac{ن-ر-١}{ر+٢} \times \frac{ن-ر}{ر+١} = \frac{١٤}{٣}$

∴ $٣(ن-ر-١)(ن-ر) = ١٤(ر+٢)(ر+١)$

بالتعويض من (١) ينتج :

$٣(٢ر+٦-ر-١)(٢ر+٦-ر) = ١٤(ر+٢)(ر+١)$

∴ $٣(ر+٥)(ر+٦) = ١٤(ر+٢)(ر+١)$

∴ $٣ر^{٢} + ٣٣ر + ٩٠ = ١٤ر^{٢} + ٤٢ر + ٢٨$

∴ $١١ر^{٢} + ٩ر - ٦٢ = ٠$ ∴ $(١١ر + ٣١)(ر - ٢) = ٠$

∴ $ر = -\frac{٣١}{١١}$ مرفوض أو $ر = ٢$

بالتعويض فى (١) ينتج : $ر = ١٠$

(ء) ∵ ${}^{١٥}ق_{ر} = {}^{١٥}ق_{٣ر-٥}$ ∴ $ر = ٣ر - ٥$ ∴ $ر = \frac{٥}{٢}$ مرفوض

أو $١٥ = ر + ٣ر - ٥$ و منها : $ر = ٥$

، ∵ $\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-١}} = \frac{٩}{٥}$ ∴ $\frac{ن-ر+١}{ر} = \frac{٩}{٥}$

∴ $٥ن - ٥ر - ٥ = ٩ر$ ، بالتعويض فى (١) ينتج :

$٥ن - ٢٥ - ٥ = ٤٥$ و منها : $ن = ١٣$

(هـ) ∵ ${}^{٣٠}ق_{ر} = {}^{٣٠}ق_{ر+١٠}$ ∴ $ر = ر + ١٠$ مرفوض

أو $٣٠ = ر + ر + ١٠$ و منها : $ر = ١٠$

، ∵ ${}^{ن}ل_{٧} = ٩٠ \times {}^{ن-٢}ل_{٥}$ ∴ $\frac{ن!}{(ن-٧)!} = ٩٠ \times \frac{(ن-٢)!}{(ن-٧)!}$

∴ $ن(ن-١)(ن-٢)! = ٩٠ \times (ن-٢)!$

∴ $ن(ن-١) = ١٠ \times ٩$ ∴ ${}^{ن}ل_{٢} = {}^{١٠}ل_{٢}$ و منها : $ن = ١٠$

(٣١) لدينا ٤ نقاط فى مستوى واحد و ليست على استقامة واحدة أوجد عدد القطع المستقيمة التى تصل كل منها بين نقطتين

الحل

∵ عدد النقاط = ٤ ، المطلوب التوصيل بين نقطتين دون احلال و دون ترتيب

∴ عدد القطع المستقيمة = ${}^{٤}ق_{٢} = ٦$ طريقة

(٣٢) كم طريقة يمكن بها اختيار ثلاثة أشخاص من بين خمسة أشخاص

الحل

∵ المطلوب اختيار ٣ أشخاص من بين ٥ أشخاص دون احلال و دون ترتيب

∴ عدد الطرق = ${}^{٥}ق_{٣} = ١٠$ طريقة

(٣٣) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنة للطلبة بها أعضاء من بين ٢٠ طالباً و عشر طالبات ، بحيث تتكون اللجنة من ٤ طلاب و طالبتين

أحمد الشتوى

الحل

∵ المطلوب انتخاب ٤ طلاب من بين ٢٠ طلاب دون احلال و دون ترتيب

∴ عدد طرق انتخاب الطلاب = ${}^{٢٠}\text{ق}_{٤}$ = ٤٨٤٥ ،

∵ المطلوب انتخاب طالبتين من بين ١٠ طالبات دون احلال و دون ترتيب

∴ عدد طرق انتخاب الطالبات = ${}^{١٠}\text{ق}_{٢}$ = ٤٥ ،

∵ اللجنة تتكون من ٤ طلاب " و " طالبتين

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = ٤٨٤٥ × ٤٥ = ٢١٨٠٢٥ طريقة

(٣٤) كم طريقة يمكن بها تكوين فريق من سبعة أعضاء من بين تسع بنات و خمسة أولاد ، بحيث يحتوى الفريق على ثلاثة أولاد فقط

الحل

∵ المطلوب اختيار ٣ أولاد فقط من بين ٥ أولاد دون احلال و دون ترتيب

∴ عدد طرق اختيار الأولاد = ${}^{٥}\text{ق}_{٣}$ = ١٠ ،

∵ الفريق يتكون من ٧ أعضاء ∴ عدد أعضاء الفريق من البنات = ٤ بنات

∴ يتم اختيار ٤ بنات من بين ٩ بنات دون احلال و دون ترتيب

∴ عدد طرق انتخاب البناتات = ${}^{٩}\text{ق}_{٤}$ = ١٢٦ ،

∵ الفريق تتكون من ٣ أولاد فقط " و " ٤ بنات

∴ عدد طرق تكوين الفريق = ١٠ × ١٢٦ = ١٢٦٠ طريقة

(٣٥) كم طريقة يمكن بها انتخاب لجنتين كل منهما تتكون من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصاً بحيث لا يدخل شخص فى اللجنتين فى ذات الوقت

الحل

∵ المطلوب اختيار ٣ أشخاص من بين ١٢ شخصاً دون احلال و دون ترتيب للجنة الأولى

∴ عدد طرق اختيار الأشخاص للجنة الأولى = ${}^{١٢}\text{ق}_{٣}$ = ٢٢٠ ،

∵ المطلوب اختيار ٣ أشخاص دون احلال و دون ترتيب للجنة الثانية بحيث لا يدخل شخص فى اللجنتين فى ذات

∴ يتم اختيار ٣ أشخاص من بين ٩ أشخاص المتبقين

∴ عدد طرق اختيار الأشخاص للجنة الثانية = ${}^{٩}\text{ق}_{٣}$ = ٨٤ ،

∴ يتم اختيار ٣ أشخاص للجنة الأولى " أو " اللجنة الثانية

∴ عدد طرق تكوين اللجنتين = ٢٢٠ + ٨٤ = ٣٠٤ طريقة

(٣٦) أوجد عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه : (أ) ٤ (ب) ٥ (حـ) ٦

الحل

∵ عدد المثلثات الناتجة من توصيل ر رأس من رؤوس مضلع عدد أضلاعه ن ضلعاً = ${}^{ن}\text{ق}_{ر}$

(أ) ∴ عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه ٤ أضلاع = ${}^{٤}\text{ق}_{٣}$ = ٤ ضلعاً

(ب) ∴ عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه ٥ أضلاع = ${}^{٦}\text{ق}_{٣}$ = ١٠ ضلعاً

(حـ) ∴ عدد المثلثات الناتجة من توصيل ٣ رؤوس لمضلع عدد أضلاعه ٦ أضلاع = ${}^{٦}\text{ق}_{٣}$ = ٢٠ ضلعاً

(٣٧) أوجد عدد الأقطار لمضلع عدد أضلاعه : (أ) ٦ (ب) ٨ (حـ) ١٢

الحل

∵ عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ن ضلعاً = $^{ن}ق_{٢}$ − ن

(أ) ∴ عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ٦ أضلاع = $^{٦}ق_{٢}$ − ٦ = ٩ قطراً

(ب) ∴ عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ٨ أضلاع = $^{٨}ق_{٢}$ − ٨ = ٢٠ قطراً

(جـ) ∴ عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ١٢ ضلعاً = $^{١٢}ق_{٢}$ − ١٢ = ٥٤ قطراً

(٣٨) يراد تكوين لجنة من ٤ أشخاص من بين ٩ رجال ، ٣ نساء

(أ) أوجد عدد الطرق المختلفة لتكوين هذه اللجنة

(ب) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط ؟

(جـ) كم لجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل ؟

الحل

∵ عدد الرجال + عدد النساء = ١٢ شخص ، اللجنة تتكون من ٤ أشخاص

(أ) ∴ عدد الطرق المختلفة لتكوين اللجنة = $^{١٢}ق_{٤}$ = ٤٩٥ شخصاً

حل آخر : يمكن أن تتكون اللجنة من ٤ رجال فقط

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{٤}$ = ١٢٦ شخصاً

أو أن تتكون اللجنة من ٣ رجال و امرأة واحد

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{٣}$ + $^{٣}ق_{١}$ = ٢٥٢ شخصاً

أو أن تتكون اللجنة من رجلين و امرأتين

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{٢}$ + $^{٣}ق_{٢}$ = ١٠٨ شخصاً

أو أن تتكون اللجنة من رجل واحد و ٣ نساء

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{١}$ + $^{٣}ق_{٣}$ = ٩ أشخاص

∴ عدد الطرق المختلفة لتكوين اللجنة = ١٢٦ + ٢٥٢ + ١٠٨ + ٩

= ٤٩٥ شخصاً

(ب) ∵ اللجنة تحتوى على امرأة واحدة فقط أى تحتوى على ٣ رجال

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{٣}$ + $^{٣}ق_{١}$ = ٢٥٢ شخصاً

(جـ) ∵ اللجنة تحتوى على امرأة واحدة على الأقل

∴ يمكن أن تتكون اللجنة من ٣ رجال و امرأة واحد

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{٣}$ + $^{٣}ق_{١}$ = ٢٥٢ شخصاً

أو أن تتكون اللجنة من رجلين و امرأتين

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{٢}$ + $^{٣}ق_{٢}$ = ١٠٨ شخصاً

أو أن تتكون اللجنة من رجل واحد و ٣ نساء

∴ عدد طرق تكوين اللجنة = $^{٩}ق_{١}$ + $^{٣}ق_{٣}$ = ٩ أشخاص

∴ عدد الطرق المختلفة لتكوين اللجنة = ٢٥٢ + ١٠٨ + ٩

= ٣٦٩ شخصاً

اجابة أسئلة التمارين العامة و الاختبارات المتعلقة بمبدأ العد – التباديل – التوافيق

حل تمارين عامة صفحة ٣١ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) المقدار : $^{ن}ل_{ر}$: $^{ن-١}ل_{ر-١}$ = ...

(أ) ن (ب) ر (جـ) $\frac{ن}{ر}$ (د) $\frac{ر}{ن}$

(٢) إذا كان : $|\underline{س - ٣}$ × $^{س}ل_{٣}$ = ٢٠ $|\underline{س - ٢}$ فإن : س = ...

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ٤

(٣) إذا كان : ${}^{١٤}ق_{ر^٢} = {}^{١٤}ق_{ر+٢}$ فإن : ر = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (حـ) ٣ (ء) ٢ أو ٣

(٤) ${}^{ن}ل_{ر} \div {}^{ن}ل_{ر-١} = ...$

(أ) $ن - ر$ (ب) $ن - ر - ١$

(حـ) $ن - ر + ١$ (ء) $ن + ر$

(٥) المقدار : ${}^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر+١} = ...$

(أ) ${}^{ن+١}ق_{ر}$ (ب) ${}^{ن}ق_{ر+١}$

(حـ) ${}^{ن+١}ق_{ر+١}$ (ء) ${}^{ن+١}ق_{ر+٢}$

(٦) إذا كان : ${}^{٩}ق_{ر} > {}^{٩}ق_{ر-١}$ فإن : ....

(أ) $ر > ٤$ (ب) $ر < ٤$

(حـ) $ر > ٥$ (ء) $ر < ٥$

(٧) إذا كان : ${}^{س+ص}ل_{٢} = ٢١٠$ ، ${}^{ص-٣}ق_{٣} = ٣٥$

فإن : $(٢س - ص)! = ...$

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ٢ (ء) ١

(٨) إذا كان : ${}^{٧}ق_{ر} > ١$ ، ${}^{ر}ق_{٥} > ١$ فإن :

قيمة $(٦ - ر)! = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٧٢٠ (ء) ٦

الحل

(١) المقدار $= \frac{ن!}{(ن-ر)!} \times \frac{(ن-ر)!}{(ن-١)!} = \frac{ن\,(ن-١)!}{(ن-١)!} = ن$

(٢) $(س-٣)! \times \frac{س!}{(س-٣)!} = ٢٠\,(س-٢)!$

∴ $س\,(س-١)\,(س-٢)! = ٥ \times ٤\,(س-٢)!$

∴ ${}^{س}ل_{٢} = {}^{٥}ل_{٢}$ ∴ $س = ٥$

(٣) إما : $ر^٢ = ر + ٢$ ∴ $ر^٢ - ر - ٢ = ٠$

∴ $(ر+١)(ر-٢) = ٠$ ∴ $ر = ٢$ أو $ر = -١$ مرفوض

أو $١٤ = ر^٢ + ر + ٢$ ∴ $ر^٢ + ر - ١٢ = ٠$

∴ $(ر+٤)(ر-٣) = ٠$ ∴ $ر = ٣$ أو $ر = -٤$ مرفوض

∴ $ر = ٢$ أو ٣

(٤) المقدار $= \frac{ن!}{(ن-ر)!} \times \frac{(ن-ر+١)!}{ن!} = \frac{(ن-ر+١)\,(ن-ر)!}{(ن-ر)!}$

$= ن - ر + ١$

(٥) المقدار $= {}^{ن+١}ق_{ر+١}$ مباشرة من قانون جمع توفيقتين

(٦) $\frac{{}^{٩}ق_{ر}}{{}^{٩}ق_{ر+١}} > ١$ ∴ $\frac{٩ - ر + ١}{ر} > ١$

∴ $٩ - ر + ١ > ر$ ∴ $١٠ > ٢ر$ و منها : $ر < ٥$

(٧) ${}^{س+ص}ل_{٢} = {}^{١٥}ل_{٢}$ ∴ $س + ص = ١٥$ (١)

، ${}^{ص-٣}ق_{٣} = {}^{٧}ق_{٣}$ ∴ $ص - ٣ = ٧$ ∴ $ص = ١٠$

بالتعويض فى (١) ينتج : $س = ٥$

∴ $(٢س - ص)! = (١٠ - ١٠)! = ٠! = ١$

(٨) ∵ ${}^{٧}ق_{ر} > ١$ ∴ $ر \in \{ ٠ ، ١ ، ٢ ، .... ، ٦ \}$ (١)

، ∵ ${}^{ر}ق_{٥} > ١$ ∴ $ر \in \{ ٦ ، ٧ ، ٨ ، .... \}$ (١)

من (١) ، (٢) ينتج : $ر = ٦$

$\therefore \ \lfloor ٦ - ر = \lfloor ٦ - ٦ = \lfloor ٠ = ١$

ثانياً : أجب عما يأتي :

(١٢) إذا كان : ${}^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر - ١}$ ، $\lfloor ن - ر = ٦$

أوجد كلاً من : ن ، ر

الحل

$\because \ {}^{٦}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٦}ل_{ر - ١} \qquad \therefore \ \frac{\lfloor ٦}{\lfloor ٦ - ر} = ٤ \times \frac{\lfloor ٦}{\lfloor ٧ - ر}$

$\therefore \ ٤ \ \lfloor ٦ - ر = (٧ - ر) \ \lfloor ٦ - ر$

$\therefore \ ٤ = ٧ - ر$ و منها : $ر = ٣$

، $\because \ \lfloor ن - ر = ٦ = \lfloor ٣ \qquad \therefore \ ن - ٣ = ٣$ و منها : $ن = ٦$

(١٣) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ن - ٢} = ٤٥$ ، ${}^{ر}ل_{ر - ٣} = ٤$

أوجد قيمة : ${}^{ن}ق_{ر - ٢} \div {}^{ن}ق_{ر - ١}$

الحل

$\because \ {}^{ن}ق_{ن - ٢} = ٤٥ \qquad \therefore \ {}^{ن}ق_{٢} = ٤٥ = {}^{١٠}ق_{٢} \qquad \therefore \ ن = ١٠$

، $\because \ {}^{ر}ل_{ر - ٢} = ٤ \qquad \therefore \ \frac{\lfloor ر}{\lfloor ٣} = ٤ \qquad \therefore \ \lfloor ر = ٤ \ \lfloor ٣ = \lfloor ٤$

$\therefore \ ر = ٤ \qquad \therefore$ المقدار $= \frac{{}^{١٠}ق_{٢}}{{}^{١٠}ق_{٣}} = \frac{٣}{١٠ - ٣ + ١} = \frac{٣}{٨}$

(١٤) إذا كان : $ن \ (ن - ١)(ن - ٢) \times .... \times (ن - ر + ١) = ٥٠٤٠$

، ${}^{ن}ق_{ر} = ٢١٠$ أوجد قيمة : ${}^{ن + ١}ق_{٢ر}$

الحل

$\because \ ن \ (ن - ١)(ن - ٢) \times .... \times (ن - ر + ١) = ٥٠٤٠$

$\therefore \ {}^{ن}ل_{ر} = ٥٠٤٠$ (١) ، $\because \ {}^{ن}ق_{ر} = ٢١٠$

$\therefore \ \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\lfloor ر} = ٢١٠ \qquad \therefore \ {}^{ن}ل_{ر} = ٢١٠ \ \lfloor ر$ ، بالتعويض من (١) ينتج :

$٥٠٤٠ = ٢١٠ \ \lfloor ر \qquad \therefore \ \lfloor ر = ٢٤ = \lfloor ٤ \qquad \therefore \ ر = ٤$

، بالتعويض فى (١) ينتج : ${}^{ن}ل_{٤} = ٥٠٤٠ = {}^{١٠}ل_{٤} \qquad \therefore \ ن = ١٠$

$\therefore \ {}^{ن + ١}ق_{٢ر} = {}^{١١}ق_{٨} = {}^{١١}ق_{٣} = ١٦٥$

(١٥) إذا كان : ${}^{ن}ق_{٣} = ٢١٠$ ، ${}^{ن}ق_{ر^{٢} + ٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر + ٥}$

أوجد قيمة : ${}^{ن}ق_{٧ر + ٣}$

الحل

$\because \ {}^{ن}ق_{ر} = ٢١٠ = {}^{١٠}ق_{٢} \qquad \therefore \ ن = ١٠$ ، $\because \ {}^{ن}ق_{ر^{٢} + ٢ر} = {}^{ن}ق_{٢ر + ٥}$

$\therefore \ ر^{٢} + ٢ر = ٢ر + ٥ \qquad \therefore \ ر^{٢} = ٥$ مرفوض

أو $ن = ر^{٢} + ٢ر + ٢ر + ٥ \qquad \therefore \ ١٠ = ر^{٢} + ٤ر + ٥$

$\therefore \ ر^{٢} + ٤ر - ٥ = ٠ \qquad \therefore \ (ر + ٥)(ر - ١) = ٠$

$\therefore \ ر = ١$ أو $ر = -٥$ مرفوض $\qquad \therefore \ {}^{ن}ق_{٧ر + ٣} = {}^{١٠}ق_{١٠} = ١$

(١٦) إذا كان : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن - ١}ق_{ر - ١} = ٥ : ٧$ ،

${}^{ن}ل_{ر} : {}^{ن - ١}ل_{ر - ١} = ٥$ أوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحل

∵ $\dfrac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = \dfrac{5}{7}$ ∴ $\dfrac{ن - ر + 1}{ر} = \dfrac{5}{7}$

∴ $7ن - 7ر + 7 = 5ر$ ∴ $7ن - 12ر = -7$ (١)

، ∵ $\dfrac{{}^{ن}ل_{ر}}{{}^{ن}ل_{ر-1}} = 5$ ∴ $\dfrac{ن!}{(ن - ر)!} \times \dfrac{(ن - ر + 1)!}{ن!} = 5$

∴ $\dfrac{(ن - ر + 1)\,(ن - ر)!}{(ن - ر)!} = 5$ ∴ $ن - ر + 1 = 5$

∴ $ن - ر = 4$ (٢) بضرب (٢) × -7 و جمعها مع (١) ينتج :

$ر = 7$ ، بالتعويض فى (١) ينتج : $ن = 11$

(١٧) إذا كان ${}^{ن}ق_{ر} : {}^{ن}ق_{ر-1} : 5\ {}^{ن-1}ق_{ر-2} = 7 : 4 : 6$

فأوجد قيمتى : ن ، ر

الحل

∵ $\dfrac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن}ق_{ر-1}} = \dfrac{7}{4}$ ∴ $\dfrac{ن - ر + 1}{ر} = \dfrac{7}{4}$

∴ $4ن - 4ر + 4 = 7ر$ ∴ $4ن - 11ر = -4$ (١)

، ∵ $\dfrac{{}^{ن}ق_{ر-1}}{5\ {}^{ن-1}ق_{ر-2}} = \dfrac{4}{6}$

∴ $\dfrac{ن!}{(ر - 1)!\,(ن - ر + 1)!} \times \dfrac{(ر - 2)!\,(ن - ر + 1)!}{5\,(ن - 1)!} = \dfrac{2}{3}$

∴ $\dfrac{ن\,(ن - 1)!}{(ر - 1)\,(ر - 2)!} \times \dfrac{(ر - 2)!}{5\,(ن - 1)!} = \dfrac{2}{3}$

∴ $3ن = 10ر - 10$ (٢) بحل (١) ، (٢) ينتج : $ر = 4$ ، $ن = 10$

(١٨) إذا كان لدينا الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فأوجد كم عدداً زوجياً أكبر من ٣٠٠ يمكن تكوينه من هذه الأرقام

(أ) مع الاحلال (التكرار) **(ب)** بدون الاحلال (بدون التكرار)

الحل

∵ العدد أكبر من ٣٠٠ ∴ يمكن أن يتكون العدد من : ٣ أو ٤ أو ٥ خانات ،

∵ العدد زوجى ∴ رقم آحاده يكون : ٢ أو ٤

(أ) التكرار مسموح

∴ عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٢ طريقة فى كل حالة مما يلى :

١) العدد مكون من ٣ خانات :

∵ العدد أكبر من ٣٠٠ ∴ رقم المئات يكون : ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = ٣ طرق ،

، رقم العشرات يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٥ طرق

∴ عدد طرق تكوين العدد = $2 \times 5 \times 3 = 30$ طريقة

٢) العدد مكون من ٤ خانات :

عدد طرق تكوين العدد = $2 \times (5)^3 = 250$ طريقة

حيث : رقم العشرات يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٥ طرق

، رقم المئات يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = ٥ طرق

، رقم آحاد الألوف يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف = ٥ طرق

∴ عدد طرق تكوين العدد = $2 \times 5 \times 5 \times 5 = 250$ طريقة

٣) العدد مكون من ٥ خانات :

عدد طرق تكوين العدد = ٢ × (٥)^{٤} = ١٢٥٠ طريقة

حيث : رقم العشرات يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٥ طرق

، رقم المئات يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = ٥ طرق

، رقم آحاد الألوف يكون : ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف = ٥ طرق

، عدد طرق اختيار رقم عشرات الألوف = ٥ طرق

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٢ × ٥ × ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥٠ طريقة

∴ عدد الطرق المختلفة لتكوين العدد = ٣٠ + ٢٥٠ + ١٢٥ = ١٥٣٠ طريقة

(ب) التكرار غير مسموح

أ) العدد مكون من ٣ خانات و رقم الآحاد يكون : ٢ نجد أن :

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ طريقة

عدد طرق اختيار رقم المئات = ٣ طرق

حيث : رقم المئات يكون : ٣ أو ٤ أو ٥

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٣ طرق

∴ عدد طرق تكوين العدد = ١ × ٣ × ٣ = ٩ طرق

لاحظ الشكل التالى :

	العدد مكون من ٣ خانات									عدد الطرق
الآحاد	٢									١
العشرات	١	٤	٥	١	٣	٥	١	٢	٤	٣
المئات	٣			٤			٥			٣

٢) العدد مكون من ٣ خانات و رقم الآحاد يكون : ٤ نجد أن :

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ١ طريقة

، عدد طرق اختيار رقم المئات = ٢ طريقة

حيث : رقم المئات يكون : ٣ أو ٥

∴ عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٣ طرق

∴ عدد طرق تكوين العدد = ١ × ٣ × ٢ = ٦ طرق

لاحظ الشكل التالى :

	العدد مكون من ٣ خانات						عدد الطرق
الآحاد	٤						١
العشرات	١	٢	٥	١	٢	٣	٢
المئات	٣			٥			٣

٣) العدد مكون من ٤ خانات و رقم الآحاد يكون : ٢ أو ٤

عدد طرق تكوين العدد = ٢ × $^{٤}ل_{٣}$ = ٤٨ طريقة

حيث : عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٤ طريقة

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = ٣ طرق

∴ عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف = ٢ طرق

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٢ × ٤ × ٣ × ٢ = ٤٨ طريقة

٤) العدد مكون من ٥ خانات و رقم الآحاد يكون : ٢ أو ٤

عدد طرق تكوين العدد = ٢ × $^{٤}ل_{٤}$ = ٤٨ طريقة

حيث : عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٢ طريقة

∴ عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٤ طرق

∴ عدد طرق اختيار رقم المئات = ٣ طرق

∴ عدد طرق اختيار رقم آحاد الألوف = ٢ طريقة

∴ عدد طرق اختيار رقم عشرات الألوف = ١ طريقة

∴ عدد طرق تكوين العدد = ٢ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٤٨ طريقة

∴ عدد الطرق المختلفة لتكوين العدد = ٩ + ٦ + ٤٨ + ٤٨ = ١١١ طريقة

(١٩) إذا كان : $|\underline{ن} = ٧٢٠$ ، $^{ن+١}ق_{ر} : {}^{ن+١}ق_{ر-١} = \frac{٣}{٥}$

أوجد قيمة : $^{ن+١}ق_{ر-٢}$

الحل

∵ $|\underline{ن} = ٧٢٠ = |\underline{٦}$ ∴ $ن = ٦$

∴ $\frac{^{٧}ق_{ر}}{^{٧}ق_{ر-١}} = \frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{٧ - ر + ١}{ر} = \frac{٣}{٥}$

∴ $٤٠ - ٥ر = ٣ر$ ∴ $ر = ٥$ ∴ $^{ن+١}ق_{ر-٢} = {}^{٧}ق_{٣} = ٣٥$

(٢٠) إذا كان : $^{ن+٢}ق_{ر+١} = ٩ \times {}^{ن+١}ق_{ر} = ٩٠ \times {}^{ن}ق_{ر-١}$

أوجد قيمة كل من : ن ، ر

الحل

راجع حل المسألة (٢٨) من تمارين (١ – ١) صفحة ١٠ بالكتاب المدرسى

(٢١) إذا كان : $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ر}$ أوجد قيمة : $^{١٢}ق_{٢ر}$

ثم أحسب أقل قيمة لـ ن

الحل

∵ $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times {}^{ن}ق_{ر}$ ∴ $^{ن}ل_{ر} = ١٢٠ \times \frac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}}$

∴ $|\underline{ر} = ١٢٠ = |\underline{٥}$ ∴ $ر = ٥$ ∴ $^{١٢}ق_{٢ر} = {}^{١٢}ق_{١٠} = ٦٦$

، ∵ $ر = ٥$ ∴ أقل قيمة لـ $ن = ٥$

حل اختبار تراكمى صفحة ٣٥ بالكتاب المدرسى
المتعلقة بمبدأ العد – التباديل – التوافيق

(٧) **(أ)** إذا كان : $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$ أوجد قيمة ن

الحل

∵ $^{ن}ق_{٢} + {}^{ن}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$ ∴ $^{ن+١}ق_{٣} = ن^{٢} + ٦ن + ٥$

∴ $\frac{(ن+١)(ن)(ن-١)}{٣ \times ٢ \times ١} = (ن+١)(ن+٥)$

∴ $ن^{٢} - ن = ٦ن + ٣٠$ ∴ $ن^{٢} - ٧ن - ٣٠ = ٠$

∴ $(ن - ١٠)(ن + ٣) = ٠$ ∴ $ن = ١٠$ أ؛ $ن = -٣$ مرفوض

(٩) من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } أوجد كم عدد يمكن تكوينه بحيث يكون أقل من ٤٠٠

أولاً : مع الاحلال (التكرار) ثانياً : بدون الاحلال (بدون التكرار)

الحل

∵ عدد عناصر المجموعة = ٥ " ن = ٥ " ، تكوين الأعداد يلزم الترتيب

أولاً : مع الاحلال (التكرار)

عدد الأعداد المكونة من رقم واحد " ر = ١ " = $(٥)^{١} = ٥$

و عدد الأعداد المكونة من رقم رقمين " ر = ٢ " = $(٥)^{٢} = ٢٥$

و عدد الأعداد المكونة من رقم ثلاثة أرقام = عدد طرق تكوين الآحاد و العشرات " ر = ٢ " × عدد طرق تكوين المئات

$= (٥)^{٢} \times ٣ = ٧٥$

∴ عدد الأعداد = ٥ + ٢٥ + ٧٥ = ١٠٥ عدد

أحمد الشتورى

أولاً : بدون الاحلال (بدون التكرار)

عدد الأعداد المكونة من رقم واحد " ر = ١ " = $\text{ل}^{٥}_{١}$ = ٥

و عدد الأعداد المكونة من رقمين " ر = ٢ " = $\text{ل}^{٥}_{٢}$ = ٢٠

و عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام = عدد طرق تكوين الآحاد و العشرات " ر = ٢ " × عدد طرق تكوين المئات

= $\text{ل}^{٤}_{٢}$ × ٣ = ٣٦

∴ عدد الأعداد = ٥ + ٢٠ + ٣٦ = ٦١ عدد

حل اختبارات الكتاب
مسائل مبدأ العد – التباديل – التوافيق

الاختبار الأول

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\text{ق}^{ن}_{ن-٣}$ = ٢٠ فإن : ن = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٦

الحل

∵ $\text{ق}^{ن}_{ن-٣}$ = ٢٠ ∴ $\text{ق}^{ن}_{٣}$ = ٢٠ ∴ $\text{ل}^{ن}_{٣}$ = ٢٠ |٣

∴ $\text{ل}^{ن}_{٣}$ = ١٢٠ = $\text{ل}^{٦}_{٣}$ ∴ ن = ٦

الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) إذا كان : $\text{ق}^{ن+١}_{٣}$: $\text{ق}^{ن}_{٤}$ = ٢ : ٣ فإن : ن = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٥　　(د) ١١

الحل

∵ $\dfrac{\text{ق}^{ن+١}_{٣}}{\text{ق}^{ن}_{٤}} = \dfrac{٢}{٣}$ ∴ $\dfrac{|ن+١}{|ن-٢\ |٣} \times \dfrac{|ن-٤\ |٤}{|ن} = \dfrac{٢}{٣}$

∴ $\dfrac{(ن+١)\ |ن}{(ن-٢)(ن-٣)\ |ن-٤\ |٣} \times \dfrac{٤\ |ن-٤\ |٣}{|ن} = \dfrac{٢}{٣}$

و منها : (ن – ٢) (ن – ٣) = ٦ (ن + ١)

∴ ن٢ – ٥ ن + ٦ = ٦ ن + ٦ أى : ن٢ – ١١ ن = ٠

∴ ن (ن – ١١) = ٠ و منها : ن = ٠ مرفوض ، ن = ١١

الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\text{ق}^{١٠}_{ر+١}$: $\text{ق}^{١٠}_{ر-١}$ = ٢١ : ١٠

فإن : قيمة ر = ...

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٦

الحل

∵ $\frac{{}^{10}\text{ق}_{\text{ر}+1}}{{}^{10}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \frac{21}{10}$ ∴ $\frac{{}^{10}\text{ق}_{\text{ر}+1}}{{}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}} \times \frac{{}^{10}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{10}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \frac{21}{10}$

∴ $\frac{10-\text{ر}-1+1}{\text{ر}+1} \times \frac{10-\text{ر}+1}{\text{ر}} = \frac{21}{10}$ ∴ $\frac{11-\text{ر}}{\text{ر}} \times \frac{10-\text{ر}}{\text{ر}+1} = \frac{21}{10}$

∴ $21\text{ر}(\text{ر}+1) = 10(11-\text{ر})(10-\text{ر})$

∴ $21\text{ر}^2 + 21\text{ر} = 1100 - 210\text{ر} + 10\text{ر}^2$

∴ $11\text{ر}^2 + 231\text{ر} - 1100 = 0$ ∴ $\text{ر}^2 + 21\text{ر} - 100 = 0$

∴ $(\text{ر}+25)(\text{ر}-4) = 0$ $\text{ر} = -25$ مرفوض ، $\text{ر} = 4$

الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ${}^{2\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ن}-1} = 9\ {}^{2\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٣ (ء) ٤

الحل

∵ $36\ {}^{2\text{ن}-1}\text{ل}_{\text{ن}-1} = 9\ {}^{2\text{ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ ∴ $\frac{4\,(2\text{ن}-1)!}{\text{ن}!} = \frac{(2\text{ن})!}{\text{ن}!}$

∴ $4\,(2\text{ن}-1)! = (2\text{ن})! = 2\text{ن}\,(2\text{ن}-1)!$ و منها : $2\text{ن} = 4$ ∴ $\text{ن} = 2$

الاختبار السادس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_3 : {}^{\text{ن}-1}\text{ق}_4 = 8 : 5$ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (حـ) ٨ (ء) ٩

الحل

∵ $\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_3}{{}^{\text{ن}-1}\text{ق}_4} = \frac{8}{5}$ ∴ $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-3)!\,3!} \times \frac{4!\,(\text{ن}-5)!}{(\text{ن}-1)!} = \frac{8}{5}$

∴ $\frac{\text{ن}\,(\text{ن}-1)!}{(\text{ن}-3)(\text{ن}-4)(\text{ن}-5)!\,3!} \times \frac{4\,(\text{ن}-5)!\,3!}{(\text{ن}-1)!} = \frac{8}{5}$

و منها : $2(\text{ن}-3)(\text{ن}-4) = 5\text{ن}$

∴ $2\text{ن}^2 - 14\text{ن} + 24 = 5\text{ن}$ أى : $2\text{ن}^2 - 19\text{ن} + 24 = 0$

∴ $(2\text{ن}-3)(\text{ن}-8) = 0$ و منها : $\text{ن} = \frac{3}{2}$ مرفوض ، $\text{ن} = 8$

الاختبار السابع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ${}^{30}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{30}\text{ق}_{\text{ر}+10}$ ، ${}^{\text{ن}}\text{ل}_7 = 90\ {}^{\text{ن}-2}\text{ل}_5$

فإن : $(\text{ن}-\text{ر})!$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ١٠ (ء) $20!$

الحل

$\because {}^{30}\text{ق}_{\text{ر}} = {}^{30}\text{ق}_{\text{ر}+10}$ ∴ $\text{ر} + \text{ر} + 10 = 30$ و منها : $\text{ر} = 10$

، $\because {}^{\text{ن}}\text{ل}_{7} = 90\ {}^{\text{ن}-2}\text{ل}_{5}$ ∴ $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-7)!} = \frac{90\,(\text{ن}-2)!}{(\text{ن}-7)!}$ و منها :

$\text{ن}\,(\text{ن}-1)\,(\text{ن}-2)! = 90\,(\text{ن}-2)!$ ∴ $\text{ن}\,(\text{ن}-1) = 90$

∴ ${}^{\text{ن}}\text{ل}_{2} = {}^{10}\text{ل}_{2}$ ∴ $\text{ن} = 10$ ∴ $(\text{ن}-\text{ر})! = 0! = 1$

الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : $(1 + \text{لو}\,\text{س})! = 1$ فإن : $\text{س} = ...$

الحل

$1 + \text{لو}\,\text{س} = 1$ ∴ $\text{لو}\,\text{س} = 0$ ∴ $\text{س} = 1$

أو : $1 + \text{لو}\,\text{س} = 0$ ∴ $\text{لو}\,\text{س} = -1$ ∴ $\text{س} = (10)^{-1} = \frac{1}{10}$

الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى

(١) إذا كان : ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{4} = 360$ ، $(2\text{س} + \text{ص})! = 5040$ فإن :

${}^{\text{ص}}\text{ق}_{2\text{س}} = ...$

الحل

$\because {}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{4} = 360$ ∴ ${}^{\text{س}+\text{ص}}\text{ل}_{4} = {}^{6}\text{ل}_{4}$ ∴ $\text{س} + \text{ص} = 6$ (١)

، $\because (2\text{س} + \text{ص})! = 5050$ ∴ $(2\text{س} + \text{ص})! = 7!$ ∴ $2\text{س} + \text{ص} = 7$ (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج : $\text{س} = 1$ ، بالتعويض فى (١) ينتج : $\text{ص} = 5$

∴ ${}^{\text{ص}}\text{ق}_{2\text{س}} = {}^{5}\text{ق}_{2} = 10$

الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٢) إذا كان : $\text{ن}!$ ، $(\text{ن} - 2)!$ ، $(2 - \text{ن})!$ هى أطوال أضلاع مثلث

فإن : القيمة العددية لمحيط المثلث = ...

الحل

∵ طول الضلع الأول للمثلث = $\text{ن}!$ ∴ $\text{ن} \geq$ صفر

∴ $\text{ن} = \{0 ، 1 ، 2 ، ....\}$ (١)

، ∵ طول الضلع الثانى للمثلث = $(\text{ن} - 2)!$ ∴ $\text{ن} - 2 \geq 0$

∴ $\text{ن} \geq 2$ ∴ $\text{ن} = \{2 ، 3 ، 4 ، ....\}$ (٢)

، ∵ طول الضلع الثانى للمثلث = $(2 - \text{ن})!$ ∴ $2 - \text{ن} \geq 0$

∴ $\text{ن} \leq 2$ ∴ $\text{ن} = \{0 ، 1 ، 2\}$ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ $\text{ن} = 2$

∴ طول الضلع الأول = $2! = 2$

، طول الضلع الثانى = $0! = 1$ ، طول الضلع الثانى = $2\ 0! = 2$

∴ محيط المثلث = $2 + 1 + 2 = 5$ وحدة طول

تم بحمد الله وعونه



المتميز

فى

الرياضيات البحتة

الجبر

الجزء النظرى
و
حلول تمارين
الوحدة الأولى
(الجزء الثانى)

$\tilde{س}_{ر}$	$هـ^{\pi ت}$	$م^{ل}$	ω

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الأولى .... التباديل و التوافيق و نظرية ذات الحدين

١ – ٢ نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

نعلم أن : $(س + أ)^{١} = س + أ$ ،

$(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢ س أ + أ^{٢}$ و يمكن استنتاج :

$(س + أ)^{٣} = (س + أ)(س + أ)^{٢}$

$= س^{٣} + ٣ س^{٢} أ + ٣ س أ^{٢} + أ^{٣}$

$(س + أ)^{٤} = (س + أ)(س + أ)^{٣}$

$= س^{٤} + ٤ س^{٣} أ + ٦ س^{٢} أ^{٢} + ٤ س أ^{٢} + أ^{٣}$

و نلاحظ :

(١) الطرف الأيمن لكل ما سبق مقدار جبرى ذى حدين

(٢) يسمى الطرف الأيسر لكل ما سبق مفكوك الطرف الأيمن

(٣) المفكوك مرتب حسب قوى س التنازلية و حسب قوى أ التصاعدية

أى أن : قوى س تتناقص تدريجياً بمقدار ١ بينما قوى أ تتزايد تدريجياً بمقدار ١

(٤) مجموع قوتى س ، أ فى أى حد يساوى الأس المرفوع إليه المقدار الجبرى بالطرف الأيمن

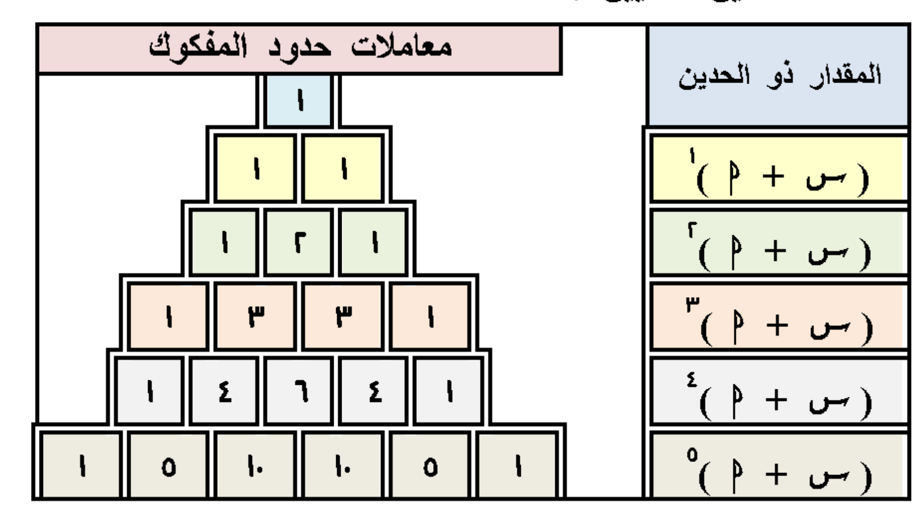
(٥) عدد حدود المفكوك يساوى الأس المرفوع إليه المقدار الجبرى بالطرف الأيمن + ١

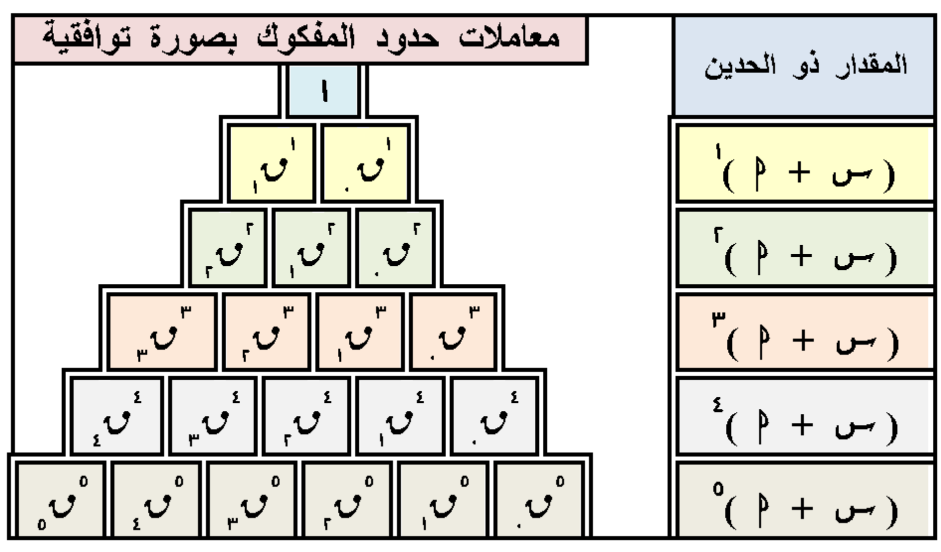
(٦) معاملات حدود المفكوك الأخير هى :

$^{٤}ق_{٠} = ١$ ، $^{٤}ق_{١} = ٤$ ، $^{٤}ق_{٢} = ٦$ ، $^{٤}ق_{٣} = ٤$ ، $^{٤}ق_{٤} = ١$ و كذلك لكل مفكوك

كما أن : هذه المعاملات تتبع نمطاً يمثله مثلث باسكال

لاحظ الشكلين التاليين :





مفكوك ذى الحدين :

إذا كان : ا ، س ∈ ح ، ن ∈ ص+ يكون :

(١) $(س + ا)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\, س^{ن-1}\, ا + {}^{ن}ق_{2}\, س^{ن-2}\, ا^{2} + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر}\, ا^{ر} + ... + ا^{ن}$

(٢) $(س - ا)^{ن} = س^{ن} - {}^{ن}ق_{1}\, س^{ن-1}\, ا + {}^{ن}ق_{2}\, س^{ن-2}\, ا^{2} + {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر}\, (-ا)^{ر} + ... + (-ا)^{ن}$

ملاحظات على مفكوك ذى الحدين $(س \pm ا)^{ن}$:

(١) عدد حدود المفكوك = (ن + ١) حداً

(٢) الحد الأول هو $س^{ن}$ ، و الحد الأخير هو $(\pm ا)^{ن}$ و لكليهما المعامل ١

(٣) المفكوك مرتب حسب قوى س تنازلياً و حسب قوى ا تصاعدياً

(٤) مجموع قوى س و قوى ا فى أى حد = ن أى أن :
فى أى حد يكون : أس س + أس ا = ن

(٥) دليل ق فى أى حد من حدود المفكوك يقل واحداً صحيحاً عن رتبة ذلك الحد فمثلاً :

$$ح_{6} = ح_{5+1} = {}^{ن}ق_{5}\, س^{ن-5}\, (\pm ا)^{5}$$

(٦) فى مفكوك $(س - ا)^{ن}$ تكون : إشارة الحدود الفردية موجبة و إشارة الحدود الزوجية سالبة ، و تكون إشارة الحد الأخير موجبة إذا كانت ن زوجية و سالبة إذا كانت ن فردية

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٥

اكتب مفكوك :

(ا) $(3\,س + ص)^{5}$ (ب) $(س^{2} - 1)^{6}$

الحل

(ا) $(3س + ص)^{5} = (3س)^{5} + {}^{5}ق_{1}(3س)^{4}(ص) + {}^{5}ق_{2}(3س)^{3}(ص)^{2} + {}^{5}ق_{3}(3س)^{2}(ص)^{3} + {}^{5}ق_{4}(3س)(ص)^{4} + (ص)^{5}$

$= 243\,س^{5} + 5\,(81\,س^{4})(ص) + 10\,(27\,س^{3})(ص^{2}) + 10\,(9\,س^{2})(ص^{3}) + 5\,(3\,س)(ص^{4}) + ص^{5}$

$= 243\,س^{5} + 405\,س^{4}\,ص + 2700\,س^{3}\,ص^{2} + 90\,س^{2}\,ص^{3} + 15\,س\,ص^{4} + ص^{5}$

(ب) $(س^{2} - 1)^{6} = (س^{2})^{6} - {}^{6}ق_{1}(س^{2})^{5} + {}^{6}ق_{2}(س^{2})^{4} - {}^{6}ق_{3}(س^{2})^{3} + {}^{6}ق_{4}(س^{2})^{2} - {}^{6}ق_{5}(س^{2}) + 1$

$= س^{12} - 6\,س^{10} + 15\,س^{8} - 20\,س^{6} + 15\,س^{4} - 6\,س^{2} + 1$

حالات خاصة من مفكوك ذى الحدين :

(١) $(1 + س)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_{1}\, س + {}^{ن}ق_{2}\, س^{2} + ... + س^{ن}$

(٢) $(1 - س)^{ن} = 1 - {}^{ن}ق_{1}\, س + {}^{ن}ق_{2}\, س^{2} + ... + (-س)^{ن}$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٥

اكتب مفكوك $(1 - س)^{8}$ ، ثم استخدم ذلك فى ايجاد قيمة عددية

للمقدار : ١ − $^{٨}\text{ق}_{١}$ + $^{٨}\text{ق}_{٢}$ − $^{٨}\text{ق}_{٣}$ + ... + $^{٨}\text{ق}_{٨}$

الحل

$(١ - \text{س})^{٨} = ١ - {}^{٨}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{٨}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} - {}^{٨}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} + {}^{٨}\text{ق}_{٤}\,\text{س}^{٤}$

$- {}^{٨}\text{ق}_{٥}\,\text{س}^{٥} + {}^{٨}\text{ق}_{٦}\,\text{س}^{٦} - {}^{٨}\text{ق}_{٧}\,\text{س}^{٧} + {}^{٨}\text{ق}_{٨}\,\text{س}^{٨}$

و بوضع : س = ١ ينتج :

$١ - {}^{٨}\text{ق}_{١} + {}^{٨}\text{ق}_{٢} - {}^{٨}\text{ق}_{٣} + ... + {}^{٨}\text{ق}_{٨} = \text{صفر}$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٥

أوجد قيمة $(٠,٩٨)^{١٠}$ باستخدام نظرية ذات الحدين مقرباً الجواب لأقرب ثلاثة أرقام عشرية

الحل

$(٠,٩٨)^{١٠} = (١ - ٠,٠٢)^{١٠} = ١ - {}^{١٠}\text{ق}_{١}\,(٠,٠٢) + {}^{١٠}\text{ق}_{٢}\,(٠,٠٢)^{٢}$

$- {}^{١٠}\text{ق}_{٣}\,(٠,٠٢)^{٣} + ...$

$= ١ - ١٠ \times ٠,٠٢ + ٤٥ \times ٠,٠٠٠٤ - ١٢٠ \times ٠,٠٠٠٠٠٨$

+ .... حدود أقل من ٠,٠٠١ $\simeq$ ٠,٨١٧

الحد العام من مفكوك ذات الحدين :

فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{ن}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ص}$

$+ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{ص}^{٢} + ... + \text{ص}^{\text{ن}}$

نلاحظ : $\text{ح}_{٢} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ص}^{١}$ ، $\text{ح}_{٣} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{\text{ن}-٢}\,\text{ص}^{٢}$

و بالمثل يكون : $\text{ح}_{١١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١٠}\,\text{س}^{\text{ن}-١٠}\,\text{ص}^{١٠}$

و بفرض أن الحد العام $\text{ح}_{\text{ر}+١}$ حيث : $٠ \le \text{ر} \le \text{ن}$

، ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... فإن :

$\text{ح}_{\text{ر}+١}$ يمكن كتابته على الصورة :

$$\text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}}\,(\text{ص})^{\text{ر}}$$

أى أن : الحد العام = $^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$ (الحد الأول)$^{\text{ن}-\text{ر}}$ (الحد الثانى)$^{\text{ر}}$

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٦

من مفكوك $(٢\,\text{س} + \frac{١}{٢})^{٧}$ أوجد كل من : $\text{ح}_{٣}$ ، $\text{ح}_{٧}$ حسب قوى س التنازلية ، و إذا كان : $\text{ح}_{٣} = ٣\,\text{ح}_{٧}$ أوجد قيمة : س

الحل

$\text{ح}_{٣} = {}^{٧}\text{ق}_{٢}\,(٢\,\text{س})^{٥}\,(\frac{١}{٢})^{٢} = ٢١ \times ٣٢\,\text{س}^{٥} \times \frac{١}{٤} = ١٦٨\,\text{س}^{٥}$ ،

$\text{ح}_{٧} = {}^{٧}\text{ق}_{٦}\,(٢\,\text{س})\,(\frac{١}{٢})^{٦} = ٧ \times ٢\,\text{س} \times \frac{١}{٦٤} = \frac{٧}{٣٢}\,\text{س}$

، $\because \text{ح}_{٣} = ٣\,\text{ح}_{٧}$　$\therefore ١٦٨\,\text{س}^{٥} = \frac{٧}{٣٢}\,\text{س}$ ، $\because \text{س} \ne ٠$

$\therefore \text{س}^{٤} = \frac{١}{٢٥٦}$　$\therefore \text{س} = \pm \frac{١}{٤}$

ملاحظة :

أى حد من النهاية فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ هو نفس الحد من البداية فى مفكوك $(\text{ص} + \text{س})^{\text{ن}}$ و تكون :

رتبته = عدد حدود المفكوك − ترتيب الحد من النهاية + ١

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٦

فى مفكوك $\left(\text{٢ س} - \frac{١}{\text{٣ س}^{٢}}\right)^{١١}$ أوجد الحد الرابع من النهاية

الحل

الحد الرابع من النهاية في مفكوك $\left(\text{٢ س} - \frac{١}{\text{٣ س}^{٢}}\right)^{١١}$ هو الحد الرابع من البداية في مفكوك $\left(-\frac{١}{\text{٣ س}^{٢}} + \text{٢ س}\right)^{١١}$

$\therefore$ $\text{ح}_{٤}$ من النهاية بالمفكوك $= {}^{١١}\text{ق}_{٣} \left(-\frac{١}{\text{٣ س}^{٢}}\right)^{٨} (\text{٢ س})^{٣} = \frac{٤٤٠}{\text{٢١٨٧ س}^{١٦}}$

حل آخر

رتبة الحد الرابع من النهاية = عدد حدود المفكوك – ترتيب الحد من النهاية + ١

$= ١٢ - ٤ + ١ = ٩$

أى أن : $\text{ح}_{٤}$ من النهاية هو $\text{ح}_{٩}$ من البداية

، $\because$ $\text{ح}_{٩} = {}^{١١}\text{ق}_{٨} (\text{٢ س})^{٣} \left(-\frac{١}{\text{٣ س}^{٢}}\right)^{٨} = \frac{٤٤٠}{\text{٢١٨٧ س}^{١٦}}$

$\therefore$ $\text{ح}_{٤}$ من النهاية بالمفكوك $= \frac{٤٤٠}{\text{٢١٨٧ س}^{١٦}}$

قاعدة :

(١) $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} + (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = ٢(\text{ح}_{١} + \text{ح}_{٣} + \text{ح}_{٥} + ...)$

أى : ضعف الحدود الفردية " من حدود $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ "

(٢) $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}} - (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} = ٢(\text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦} + ...)$

أى : ضعف الحدود الزوجية " من حدود $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ "

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٧

(أ) أوجد فى أبسط صورة : $(١ + \sqrt{\text{س}})^{٥} - (١ - \sqrt{\text{س}})^{٥}$

(ب) أوجد لأقرب ثلاثة أرقام عشرية : $(١{,}٠٣)^{٨} + (٠{,}٩٧)^{٨}$ مستخدماً نظرية ذات الحدين

الحل

(أ) $(١ + \sqrt{\text{س}})^{٥} - (١ - \sqrt{\text{س}})^{٥} = ٢(\text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٤} + \text{ح}_{٦})$

$= ٢[{}^{٥}\text{ق}_{١} (\sqrt{\text{س}}) + {}^{٥}\text{ق}_{٣} (\sqrt{\text{س}})^{٣} + {}^{٥}\text{ق}_{٥} (\sqrt{\text{س}})^{٥}]$

$= ٢(٥\sqrt{\text{س}} + \text{١٠ س}\sqrt{\text{س}} + \text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}})$

$= ١٠\sqrt{\text{س}} + \text{٢٠ س}\sqrt{\text{س}} + \text{٢ س}^{٢}\sqrt{\text{س}}$

(ب) $(١{,}٠٣)^{٨} + (٠{,}٩٧)^{٨} = (١ + ٠{,}٠٣)^{٨} + (١ - ٠{,}٠٣)^{٨}$

$= ٢(\text{ح}_{١} + \text{ح}_{٣} + \text{ح}_{٥} + \text{ح}_{٧} + \text{ح}_{٩})$

$= ٢[١ + {}^{٨}\text{ق}_{٢} (٠{,}٠٣)^{٢} + {}^{٨}\text{ق}_{٤} (٠{,}٠٣)^{٤} + {}^{٨}\text{ق}_{٦} (٠{,}٠٣)^{٦} + {}^{٨}\text{ق}_{٨} (٠{,}٠٣)^{٨}]$

$= ٢(١ + ٢٨ \times ٠{,}٠٠٠٩ + ٧٠ \times ٠{,}٠٠٠٠٠٠٨١ + ...)$

$= ٢(١ + ٠{,}٠٢٥٢ + ٠{,}٠٠٠٠٥٦٧ + ...) \simeq ٢{,}٠٥١$

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ١٧

من مفكوك : $(١ - \text{س})^{٨} + \text{٢٤ س} (١ - \text{س})^{٧} + \text{٢٥٢ س}^{٢} (١ - \text{س})^{٦} + ... + \text{٦٥٦١ س}^{٨}$

أوجد القيمة العددية للحد السادس عندما : س = ٢

الحل

$\because$ $(١ - \text{س})^{٨} + \text{٢٤ س} (١ - \text{س})^{٧} + \text{٢٥٢ س}^{٢} (١ - \text{س})^{٦} + ... + \text{٦٥٦١ س}^{٨}$

$= (١ - \text{س})^{٨} + ٨ (١ - \text{س})^{٧} (\text{٣ س}) + ٢٨ (١ - \text{س})^{٦} (\text{٣ س})^{٢} + ... + (\text{٣ س})^{٨}$

$= (1 - س)^{8} + {}^{8}ق_{1}\,(1 - س)^{7}\,(3\,س) + {}^{8}ق_{2}\,(1 - س)^{6}\,(3\,س)^{2}$

$+ .... + (3\,س)^{8} = [\,(1 - س) + (3\,س)\,]^{8} = (1 + 2\,س)^{8}$

$\therefore ح_{6} = {}^{8}ق_{5}\,(2\,س)^{5}$ ، عندما : $س = 2$ فإن : $ح_{6} = 57344$

إجابة حاول أن تحل (8) صفحة 18

من مفكوك : $(1 + حـ\,س)^{10}$ إذا كان : معامل الحد الثالث يساوى 180 ، و كان : الحد الخامس يساوى 210 أوجد قيمة كل من : حـ ، س حيث : حـ عدد صحيح موجب

الحل

$\because$ $ح_{3}$ معامل $= 180$　　$\therefore 45\,حـ^{2} = 180$

$\therefore حـ^{2} = 4$　　$\therefore حـ = \pm 2$ ،

$\because ح_{5} = 210$　　$\therefore {}^{10}ق_{4}\,(حـ\,س)^{4} = 210$

$\therefore 210\,حـ^{4}\,س^{4} = 210$　　$\therefore 16\,س^{4} = 1$

$\therefore س^{4} = \frac{1}{16}$　　$\therefore س = \pm \frac{1}{2}$

إجابة حاول أن تحل (9) صفحة 8

أوجد معامل $س^{2}$ فى مفكوك : $(1 + س + س^{2})^{5}$

الحل

فى مفكوك : $(1 + (س + س^{2}))^{5}$

$\because ح_{ر-1} = {}^{5}ق_{ر}\,(س + س^{2})^{ر} = {}^{5}ق_{ر}\,س^{ر}\,(1 + س)^{ر}$

، فى مفكوك : $(1 + س)^{ر}$

$ح_{م-1} = {}^{ر}ق_{م}\,س^{م}$ ، $م \le ر$

$\therefore ح_{ر+م-1} = {}^{5}ق_{ر}\,س^{ر} \times {}^{ر}ق_{م}\,س^{م}$ ، $م \le ر \le 5$

و لايجاد معامل $س^{2}$ نضع : $ر + م = 2$

عندما : $ر = 2$ فإن : $م = 0$ ، عندما : $ر = 1$ فإن : $م = 1$

$\therefore$ معامل $س^{2}$ فى المفكوك $= {}^{5}ق_{2} \times {}^{2}ق_{0} + {}^{5}ق_{1} \times {}^{1}ق_{1} = 15$

إجابة حاول أن تحل (10) صفحة 19

برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن :

$$({}^{ن}ق_{0})^{2} + ({}^{ن}ق_{1})^{2} + ({}^{ن}ق_{2})^{2} + ... + ({}^{ن}ق_{ن})^{2} = {}^{2ن}ق_{ن}$$

الحل

$\because (1 + س)^{2ن} = (1 + س)^{ن}\,(1 + س)^{ن}$

$= (1 + س)^{ن}\,(س + 1)^{ن}$

$\therefore {}^{2ن}ق_{0} + {}^{2ن}ق_{1}\,س + {}^{2ن}ق_{2}\,س^{2} + {}^{2ن}ق_{3}\,س^{3} + ...$

$+ {}^{2ن}ق_{ن}\,س^{ن} + ...$

$= ({}^{ن}ق_{0} + {}^{ن}ق_{1}\,س + {}^{ن}ق_{2}\,س^{2} + {}^{ن}ق_{3}\,س^{3} + ... + {}^{ن}ق_{ن}\,س^{ن})$

$({}^{ن}ق_{0}\,س^{ن} + {}^{ن}ق_{1}\,س^{ن-1} + {}^{ن}ق_{2}\,س^{ن-2} + {}^{ن}ق_{2}\,س^{ن-3} +$

$.... + {}^{ن}ق_{ن})$

و يكون معامل $س^{ن}$ فى الطرف الأيمن $= {}^{2ن}ق_{ن}$

، معامل $س^{ن}$ فى الطرف الأيسر =

$({}^{ن}ق_{0})^{2} + ({}^{ن}ق_{1})^{2} + ({}^{ن}ق_{2})^{2} + ... + ({}^{ن}ق_{ن})^{2}$

$\therefore ({}^{ن}ق_{0})^{2} + ({}^{ن}ق_{1})^{2} + ({}^{ن}ق_{2})^{2} + ... + ({}^{ن}ق_{ن})^{2} = {}^{2ن}ق_{ن}$

أحمد الشنتورى

الحد الأوسط فى مفكوك $(س + أ)^ن$:

فى مفكوك $(س + أ)^ن$: عدد حدود المفكوك = ن + ١ حداً

أولاً : إذا كانت ن عدداً زوجياً فإن عدد حدود المفكوك هو عدد فردى

و يوجد حد أوسط وحيد رتبته = $\frac{1}{2}$ (ن + ٢) = $\frac{1}{2}$ ن + ١

ثانياً : إذا كانت ن عدداً فردياً فإن عدد حدود المفكوك هو عدد زوجى

و يوجد حدان أوسطان وحيد رتبتهما هما :

$\frac{1}{2}$ (ن + ١) ، $\frac{1}{2}$ (ن + ٣)

إجابة حاول أن تحل (١١) صفحة ١٩

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك : $(س^2 + \frac{1}{2س})^{10}$

و إذا كانت قيمة هذا الحد = $\frac{28}{27}$ أوجد قيمة س

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{1}{2}$ × ١٠ + ١ = ٦ ∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو $ح_6$

∴ $ح_6 = {}^{10}ق_5 (\frac{1}{2س})^5 (س^2)^5$ = ٢٥٢ × $\frac{1}{32}$ $س^{10 - 5}$ = $\frac{63}{8}$ $س^5$

، ∵ $\frac{63}{8}$ $س^5$ = $\frac{28}{27}$ ∴ $س^5$ = $\frac{32}{243}$ ∴ س = $\frac{2}{3}$

إجابة حاول أن تحل (١٢) صفحة ١٠

إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(٣ س + ٢ ص)^{13}$ متساويين

فأثبت أن : $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{1}{2}$ (١٣ + ١) ، $\frac{1}{2}$ (١٣ + ٣)

أى هما : ٧ ، ٨ ∴ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما $ح_7$ ، $ح_8$

، ∵ $ح_7 = ح_8$ ∴ ${}^{13}ق_6 (٢ ص)^6 (٣ س)^7 = {}^{13}ق_7 (٢ ص)^7 (٣ س)^6$

، ∵ ${}^{13}ق_6 = {}^{13}ق_7$ ∴ $(٢ ص)^6 (٣ س)^7 = (٢ ص)^7 (٣ س)^6$

∴ ٣ س = ٢ ص ∴ $\frac{س}{ص} = \frac{2}{3}$

إجابة حاول أن تحل (١٣) صفحة ٢٠

أوجد الحد الأوسط أو الحدين الأوسطين من مفكوك :

$(٢\sqrt{س} + \frac{1}{2\sqrt{س}})^{10} + (٢\sqrt{س} - \frac{1}{2\sqrt{س}})^{10}$

الحل

∵ المفكوك = ٢ ($ح_1 + ح_3 + ح_5 + ح_7 + ح_9 + ح_{11}$)

∴ عدد حدود المفكوك = ٦ ∴ للمفكوك حدين أوسطين هما : $ح_5$ ، $ح_7$

∴ $ح_5 = {}^{10}ق_4 (\frac{1}{2\sqrt{س}})^4 (٢\sqrt{س})^6 + {}^{10}ق_4 (-\frac{1}{2\sqrt{س}})^4 (٢\sqrt{س})^6$

= ٢ ${}^{10}ق_4 (\frac{1}{2\sqrt{س}})^4 (٢\sqrt{س})^6$ = ١٦٨٠ س

، $ح_7 = {}^{10}ق_6 (\frac{1}{2\sqrt{س}})^6 (٢\sqrt{س})^4 + {}^{10}ق_6 (-\frac{1}{2\sqrt{س}})^6 (٢\sqrt{س})^4$

= ٢ ${}^{10}ق_6 (\frac{1}{2\sqrt{س}})^6 (٢\sqrt{س})^4$ = $\frac{105}{س}$

أحمد الشتوى

حل تمارين (١ – ١) صفحة ١٠ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كانت رتبتا الحدين الأوسطين فى مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هما ٧ ، ٨ فإن : ن = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٥ (حـ) ١٦ (ء) ٥٦

(٢) إذا كان : $١ + ٥ س + \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ٣} س^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + ... + س^{٥} = ١٠٢٤$ فإن : س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ١٠ (ء) ٣

(٣) مجموع معاملات حدود مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س})^{٧}$ يساوى ....

(أ) $٢^{٧}$ (ب) $٢^{٥}$ (حـ) $٢^{٦}$ (ء) صفر

(٤) معامل الحد الخامس من مفكوك $(١ + ٢ س)^{١٠}$ هو ....

(أ) $١٦ \; {}^{١٠}ق_{٥}$ (ب) $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_{٥}$ (حـ) $١٦ \; {}^{١٠}ق_{٤}$ (ء) $\frac{١}{١٦} \; {}^{١٠}ق_{٤}$

(٥) فى مفكوك ذى الحدين إذا كان الحد العام هو ${}^{١٢}ق_{ر} \; س^{٢٤ - ٤ر}$ يكون الحد المشتمل على $س^{١٢}$ هو ....

(أ) $ح_{٣}$ (ب) $ح_{٤}$ (حـ) $ح_{٥}$ (ء) لا يوجد

(٦) إذا كان الحدان الأوسطان من مفكوك $(أ + ٢ ب)^{٢ن + ١}$ متساويين فإن : ....

(أ) $\frac{أ}{ب} = \frac{١}{٢}$ (ب) أ = ٤ ب (حـ) أ = ٨ ب (ء) أ = ٢ ب

(٧) إذا كان الحد الأوسط فى مفكوك $(\frac{٢أ}{٣} + \frac{ب}{أ^{٢}})^{٨ن}$ هو : الحد التاسع فإن : ن = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (حـ) ٣ (ء) ٤

(٨) فى مفكوك $(١ + ب س)^{٩}$ يكون معامل الحد السادس هو ....

(أ) ${}^{٩}ق_{٥}$ (ب) ${}^{٩}ق_{٦}$ (حـ) ${}^{٩}ق_{٥} \; ب^{٥}$ (ء) ${}^{٩}ق_{٦} \; ب^{٦}$

(٩) فى مفكوك ذى الحدين لدينا ٧ حدود موجبة ، ٦ حدود سالبة فإن : المقدار يكون على الصورة ....

(أ) $(أ - ب)^{١٢}$ (ب) $(أ - ب)^{١٣}$ (حـ) $(أ + ب)^{١٢}$ (ء) $(أ + ب)^{١٣}$

الحل

(١) ∵ للمفكوك حدين أوسطين ، و رتبة أصغرهما هى ٧

∴ $٧ = \frac{١}{٢}(ن + ١)$ و منها : ن = ١٣

(٢) ∵ $١ + {}^{٥}ق_{١} س + {}^{٥}ق_{٢} س^{٢} + {}^{٥}ق_{٣} س^{٣} + ... + س^{٥} = ١٠٢٤$

∴ $(١ + س)^{٥} = ٤^{٥}$ ∴ ١ + س = ٤ و منها : س = ٣

(٣) مجموع معاملات حدود المفكوك = $(١ - ١)^{٧}$ = صفر

توضيح :

لإيجاد مجموع معاملات حدود مفكوك ذى حدين نعوض عن كل متغير بالواحد الصحيح

(٤) معامل $ح_{٥} = {}^{١٠}ق_{٤} \times ٢^{٤} = ١٦ \; {}^{١٠}ق_{٤}$

(٥) ∵ الحد يشتمل على $س^{١٢}$ ∴ $س^{٢٤ - ٤ر} = س^{١٢}$ ∴ ٢٤ – ٤ر = ١٢

و منها : ر = ٣ ∴ الحد المشتمل على $س^{١٢}$ هو $ح_{٤}$

(٦) ∵ رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢}(٢ن + ١ + ١)$ ، $\frac{١}{٢}(٢ن + ١ + ٣)$

أحمد الشتوى

أى : ن + ١ ، ن + ٢ ∴ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما : $ح_{ن+١}$ ، $ح_{ن+٢}$

، ∵ $ح_{ن+١} = ح_{ن+٢}$

∴ $ق_{ن}^{٢ن+١}$ $أ^{ن+١}$ $(٢ب)^{ن}$ = $ق_{ن+١}^{٢ن+١}$ $أ^{ن}$ $(٢ب)^{ن+١}$

∴ $ق_{ن}^{٢ن+١}$ $أ^{ن+١}$ $(٢ب)^{ن}$ = $ق_{ن}^{٢ن+١}$ $أ^{ن}$ $(٢ب)^{ن+١}$

∴ $أ^{ن+١}$ $(٢ب)^{ن}$ = $أ^{ن}$ $(٢ب)^{ن+١}$ و منها : أ = ٢ ب

(٧) رتبة الحد الأوسط هى : $\frac{١}{٢}$ × ٨ ن + ١ = ٤ ن + ١

، ∵ الحد الأوسط هو الحد التاسع ∴ ٤ ن + ١ = ٩ و منها : ن = ٢

(٨) معامل الحد السادس فى المفكوك = $ق_{٥}^{٩}$ $ب^{٥}$ مباشرة

(٩) ∵ عدد الحدود = ١٣ ∴ أس المقدار ذى الحدين = ١٢

، ∵ توجد حدود موجبة و أخرى سالبة

∴ المقدار يكون على الصورة : $(أ - ب)^{١٢}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٠) إذا كان : ١ + ٨ س + $ق_{٢}^{٨}$ $س^{٢}$ + ... + $س^{٨}$ = ٢٥٦ أوجد قيمة س

الحل

∵ ١ + $ق_{١}^{٨}$ س + $ق_{٢}^{٨}$ $س^{٢}$ + ... + $س^{٥}$ = ٢٥٦

∴ $(١ + س)^{٨}$ = $٢^{٨}$ ∴ ١ + س = ٢ و منها : س = ١

أ، ١ + س = − ٢ و منها : س = − ٣

(١١) أوجد لأقرب رقم من ألف مستخدماً نظرية ذى الحدين قيمة كل من :

(أ) $(١,٠٠٣)^{٥}$ (ب) $(٠,٩٩٨)^{٧}$

(حـ) $(١,٠١)^{٦}$ + $(٠,٩٩)^{٦}$ (ء) $(١,٠٢)^{٨}$ − $(٠,٩٨)^{٨}$

الحل

(أ) $(١,٠٠٣)^{٥}$ = $(١ + ٠,٠٠٣)^{٥}$ = ١ + $ق_{١}^{٥}$ (٠,٠٠٣) + $ق_{٢}^{٥}$ $(٠,٠٠٣)^{٢}$

+ .... = ١ + ٥ × ٠,٠٠٣ + ١٠ × ٠,٠٠٠٠٠٩

+ .... حدود أقل من ٠,٠٠١ ≃ ١,٠١٥

(ب) $(٠,٩٩٨)^{٧}$ = $(١ - ٠,٠٠٢)^{٧}$ = ١ − $ق_{١}^{٧}$ (٠,٠٠٢) + $ق_{٢}^{٧}$ $(٠,٠٠٢)^{٢}$

+ .... = ١ − ٧ × ٠,٠٠٢ + ٢١ × ٠,٠٠٠٠٠٤

+ .... حدود أقل من ٠,٠٠١ ≃ ٠,٩٥٦

(حـ) $(١,٠١)^{٦}$ + $(٠,٩٩)^{٦}$ = $(١ + ٠,٠١)^{٦}$ + $(١ - ٠,٠١)^{٦}$

= ٢ ($ح_{١}$ + $ح_{٣}$ + $ح_{٥}$ + $ح_{٧}$)

= ٢ [١ + $ق_{٢}^{٦}$ $(٠,٠١)^{٢}$ + $ق_{٤}^{٦}$ $(٠,٠١)^{٤}$ + $ق_{٦}^{٦}$ $(٠,٠١)^{٦}$]

= ٢ (١ + ١٥ × ٠,٠٠٠١ + ١٥ × ٠,٠٠٠٠٠٠٠١ + ...)

= ٢ (١ + ٠,٠٠١٥ + ٠,٠٠٠٠٠٠١٥ + ...) ≃ ٢,٠٠٣

(ء) $(١,٠٢)^{٨}$ − $(٠,٩٨)^{٨}$ = $(١ + ٠,٠٢)^{٨}$ − $(١ - ٠,٠٢)^{٨}$

= ٢ ($ح_{٢}$ + $ح_{٤}$ + $ح_{٦}$ + $ح_{٨}$)

= ٢ [$ق_{١}^{٨}$ (٠,٠٢) + $ق_{٣}^{٨}$ $(٠,٠٢)^{٣}$ + $ق_{٥}^{٨}$ $(٠,٠١)^{٥}$ + $ق_{٧}^{٨}$ $(٠,٠١)^{٧}$]

= ٢ (٨ × ٠,٠٢ + ٥٦ × ٠,٠٠٠٠٠٨ + ...)

= ٢ (٠,١٦ + ٠,٠٠٠٤٤٨ + ...) ≃ ٠,٣٢١

(١٢) أوجد قيمة س التى تحقق :

$(١ + \sqrt{٣})^{٦}$ − $(١ - \sqrt{٣})^{٦}$ = ٤٨٠ $\sqrt{٣}$ س

الحل

∵ $(١ + \sqrt{٣})^{٦}$ − $(١ - \sqrt{٣})^{٦}$ = ٤٨٠ $\sqrt{٣}$ س

∴ $٢(ح_٢ + ح_٤ + ح_٦) = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$

∴ $٢[{}^٦ق_١ \sqrt{٣} + {}^٦ق_٣ (\sqrt{٣})^٣ + {}^٦ق_٥ (\sqrt{٣})^٥] = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$

∴ $٢\sqrt{٣}\,[٦ + ٢٠ × ٣ + ٦ × ٩] = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$

∴ $٢\sqrt{٣} × ١٢٠ = ٤٨٠\sqrt{٣}\,س$ ∴ $س = ٢$

(١٣) باستخدام المفكوك : $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_١ س + {}^{١٠}ق_٢ س^٢ + ... + س^{١٠}$ أثبت أن :

(أ) $١ + {}^{١٠}ق_١ + {}^{١٠}ق_٢ + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠}$

(ب) $١ - {}^{١٠}ق_١ + {}^{١٠}ق_٢ - .... + {}^{١٠}ق_{١٠} =$ صفر

الحل

∵ $(١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_١ س + {}^{١٠}ق_٢ س^٢ + ... + س^{١٠}$

(أ) ∴ بوضع : $س = ٢$ ينتج : $١ + {}^{١٠}ق_١ + {}^{١٠}ق_٢ + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = ٢^{١٠}$

(ب) ∴ بوضع : $س = -١$ ينتج : $١ - {}^{١٠}ق_١ + {}^{١٠}ق_٢ - .... + {}^{١٠}ق_{١٠} =$ صفر

(١٤) أكتب مفكوك كلاً من :

(أ) $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢}\right)^٤$ (ب) $\left(س - \frac{١}{س}\right)^٥$

(حـ) $(س + \sqrt{٢})^٤ + (س - \sqrt{٢})^٤$

(ء) $(\sqrt{٣} + ٢س)^٥ - (\sqrt{٣} - ٢س)^٥$

الحل

(أ) $\left(\frac{٢}{س} + \frac{س}{٢}\right)^٤ = \left(\frac{٢}{س}\right)^٤ + {}^٤ق_١ \left(\frac{٢}{س}\right)^٣\left(\frac{س}{٢}\right) +$

${}^٤ق_٢ \left(\frac{٢}{س}\right)^٢\left(\frac{س}{٢}\right)^٢ + {}^٤ق_٣ \left(\frac{٢}{س}\right)\left(\frac{س}{٢}\right)^٣ + {}^٤ق_٤ \left(\frac{س}{٢}\right)^٤$

$= \frac{١٦}{س^٤} + \frac{١٦}{س^٢} + ١٦ + س^٢ + \frac{س^٤}{١٦}$

(ب) $\left(س - \frac{١}{س}\right)^٥ = س^٥ - {}^٥ق_١ س^٤ \left(\frac{١}{س}\right) + {}^٥ق_٢ س^٣ \left(\frac{١}{س}\right)^٢ -$

${}^٥ق_٣ س^٢ \left(\frac{١}{س}\right)^٣ + {}^٥ق_٤ س \left(\frac{١}{س}\right)^٤ - {}^٥ق_٥ \left(\frac{١}{س}\right)^٥$

$= س^٥ - ٥س^٣ + ١٠س - \frac{١٠}{س} + \frac{٥}{س^٣} - \frac{١}{س^٥}$

(حـ) $(س + \sqrt{٢})^٤ + (س - \sqrt{٢})^٤ = ٢(ح_١ + ح_٣ + ح_٥)$

$= ٢[س^٤ + {}^٤ق_٢ س^٢ (\sqrt{٢})^٢ + {}^٤ق_٤ (\sqrt{٢})^٤]$

$= ٢[س^٤ + ٦س^٢ × ٢ + ٤] = ٢س^٤ + ١٢س^٢ + ٨$

(ء) $(\sqrt{٣} + ٢س)^٥ - (\sqrt{٣} - ٢س)^٥ = ٢(ح_٢ + ح_٤ + ح_٦)$

$= ٢[{}^٥ق_١ (\sqrt{٣})^٤ × ٢س + {}^٥ق_٣ (\sqrt{٣})^٢ (٢س)^٣ +$

${}^٥ق_٥ (٢س)^٥] = ٢[٥ × ٩ × ٢س + ١٠ × ٣ × ٨س^٣$

$+ ٣٢س^٥] = ١٨٠س + ٤٨٠س^٣ + ٦٤س^٥$

(١٥) من مفكوك $(١ + س)^ن$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : $ح_٣ = ٢٨س^٢$ ، $ح_٥ = ١١٢٠$ أوجد قيمة كل من : ن ، س

الحل

∵ $ح_٣ = ٢٨س^٢$ ∴ ${}^نق_٢ س^٢ = ٢٨س^٢$

∴ ${}^نق_٢ = ٢٨ = {}^٨ق_٢$ ∴ $ن = ٨$

، ∵ $ح_٥ = ١١٢٠$ ∴ ${}^٨ق_٤ س^٤ = ١١٢٠$

∴ $٧٠س^٤ = ١١٢٠$ ∴ $س^٤ = ١٦$ ∴ $س = \pm ٢$

(١٦) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان : معامل الحد السادس يساوى معامل الحد العاشر أوجد قيمة : ن

الحل

∵ معامل $ح_{٦}$ = معامل $ح_{١٠}$ ∴ $^{ن}ق_{٥} = ^{ن}ق_{٩}$

∴ إما : ٥ = ٩ " مستحيل " أو ن = ٥ + ٩ = ١٤

(١٧) من مفكوك $(أ\,س + ب)^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان : معامل $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٨}$ أثبت أن : ٢ أ ب = ١

الحل

∵ معامل $ح_{٦} = \frac{٦٣}{٨}$ ∴ $^{١٠}ق_{٥}\, أ^{٥} ب^{٥} = \frac{٦٣}{٨}$ ∴ $٢٥٢\, أ^{٥} ب^{٥} = \frac{٦٣}{٨}$

∴ $أ^{٥} ب^{٥} = \frac{١}{٣٢}$ ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ ٢ أ ب = ١

(١٨) من مفكوك $(٢ س^{٢} + \frac{١}{٢ س})^{١٢}$ أوجد الحد الأوسط

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢} \times ١٢ + ١ = ٧$ ∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو $ح_{٧}$

∴ $ح_{٧} = ^{١٢}ق_{٦} (٢ س^{٢})^{٦} (\frac{١}{٢ س})^{٦} = ٩٢٤ \times س^{١٢ - ٦} = ٩٢٤ س^{٦}$

(١٩) من مفكوك $(\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢}{س})^{١١}$ أوجد الحدين الأوسطين

الحل

∵ رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢}(١١ + ١)$ ، $\frac{١}{٢}(١١ + ٣)$

أى : ٦ ، ٧ ∴ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما : $ح_{٦}$ ، $ح_{٧}$

∴ $ح_{٦} = ^{١١}ق_{٥} (\frac{س^{٢}}{٢})^{٦} (-\frac{٢}{س})^{٥} = -٤٦٢ \times \frac{١}{٢} \times س^{١٢ - ٥} = -٢٣١ س^{٧}$

∴ $ح_{٧} = ^{١١}ق_{٦} (\frac{س^{٢}}{٢})^{٥} (-\frac{٢}{س})^{٦} = ٤٦٢ \times ٢ \times س^{١٠ - ٦} = ٩٢٤ س^{٤}$

(٢٠) من مفكوك $س^{٤} (س - \frac{١}{س})^{٩}$ حسب قوى س التنازلية أوجد الحد الرابع من النهاية

الحل

رتبة الحد الرابع من النهاية = عدد حدود المفكوك – ترتيب الحد من النهاية + ١

= ١٠ – ٤ + ١ = ٧

أى أن : $ح_{٤}$ من النهاية هو $ح_{٧}$ من البداية

، ∵ $ح_{٧} = س^{٤}\, ^{٩}ق_{٦}\, س^{٣} (-\frac{١}{س})^{٦} = ٨٤ س^{٤ + ٣ - ٦} = ٨٤ س$

∴ $ح_{٤}$ من النهاية بالمفكوك = ٨٤ س

(٢١) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{٢ س})^{١٠}$ يساوى $\frac{٢٨}{٢٧}$ فأوجد قيمة س

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢} \times ١٠ + ١ = ٦$ ∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو $ح_{٦}$

∴ $ح_{٦} = ^{١٠}ق_{٥} (\frac{١}{٢ س})^{٥} (س^{٢})^{٥} = ٢٥٢ \times \frac{١}{٣٢} س^{١٠ - ٥} = \frac{٦٣}{٨} س^{٥}$

، ∵ $\frac{٦٣}{٨} س^{٥} = \frac{٢٨}{٢٧}$ ∴ $س^{٥} = \frac{٣٢}{٢٤٣}$ ∴ $س = \frac{٢}{٣}$

(٢٢) أوجد النسبة بين الحد الأوسط و الحد الخامس من مفكوك $(\frac{٢ س}{٣} + \frac{٣}{٢ س})^{١٠}$ ، ثم أوجد القيمة العددية للنسبة عندما س = ٣

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢} \times ١٠ + ١ = ٦$ ∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو $ح_{٦}$

∴ $ح_{٦} = ^{١٠}ق_{٥} (\frac{٢ س}{٣})^{٥} (\frac{٣}{٢ س})^{٥} = ٢٥٢$

، ∵ $ع_{٥} = ق^{١٠}_{٤} \left(\frac{٢س}{٣}\right)^{٦} \left(\frac{٣}{٢س}\right)^{٤} = ٢١٠ \times \frac{٤س^{٢}}{٩} = \frac{٢٨٠س^{٢}}{٣}$

∴ $ع_{٦} : ع_{٥} = ٢٥٢ : \frac{٢٨٠س^{٢}}{٣} = ٢٧ : ١٠س^{٢}$

و عندما : س = ٣ فإن : $ع_{٦} : ع_{٥} = ٢٧ : ٩٠ = ٣ : ١٠$

(٢٣) إذا كانت النسبة بين الحد الخامس من مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ و الحد الرابع من مفكوك $\left(س - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٤}$ تساوى − ١٦ : ١٥ أوجد قيمة س

الحل

الحد الخامس من المفكوك الأول :

$ع_{٥} = ق^{١٥}_{٤} س^{١١} \left(\frac{١}{س}\right)^{٤} = ١٣٦٥ س^{٧}$

الحد الرابع من المفكوك الثانى :

$ع_{٤} = ق^{١٤}_{٣} س^{١١} \left(-\frac{١}{س^{٢}}\right)^{٤} = - ٣٦٤ س^{٥}$

، ∵ $\frac{١٣٦٥ س^{٧}}{- ٣٦٤ س^{٥}} = \frac{- ١٦}{١٥}$

∴ $س^{٢} = \frac{٦٤}{٢٢٥}$ ∴ $س = \pm \frac{٨}{١٥}$

١ − ٣ إيجاد الحد المشتمل على $س^{ك}$ من مفكوك ذات الحدين

فى مفكوك $(س + أ)^{ن}$ لإيجاد الحد المشتمل $س^{ك}$ حيث ك ∈ ط نتبع ما يلى :

[١] نفرض أن : هذا الحد هو الحد العام $ع_{ر+١}$

[٢] نوجد $ع_{ر+١}$ فى أبسط صورة له بدلالة ر

[٣] نساوى أس س الناتج من $ع_{ر+١}$ بالأس المطلوب ك فنحصل على قيمة ر فيكون الحد المشتمل على $س^{ك}$ هو $ع_{ر+١}$

[٤] نعوض بقيمة ر التى حصلنا عليها فى $ع_{ر+١}$ لنحصل على الحد المشتمل على $س^{ك}$

ملاحظات :

(١) إذا كان : ر ∈ ط فإن : $ع_{ر+١}$ هو الحد المطلوب

(٢) إذا كان : ر ∉ ط فإن : لا يوجد حد يحتوى على القوة المطلوبة من المفكوك " لا يوجد حد مشتمل على $س^{ك}$ "

(٣) إذا كان : المطلوب إيجاد الحد الخالى من س نضع : أس س الناتج من $ع_{ر+١}$ مساوياً الصفر لنحصل على قيمة ر

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٢٣

أوجد معامل $س^{٨}$ فى مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} - \frac{٣}{س}\right)^{١٢}$

الحل

$ع_{ر+١} = ق^{١٢}_{ر} \left(\frac{٢س}{٣}\right)^{١٢-ر} \left(-\frac{٣}{س}\right)^{ر}$

$= ق^{١٢}_{ر} (٢)^{١٢-٢ر} (-٣)^{٢ر-١٢} (س)^{١٢-٢ر}$

نضع : $12 - 2ر = 8$ ∴ $ر = 2$ ∴ $ح_3$ يشتمل على $س^8$

∴ معامل $ح_3 = {}^{12}ق_2 \, (2)^8 \, (-3)^{-8}$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٢٣

(أ) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(2س^2 - \frac{1}{س}\right)^{12}$

(ب) أوجد معامل $س^{-10}$ فى مفكوك $\left(\frac{س^2}{3} - \frac{2}{س^2}\right)^{15}$

(ج) من مفكوك $\left(أ س - \frac{1}{ب س}\right)^{10}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع

أثبت أن : $6 أ ب = 5$

الحل

(أ) $ح_{ر+1} = {}^{12}ق_ر \, (2س^2)^{12-ر} \left(-\frac{1}{س}\right)^ر$

$= {}^{12}ق_ر \, (-1)^ر \, (2)^{12-ر} \, (س)^{24-3ر}$

نضع : $24 - 3ر = 0$ ∴ $ر = 8$

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_9$

، $ح_9 = {}^{12}ق_8 \, (-1)^8 \, (2)^4 = 16 \; {}^{12}ق_8$

(ب) $ح_{ر+1} = {}^{15}ق_ر \left(\frac{س^2}{3}\right)^{15-ر} \left(-\frac{2}{س^2}\right)^ر$

$= {}^{15}ق_ر \, (3)^{ر-15} \, (-2)^ر \, (س)^{30-4ر}$

نضع : $30 - 4ر = -10$ ∴ $ر = 10$

∴ الحد المشتمل على $س^{-10}$ هو : $ح_{11}$

، معامل $ح_{11} = {}^{15}ق_{10} \, (3)^{-5} \, (-2)^{10}$

(ج) $ح_{ر+1} = {}^{10}ق_ر \, (أ س)^{10-ر} \left(\frac{1}{ب س}\right)^ر$

$= {}^{10}ق_ر \, (أ)^{10-ر} \, (ب)^{-ر} \, (س)^{10-2ر}$

نضع : $10 - 2ر = 0$ ∴ $ر = 5$

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_6$ ، ∵ $ح_6$ = معامل $ح_7$

∴ ${}^{10}ق_5 \, (أ)^5 \, (ب)^{-5} = {}^{10}ق_6 \, (أ)^4 \, (ب)^{-6}$

∴ $252 أ ب = 210$ ∴ $6 أ ب = 5$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٤

من مفكوك $\left(س^2 - \frac{1}{س}\right)^{3ن}$ أوجد :

(أ) معامل الحد الذى يحتوى على $س^{3ن}$

(ب) إذا كان : $ن = 6$ ، أوجد النسبة بين الحد الذى يشتمل على $س^{3ن}$ و معامل الحد الأوسط

الحل

(أ) $ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \, (س^2)^{3ن-ر} \left(-\frac{1}{س}\right)^ر$

$= {}^{3ن}ق_ر \, (-1)^ر \, (س)^{6ن-3ر}$

نضع : $6ن - 3ر = 3ن$ ∴ $ر = ن$

∴ معامل الحد المشتمل على $س^{3ن} = {}^{3ن}ق_ن$

(ب) ∵ $ن = 6$ ∴ $ر = 6$ ، الحد المشتمل على $س^{3ن}$ هو : $ح_7$

، معامل $ح_7 = {}^{18}ق_6$ ، ∵ رتبة الحد الأوسط $= \frac{1}{2} \times 18 + 1 = 10$

∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو : $ح_{10}$ ، معامل $ح_{10} = {}^{18}ق_9$

، معامل $ح_7$: معامل $ح_{10} = {}^{18}ق_6 : {}^{18}ق_9 = 21 : 55$

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٢٤

أوجد معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(١ + ٣س + ٣س^{٢} + س^{٣})^{٤}$

الحل

∵ $(١ + ٣س + ٣س^{٢} + س^{٣})^{٤} = ((١ + س)^{٣})^{٤} = (١ + س)^{١٢}$

، ∵ رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} \times ١٢ + ١ = ٧$

∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو : $ح_{٧}$ ، معامل $ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦}$

حل تمارين (١ – ٣) صفحة ٢٤ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) معامل الحد المشتمل على $س^{٥}$ فى مفكوك $(١ + ٢س)^{١٠}$ يساوى ....

(أ) ${}^{١٠}ق_{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٦}\,{}^{١١}ق_{٤}$ (ج) $١٦\,{}^{١٠}ق_{٤}$ (د) $٣٢\,{}^{١٠}ق_{٥}$

(٢) فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{١٠}$ يكون الحد الخالى من س هو : ....

(أ) $ح_{٤}$ (ب) $ح_{٥}$ (ج) $ح_{٦}$ (د) لا يوجد حد خال من س

(٣) فى مفكوك $س^{٣}(١ + س)^{٧}$ يكون معامل الحد المشتمل على $س^{٤}$ هو : ....

(أ) ${}^{٧}ق_{٤}$ (ب) ${}^{٧}ق_{٣}$ (ج) ${}^{٧}ق_{١}$ (د) ٢١

(٤) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{٢}{س})^{٦}$ يكون الحد الخالى من س هو الحد ....

(أ) الثالث (ب) الرابع (ج) الخامس (د) لا يوجد حد خال من س

(٥) فى مفكوك $(أس^{٢} + \frac{١}{أ س})^{١١}$ إذا كان معاملا $س^{٤}$ ، $س^{٧}$ متساويين فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) – ١ (ج) ± ١ (د) ± ٢

(٦) إذا كان الحد الخالى من س هو فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{ن}$ هو $ح_{٧}$ فإن : ن = ...

(أ) ٦ (ب) ١٠ (ج) ١٢ (د) ١٨

(٧) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{أ س})^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل $س^{٧}$ فإن : أ = ...

(أ) $\frac{٤}{٥}$ (ب) $-\frac{٤}{٥}$ (ج) $-\frac{٥}{٤}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٨) فى مفكوك $(أس + \frac{١}{ب س})^{١٠}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد الخالى من س يساوى معامل الحد السابع فإن : ....

(أ) $أ ب = \frac{٦}{٥}$ (ب) $أ ب = \frac{٥}{٦}$ (ج) $أ ب = \frac{٣٦}{٢٥}$ (د) $أ ب = \frac{٢٥}{٣٦}$

(٩) الحد الخالى من س فى مفكوك $(٢س + \frac{١}{٢س})^{٨}$ هو : ....

(أ) ٣٥ (ب) ١٤٠ (ج) ٧٠ (د) ٥٦

(١٠) فى مفكوك $(١ + أس)^{٧}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان : معامل $ح_{٥} = ٥٦٠$ فإن : أ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (ج) ± ٢ (د) ± ٤

الحل

(١) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر}\,(٢س)^{١٠-ر}$ نضع : $١٠ - ر = ٤$

∴ $ر = ٦$ ∴ $ح_{٧}$ يشتمل على $س^{٤}$

، معامل $ح_{٧} = {}^{١٠}ق_{٦}\,(٢)^{٤} = ١٦\,{}^{١٠}ق_{٦}$

(٢) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \, (س)^{١٠-ر} \, (\frac{١}{س})^ر = {}^{١٠}ق_ر \, (س)^{١٠-٢ر}$

نضع : $١٠ - ٢ر = ٠$ ∴ $ر = ٥$

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_٦$

(٣) $ح_{ر+١} = س^٣ \times {}^٧ق_ر \, (س)^{٧-ر} = {}^٧ق_ر \, (س)^{١٠-ر}$

نضع : $١٠ - ر = ٤$ ∴ $ر = ٦$ ∴ $ح_٧$ يشتمل على $س^٤$

، معامل $ح_٧ = {}^٧ق_٦ = {}^٧ق_١$

(٤) $ح_{ر+١} = {}^٦ق_ر \, (س^٢)^{٦-ر} \, (\frac{٢}{س})^ر = {}^٦ق_ر \, (٢)^ر \, (س)^{١٢-٣ر}$

نضع : $١٢ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = ٤$

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_٥$ " الحد الخامس "

(٥) $ح_{ر+١} = {}^{١١}ق_ر \, (أس^٢)^{١١-ر} \, (\frac{١}{أس})^ر$

$= {}^{١١}ق_ر \, (أ)^{١١-٢ر} \, (س)^{٢٢-٣ر}$

نضع : $٢٢ - ٣ر = ٤$ ∴ $ر = ٦$

∴ الحد المشتمل على $س^٤$ هو : $ح_٧$

، نضع : $٢٢ - ٣ر = ٧$ ∴ $ر = ٥$

∴ الحد المشتمل على $س^٧$ هو : $ح_٦$

∵ معامل $ح_٧$ = معامل $ح_٦$ ∴ ${}^{١١}ق_٦ \, (أ)^{-١} = {}^{١١}ق_٥ \, أ$

، ∵ ${}^{١١}ق_٦ = {}^{١١}ق_٥$ ∴ $(أ)^{-١} = أ$ و منها : $أ = \pm ١$

(٦) $ح_{ر+١} = {}^نق_ر \, (س)^{ن-ر} \, (\frac{١}{س})^ر = {}^نق_ر \, (س)^{ن-٢ر}$

نضع : $ن - ٢ر = ٠$ ∴ $ن = ٢ر$

، ∵ الحد الخالى من س هو : $ح_٧$ ∴ $ر = ٦$ ∴ $ن = ١٢$

(٧) $ح_{ر+١} = {}^٨ق_ر \, (س^٢)^{٨-ر} \, (\frac{١}{أس})^ر = {}^٨ق_ر \, (أ)^{-ر} \, (س)^{١٦-٣ر}$

نضع : $١٦ - ٣ر = ٧$ ∴ $ر = ٣$

∴ الحد المشتمل على $س^٧$ هو : $ح_٤$

، ∵ رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢} \times ٨ + ١ = ٥$

∴ الحد الأوسط فى المفكوك هو $ح_٥$ ، ∵ معامل $ح_٤$ = معامل $ح_٥$

∴ ${}^٨ق_٣ \, (أ)^{-٢} = {}^٨ق_٤ \, (أ)^{-٣}$ ∴ $٥٦ \, أ = ٧٠$ ∴ $أ = \frac{٥}{٤}$

(٨) $ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر \, (أس)^{١٠-ر} \, (\frac{١}{ب \, س})^ر$

$= {}^{١٠}ق_ر \, (أ)^{١٠-ر} \, (ب)^{-ر} \, (س)^{١٠-٢ر}$

نضع : $١٠ - ٢ر = ٠$ ∴ $ر = ٥$

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_٦$ ، ∵ $ح_٦$ = معامل $ح_٧$

∴ ${}^{١٠}ق_٥ \, (أ)^٥ \, (ب)^{-٥} = {}^{١٠}ق_٦ \, (أ)^٤ \, (ب)^{-٦}$

∴ $٢٥٢ \, أ \, ب = ٢١٠$ ∴ $أ \, ب = \frac{٥}{٦}$

(٩) $ح_{ر+١} = {}^٨ق_ر \, (٢س)^{٨-ر} \, (\frac{١}{٢س})^ر$

$= {}^٨ق_ر \, (٢)^{٨-٢ر} \, (س)^{٨-٢ر}$

نضع : $٨ - ٢ر = ٠$ ∴ $ن = ٤$

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_٥$ ، $ح_٥ = {}^٨ق_٤ = ٧٠$

(١٠) ∵ معامل $ح_٥ = ٥٦٠$ ∴ ${}^٧ق_٤ \, أ^٤ = ٥٦٠$

∴ $٣٥ \, أ^٤ = ٥٦٠$ ∴ $أ^٤ = ١٦$ ∴ $أ = \pm ٢$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) فى مفكوك $\left(4\text{س}^2 + \frac{1}{2\text{س}}\right)^{12}$ أوجد الحد الخالى من س

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \left(4\text{س}^2\right)^{12-\text{ر}} \left(\frac{1}{2\text{س}}\right)^{\text{ر}}$

$= {}^{12}\text{ق}_{\text{ر}} \left(2\right)^{24-3\text{ر}} \left(\text{س}\right)^{24-3\text{ر}}$

نضع : $24 - 3\text{ر} = 0$ ∴ $\text{ر} = 8$

∴ الحد الخالى من س هو : ح_9 ، $\text{ح}_9 = {}^{12}\text{ق}_8 = 495$

(١٢) أوجد معامل س^{12} فى مفكوك $\text{س}^2 \left(\frac{\text{س}^2}{2} + \frac{2}{\text{س}^3}\right)^{15}$

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = \text{س}^2 \times {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}} \left(\frac{\text{س}^2}{2}\right)^{15-\text{ر}} \left(\frac{2}{\text{س}^3}\right)^{\text{ر}}$

$= {}^{15}\text{ق}_{\text{ر}} \left(2\right)^{2\text{ر}-15} \left(\text{س}\right)^{32-5\text{ر}}$

نضع : $32 - 5\text{ر} = 12$ ∴ $\text{ر} = 4$

∴ الحد المشتمل على س^{12} هو : ح_5 ، $\text{ح}_5 = {}^{15}\text{ق}_4 \left(2\right)^{-7} = \frac{1365}{128}$

(١٣) إذا كان الحد السادس فى مفكوك $\left(2\text{س} - \frac{1}{\text{س}^3}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية خالياً من س ، أوجد قيمة ن ، ثم أبحث هل أحد حدود هذا المفكوك يشتمل على س^{-6} أم لا ؟

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \left(2\text{س}\right)^{\text{ن}-\text{ر}} \left(-\frac{1}{\text{س}^3}\right)^{\text{ر}}$

$= {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} \left(-1\right)^{\text{ر}} \left(2\right)^{\text{ن}-\text{ر}} \left(\text{س}\right)^{\text{ن}-4\text{ر}}$

، ∵ الحد الخالى من س هو : ح_6 ∴ $\text{ر} = 5$

∴ نضع : $\text{ن} - 20 = 0$ ∴ $\text{ن} = 20$

، نضع : $20 - 4\text{ر} = -6$ ∴ $\text{ر} = \frac{26}{4} \notin \text{ص}_+$

∴ لا يوجد حد يشتمل على س^{-6} بالمفكوك

(١٤) فى مفكوك $\left(2\text{س} - \frac{1}{\text{س}^2}\right)^9$

أولاً : أوجد معامل س^3 ثانياً : أوجد الحد الخالى من س

ثالثاً : أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد يشتمل على س^2

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}} \left(2\text{س}\right)^{9-\text{ر}} \left(-\frac{1}{\text{س}^2}\right)^{\text{ر}}$

$= {}^{9}\text{ق}_{\text{ر}} \left(-1\right)^{\text{ر}} \left(2\right)^{9-\text{ر}} \left(\text{س}\right)^{9-3\text{ر}}$

أولاً : نضع : $9 - 3\text{ر} = 3$ ∴ $\text{ر} = 2$

∴ الحد المشتمل على س^3 هو : ح_3 ،

معامل $\text{ح}_3 = {}^{9}\text{ق}_2 \left(-1\right)^2 \left(2\right)^7 = 4608$

ثانياً : نضع : $9 - 3\text{ر} = 0$ ∴ $\text{ر} = 3$

∴ الحد الخالى من س هو : ح_4 ، $\text{ح}_4 = {}^{9}\text{ق}_3 \left(-1\right)^3 \left(2\right)^6 = -5376$

ثالثاً : نضع : $9 - 3\text{ر} = 2$ ∴ $\text{ر} = \frac{7}{3} \notin \text{ص}_+$

∴ لا يوجد حد يشتمل على س^2 بالمفكوك

(١٥) أثبت أن : ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} : {}^{\text{ن}-1}\text{ق}_{\text{ر}-1} = \frac{\text{ن}}{\text{ر}}$ و إذا كانت النسبة بين معامل ح_{11} فى مفكوك $\left(1 + \text{س}^2\right)^{\text{ن}}$ و معامل ح_{10} فى مفكوك $\left(1 - \text{ص}\right)^{\text{ن}-1}$ تساوى $-3 : 2$ أوجد قيمة ن

الحل

$$\frac{{}^{ن}ق_{ر}}{{}^{ن-١}ق_{ر-١}} = \frac{ن!}{ر!\,(ن-ر)!} \times \frac{(ر-١)!\,(ن-ر)!}{(ن-١)!}$$

$$= \frac{ن\,(ن-١)!}{ر\,(ر-١)!} \times \frac{(ر-١)!}{(ن-١)!} = \frac{ن}{ر}$$

في مفكوك $(١ + س^{٢})^{ن}$: معامل $ح_{١١} = {}^{ن}ق_{١٠}$ ،

في مفكوك $(١ - ص)^{ن-٣}$: معامل $ح_{١٠} = - {}^{ن-١}ق_{٩}$

$\therefore - \frac{{}^{ن}ق_{١٠}}{{}^{ن-١}ق_{٩}} = - \frac{٣}{٢}$ $\therefore \frac{ن}{١٠} = \frac{٣}{٢}$ $\therefore ر = ١٥$

(١٦) أوجد معامل $(\frac{س}{ص})^{٤}$ في مفكوك $(\frac{٢س}{ص} + \frac{ص}{٢س})^{١٠}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_{ر} (\frac{٢س}{ص})^{١٠-ر} (\frac{ص}{٢س})^{ر}$

$= {}^{١٠}ق_{ر} (٢)^{١٠-٢ر} (\frac{س}{ص})^{١٠-٢ر}$

نضع : $١٠ - ٢ر = ٤$ $\therefore ر = ٣$

$\therefore$ الحد المشتمل على $(\frac{س}{ص})^{٤}$ هو : $ح_{٤}$ ، $ح_{٤} = {}^{١٠}ق_{٣} (٢)^{٤} = ١٩٢٠$

(١٧) أوجد معامل $س^{ن}$ في مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$ ثم أثبت أنه يساوى ضعف معامل $س^{ن}$ في مفكوك $(١ + س)^{٢ن-١}$

الحل

في مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$: $ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} س^{ر}$

$\therefore$ معامل $س^{ن} = {}^{٢ن}ق_{ن}$

، في مفكوك $(١ + س)^{٢ن-١}$: $ح_{ر+١} = {}^{٢ن-١}ق_{ر} س^{ر}$

$\therefore$ معامل $س^{ن} = {}^{٢ن-١}ق_{ن}$

، $\because \frac{{}^{٢ن}ق_{ن}}{{}^{٢ن-١}ق_{ن}} = \frac{٢ن!}{ن!\,ن!} = \frac{٢ن\,(٢ن-١)!}{ن\,(ن-١)!\,ن!} = ٢$ $\therefore {}^{٢ن}ق_{ن} = ٢\,{}^{٢ن-١}ق_{ن}$

$\therefore$ معامل $س^{ن}$ في مفكوك $(١ + س)^{٢ن}$

$= ٢$ معامل $س^{ن}$ في مفكوك $(١ + س)^{٢ن-١}$

(١٨) في مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ أثبت أن الحد الخالى من س هو الحد الأوسط ، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما : $ن = ٨$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} (س)^{٢ن-ر} (\frac{١}{س})^{ر} = {}^{٢ن}ق_{ر} (س)^{٢ن-٢ر}$

نضع : $٢ن - ٢ر = ٠$ $\therefore ر = ن$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو : $ح_{ن+١}$

، $\because$ رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} \times ٢ن + ١ = ن$

$\therefore$ الحد الأوسط في المفكوك هو : $ح_{ن+١}$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو الحد الأوسط ، عندما : $ن = ٨$

$\therefore$ الحد الخالى من س = الحد الأوسط $= ح_{٩} = {}^{١٦}ق_{٨}$

(١٩) في مفكوك $(س^{ك} + \frac{١}{س})^{٦}$ حيث : ك عدد صحيح موجب أوجد :

أولاً : قيمة ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س

ثانياً : النسبة بين الحد الخالى من س و معامل الحد الأوسط لأكبر قيمة من قيم ك التى حصلت عليها أولاً

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} (س^{ك})^{٦-ر} (\frac{١}{س})^{ر} = {}^{٦}ق_{ر} (س)^{٦ك - رك - ر}$

نضع : ٦ ك − ك ر − ر = ٠ ∴ ك (٦ − ر) = ر

∴ ك = $\frac{ر}{٦ - ر}$ ∴ ر < ٦ ، ∵ ر ∈ $ص^+$ ∴ ك ∈ $ص^+$

∴ عندما : ر = ١ ∴ ك = $\frac{١}{٥}$ مرفوض ، عندما : ر = ٢ ∴ ك = $\frac{١}{٢}$ مرفوض

، عندما : ر = ٣ ∴ ك = ١ ، عندما : ر = ٤ ∴ ك = ٢

، عندما : ر = ٥ ∴ ك = ٥

∴ قيم ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س هى : ١ ، ٢ ، ٥

، عندما : ك = ٥ " أكبر قيم ك " ∴ الحد الخالى من س هو : $ح_٦$

، رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢}$ × ٦ + ١ = ٤

∴ $ح_٦$: معامل $ح_٤$ = $^٦ق_٥$: $^٦ق_٣$ = ٦ : ٢٠ = ٣ : ١٠

(٢٠) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{أ س})^{١٢}$ إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س و معامل $س^٣$ من هذا المفكوك تساوى ٥ : ١٦ أوجد قيمة أ ثم أوجد قيمة الحد الأوسط عندما : س = ٢

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_ر (س^٢)^{١٢ - ر} (\frac{١}{أ س})^ر = {}^{١٢}ق_ر (أ)^{- ر} (س)^{٢٤ - ٣ر}$

نضع : ٢٤ − ٣ر = ٠ ∴ ر = ٨

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_٩$ ، $ح_٩ = {}^{١٢}ق_٨ (أ)^{-٨}$

، نضع : ٢٤ − ٣ر = ٣ ∴ ر = ٧

∴ الحد المشتمل على $س^٣$ هو : $ح_٨$ ، معامل $ح_٨ = {}^{١٢}ق_٧ (أ)^{-٧}$

، ∵ $ح_٩$: معامل $ح_٨$ = ٥ : ١٦

∴ $^{١٢}ق_٨ (أ)^{-٨}$: $^{١٢}ق_٧ (أ)^{-٧}$ = ٥ : ١٦

∴ ٤٩٥ : ٧٩٢ أ = ٥ : ١٦ و منها : أ = ٢

، رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ + ١ = ٧ ∴ الحد الأوسط هو : $ح_٧$

∴ $ح_٧ = {}^{١٢}ق_٦ (٢)^{-٦} (س)^٦$ ، عندما : س = ٢

∴ $ح_٧ = {}^{١٢}ق_٦ (٢)^{-٦} (٢)^٦ = {}^{١٢}ق_٦ = ٩٢٤$

(٢١) فى مفكوك $(٢ س^٢ + \frac{أ}{س^٣})^{١٠}$ إذا كان معامل $س^٥$ يساوى معامل $س^{١٥}$ أوجد قيمة أ

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٠}ق_ر (٢ س^٢)^{١٠ - ر} (\frac{أ}{س^٣})^ر$

$= {}^{١٠}ق_ر (٢)^{١٠ - ر} (أ)^ر (س)^{٢٠ - ٥ر}$

نضع : ٢٠ − ٥ر = ٥ ∴ ر = ٣

∴ الحد المشتمل على $س^٥$ هو : $ح_٤$

، نضع : ٢٠ − ٥ر = ١٥ ∴ ر = ١

∴ الحد المشتمل على $س^{١٥}$ هو : $ح_٢$

، ∵ معامل $ح_٤$: معامل $ح_٢$ ∴ $^{١٠}ق_٣ (٢)^٧ (أ)^٣ = {}^{١٠}ق_١ (٢)^٩ (أ)$

∴ ١٢٠ × ١٢٨ $أ^٢$ = ١٠ × ٥١٢ ∴ أ = ± $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٢٢) فى مفكوك $(س^٢ + \frac{١}{٨ س})^{١٣}$ حسب قوى س التنازلية

أولاً : أثبت أنه لا يوجد حد خال من س

ثانياً : إذا كان : $ح_٤ = ح_{١١}$ أوجد قيمة س

الحل

أولاً : $ح_{ر+١} = {}^{١٣}ق_ر (س^٢)^{١٣ - ر} (\frac{١}{٨ س})^ر$

$= {}^{١٣}ق_ر (٨)^{- ر} (س)^{٢٦ - ٣ر}$

نضع : $٢٦ - ٣ر = ٠$ $\therefore$ $ر = \frac{٢٦}{٣} \notin ص_{+}$

$\therefore$ لا يوجد حد خال من س بالمفكوك

ثانياً : $\because$ $ح_{٤} : ح_{١١}$ $\therefore$ ${}^{١٣}ق_{٣} (٨)^{-٣} (س)^{١٧} = {}^{١٣}ق_{١٠} (٨)^{-١٠} (س)^{-٤}$

$\therefore (س)^{٢١} = (٨)^{-٧} = (٢)^{-٢١}$ $\therefore$ $س = \frac{١}{٢}$

(٢٣) فى مفكوك $\left(س + \frac{١}{س^{٢}}\right)^{٩}$ أوجد

أولاً : رتبة و قيمة الحد الخالى من س

ثانياً : قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين فى المفكوك يساوى صفر

الحل

أولاً : $ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (س)^{٩-ر} \left(\frac{١}{س^{٢}}\right)^{ر} = {}^{٩}ق_{ر} (س)^{٩-٣ر}$

نضع : $٩ - ٣ر = ٠$ $\therefore$ $ر = ٣$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو : $ح_{٤}$ ، $ح_{٤} = {}^{٩}ق_{٣} = ٨٤$

أولاً : رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢}(٩+١)$ ، $\frac{١}{٢}(٩+٣)$

أى : ٥ ، ٦ $\therefore$ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما : $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

، $\because$ $ح_{٥} + ح_{٦} = ٠$ $\therefore$ $ح_{٥} = - ح_{٦}$

$\therefore {}^{٩}ق_{٤} (س)^{-٣} = - {}^{٩}ق_{٤} (س)^{-٦}$ $\therefore$ $س^{٣} = -١$ $\therefore$ $س = -١$

(٢٤) أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك $\left(٩س^{٢} + \frac{١}{٣س}\right)^{٩}$

ثم أوجد قيمة س التى تجعل مجموع الحدين الأوسطين متساويين

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (٩س^{٢})^{٩-ر} \left(\frac{١}{٣س}\right)^{ر}$

$= {}^{٩}ق_{ر} (٣)^{١٨-٣ر} (س)^{١٨-٣ر}$

نضع : $١٨ - ٣ر = ٠$ $\therefore$ $ر = ٦$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو : $ح_{٧}$ ، $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} = ٨٤$

$\because$ رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢}(٩+١)$ ، $\frac{١}{٢}(٩+٣)$

أى : ٥ ، ٦ $\therefore$ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما : $ح_{٥}$ ، $ح_{٦}$

، $\because$ $ح_{٥} = ح_{٦}$ $\therefore$ ${}^{٩}ق_{٤} (٣)^{٦} (س)^{٦} = {}^{٩}ق_{٥} (٣)^{٣} (س)^{٣}$

$\therefore$ $س^{٣} = \frac{١}{٢٧}$ $\therefore$ $س = \frac{١}{٣}$

(٢٥) فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{٣ن}$ أثبت أن الحد الخالى من س يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن}$ ، و إذا كان : $ن = ٦$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س و معامل الحد الأوسط

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} (س^{٢})^{٣ن-ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} = {}^{٣ن}ق_{ر} (س)^{٦ن-٣ر}$

نضع : $٦ن - ٣ر = ٠$ $\therefore$ $ر = ٢ن$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو : $ح_{٢ن+١}$ ، $ح_{٢ن+١} = {}^{٣ن}ق_{ن}$

، نضع : $٦ن - ٣ر = ٣ن$ $\therefore$ $ر = ن$

$\therefore$ الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن}$ هو : $ح_{ن+١}$

، معامل $ح_{ن+١} = {}^{٣ن}ق_{٢ن} = {}^{٣ن}ق_{ن}$

$\therefore$ الحد الخالى من س = معامل الحد الذى يحتوى على $س^{٣ن}$

، عندما : $ن = ٦$ $\therefore$ رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} \times ١٨ + ١ = ١٠$

$\therefore$ الحد الأوسط هو : $ح_{١٠}$ ، الحد الخالى من س هو : $ح_{١٣}$

$\therefore$ $ح_{١٣}$: معامل $ح_{١٠} = {}^{١٨}ق_{٦} : {}^{١٨}ق_{٩} = ٢١ : ٥٥$

١ – ٣ النسبة بين حدين متتاليين من مفكوك ذات الحدين

من مفكوك $(\text{س} + \text{أ})^{\text{ن}}$ و بفرض أن :

$\text{ح}_{\text{ر}+1}$ ، $\text{ح}_{\text{ر}}$ حدين متتاليين فإن :

$$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}}\,(\text{أ})^{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}\,(\text{س})^{\text{ن}-\text{ر}+1}\,(\text{أ})^{\text{ر}-1}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

و يكون : $\dfrac{\text{معامل ح}_{\text{ر}+1}}{\text{معامل ح}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \dfrac{\text{معامل أ}}{\text{معامل س}}$

لاحظ الفرق بين :

$$\frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \quad ، \quad \frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + 1}{\text{ر}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}}$$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٢٨

من مفكوك $\left(\text{س}^2 + \frac{2}{\text{س}}\right)^8$

أولاً : أوجد النسبة بين الحدين الخامس و السادس ، و إذا كانت هذه النسبة تساوى ٨ : ٢٥ أوجد قيمة س

ثانياً : أثبت أن هذا المفكوك لا يحتوى على حد خال من س

الحل

أولاً : $\dfrac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} = \dfrac{8 - 5 + 1}{5} \times \dfrac{2}{\text{س}^3} = \dfrac{8}{5\,\text{س}^3}$

$\because \dfrac{8}{5\,\text{س}^3} = \dfrac{25}{8} \quad \therefore \text{س}^3 = \dfrac{64}{125} \quad \therefore \text{س} = \dfrac{4}{5}$

ثانياً : $\text{ح}_{\text{ر}+1} = {}^{8}\text{ق}_{\text{ر}}\,(\text{س}^2)^{8-\text{ر}}\left(\frac{2}{\text{س}}\right)^{\text{ر}}$

$= {}^{8}\text{ق}_{\text{ر}}\,(2)^{\text{ر}}\,(\text{س})^{16 - 3\text{ر}}$

نضع : $16 - 3\text{ر} = 0 \quad \therefore \text{ر} = \frac{16}{3} \notin \text{ص}^+$

$\therefore$ لا يوجد حد خال من س بالمفكوك

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٢٨

من مفكوك $\left(\text{س}\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\text{س}}\right)^8$ إذا كان : ح_4 ، ح_5 ، $25\,\text{ح}_7$: ح_6 متناسبة أوجد قيمة س

الحل

$\because \text{ح}_4$ ، ح_5 ، $25\,\text{ح}_7$: ح_6 متناسبة $\quad \therefore \dfrac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4} = \dfrac{1}{25} \times \dfrac{\text{ح}_6}{\text{ح}_7}$

$\therefore \dfrac{8 - 4 + 1}{4} \times \dfrac{1}{\text{س}\sqrt{\text{س}}} = \dfrac{1}{25} \times \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}}}{1}$

$\therefore 8\,\text{س}^3 = 125 \quad \therefore \text{س} = \dfrac{5}{2}$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٨

إذا كانت الحدود : الثالث ، الرابع ، الخامس من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ هى على الترتيب : ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠ أوجد قيم كل من : ن ، س ، ص

الحل

$\because \dfrac{\text{ح}_4}{\text{ح}_3} = \dfrac{448}{112} = \dfrac{4}{1} \quad \therefore \dfrac{\text{ن} - 3 + 1}{3} \times \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{4}{1}$

$\therefore \text{ص}\,(\text{ن} - 2) = 12\,\text{س} \qquad (1)$

$\because$ ، $\dfrac{\text{ح}_5}{\text{ح}_4} = \dfrac{1120}{448} = \dfrac{5}{2} \quad \therefore \dfrac{\text{ن} - 4 + 1}{4} \times \dfrac{\text{ص}}{\text{س}} = \dfrac{5}{2}$

$\therefore$ ص (ن − ٣) = ١٠ س (٢) بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج :

$\frac{\text{ن} - ٢}{\text{ن} - ٣} = \frac{٦}{٥}$ ∴ ٦ن − ١٨ = ٥ن − ١٠ ∴ ن = ٨

بالتعويض فى (١) ينتج : ٥ ص = ١٠ س ∴ ص = ٢ س (٣)

، ∵ $\text{ح}_٣ = ١١٢$ ∴ $\text{ق}^{٨}_{٢}\ \text{س}^{٦}\ \text{ص}^{٢} = ١١٢$ ، بالتعويض من (٣) ينتج :

∴ $٢٨\ \text{س}^{٦} \times ٤\ \text{س}^{٢} = ١١٢$ ∴ $\text{س}^{٨} = ١$ ∴ س = ± ١

، بالتعويض فى (٣) ينتج : ص = ± ٢

حل تمارين (١ − ٣) صفحة ٢٤ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{١٠}$ الحد التاسع : الحد الثامن تساوى ....

(أ) $\frac{٣\ \text{ص}}{٨\ \text{س}}$ (ب) $\frac{٣\ \text{س}}{٨\ \text{ص}}$ (جـ) $\frac{٨\ \text{ص}}{٣\ \text{س}}$ (د) $\frac{٨\ \text{س}}{٣\ \text{ص}}$

(٢) فى مفكوك $(١ - \text{س})^{١٢}$

معامل الحد السادس : معامل الحد الخامس = ...

(أ) $\frac{٨}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) $-\frac{٨}{٥}$ (د) $-\frac{٥}{٨}$

(٣) من مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{٨}$ تكون نسبة $\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٧}$ = ...

(أ) $\frac{٢٥\ \text{ص}^٢}{١٦\ \text{س}^٢}$ (ب) $\frac{٢٥\ \text{س}^٢}{١٦\ \text{ص}^٢}$ (جـ) ١ (د) $\frac{\text{ص}^٢}{\text{س}^٢}$

(٤) فى مفكوك $(٣\text{أ} - ٢\text{ب})^{١١}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين

على الترتيب تساوى $-\frac{٣}{٢}$ فإن أ : ب = ...

(أ) ٩ : ٤ (ب) ٤ : ٩ (جـ) ١ (د) − ١

الحل

(١) $\frac{\text{ح}_٩}{\text{ح}_٨} = \frac{١٠ - ٨ + ١}{٨} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٣\ \text{ص}}{٨\ \text{س}}$

(٢) $\frac{\text{معامل ح}_٦}{\text{معامل ح}_٥} = \frac{١٢ - ٥ + ١}{٥} \times -\frac{١}{١} = -\frac{٨}{٥}$

(٣) $\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٤} = \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٥} \times \frac{\text{ح}_٥}{\text{ح}_٤} = \frac{٨ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{٨ - ٤ + ١}{٤} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}^٢}{\text{س}^٢}$

(٤) رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{١}{٢}$ (١١ + ١) ، $\frac{١}{٢}$ (١١ + ٣)

أى : ٦ ، ٧ ∴ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما : $\text{ح}_٦$ ، $\text{ح}_٧$

، ∵ $\frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٦} = -\frac{٣}{٢}$ ∴ $\frac{١١ - ٦ + ١}{٦} \times -\frac{٢\ \text{ب}}{٣\ \text{أ}} = -\frac{٣}{٢}$

∴ ٤ ب = ٩ أ ∴ أ : ب = ٤ : ٩

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٥) فى مفكوك $(٢\ \text{س}^٢ + \frac{٣}{\text{س}^٢})^{١١}$ أوجد كلاً من :

(أ) $\frac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢}$ (ب) $\frac{\text{ح}_٤}{\text{ح}_٥}$ (جـ) $\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٨}$ (د) $\frac{\text{معامل ح}_٤}{\text{معامل ح}_٦}$

الحل

(أ) $\frac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢} = \frac{١١ - ٢ + ١}{٢} \times \frac{٣}{٢\ \text{س}^٤} = \frac{١٥}{٢\ \text{س}^٤}$

(ب) $\frac{\text{ح}_٤}{\text{ح}_٥} = \frac{٤}{١١ - ٤ + ١} \times \frac{٢\ \text{س}^٤}{٣} = \frac{\text{س}^٤}{٣}$

(جـ) $\frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٨} = \frac{\text{ح}_٦}{\text{ح}_٧} \times \frac{\text{ح}_٧}{\text{ح}_٨} = \frac{٦}{١١ - ٦ + ١} \times \frac{٢\ \text{س}^٤}{٣} \times \frac{٧}{١١ - ٧ + ١} \times \frac{٢\ \text{س}^٤}{٣}$

$= \frac{٢٨}{٤٥}\ \text{س}^٨$

(٥) $\frac{\text{معامل } ح_٤}{\text{معامل } ح_٦} = \frac{\text{معامل } ح_٤}{\text{معامل } ح_٥} \times \frac{\text{معامل } ح_٥}{\text{معامل } ح_٦} = \frac{٤}{١١ - ٤ + ١} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{١١ - ٥ + ١} \times \frac{٢}{٣}$

$= \frac{١٠}{٦٣}$

(٦) فى مفكوك $(١ + س)^{١٢}$ إذا كان : $ح_٣ = ٢\, ح_٢$ أوجد قيمة س

الحل

$\because ح_٣ = ٢\, ح_٢ \qquad \therefore \frac{ح_٣}{ح_٢} = ٢ \qquad \therefore \frac{١٢ - ٢ + ١}{٢} \times س = ٢$

$\therefore س = \frac{٤}{١١}$

(٧) فى مفكوك $(أ + ب)^ن$ إذا كان : $ح_٢ = ٢٤٠$ ، $ح_٣ = ٧٢٠$ ، $ح_٤ = ١٠٨٠$ فأوجد قيمة كلاً من : أ ، ب ، ن

الحل

$\because \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٧٢٠}{٢٤٠} = \frac{٣}{١} \qquad \therefore \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ب}{أ} = \frac{٣}{١}$

$\therefore ب\,(ن - ١) = ٦\, أ$ (١)

، $\because \frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{١٠٨٠}{٧٢٠} = \frac{٣}{٢} \qquad \therefore \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ب}{أ} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore ب\,(ن - ٢) = \frac{٩}{٢}\, أ$ (٢) بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج :

$\frac{ن - ١}{ن - ٢} = \frac{٤}{٣} \qquad \therefore ٤ن - ٨ = ٣ن - ٣ \qquad \therefore ن = ٥$

بالتعويض فى (١) ينتج : $٤\, ب = ٦\, أ \qquad \therefore ب = \frac{٣}{٢}\, أ$ (٣)

، $\because ح_٢ = ٢٤٠ \qquad \therefore {}^{٥}ق_{١}\, أ^{٤}\, ب = ٢٤٠$ ، بالتعويض من (٣) ينتج :

$\therefore ٥\, أ^{٤} \times \frac{٣}{٢}\, أ = ٢٤٠ \qquad \therefore أ^{٥} = ٣٢ \qquad \therefore أ = ٢$

، بالتعويض فى (٣) ينتج : ب = ٣

(٨) إذا كانت النسبة $ح_٢ : ح_٣$ من مفكوك $(أ + ب)^ن$ تساوى النسبة $ح_٣ : ح_٤$ من مفكوك $(أ + ب)^{ن + ٣}$ فأوجد قيمة ن

الحل

من مفكوك $(أ + ب)^ن$: $\frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{ب}{أ}$

، من مفكوك $(أ + ب)^{ن + ٣}$: $\frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{(ن + ٣) - ٣ + ١}{٣} \times \frac{ب}{أ}$

$\therefore \frac{ن - ١}{٢} \times \frac{ب}{أ} = \frac{ن + ١}{٣} \times \frac{ب}{أ}$

$\therefore ٣ن - ٣ = ٢ن + ٢ \qquad \therefore ن = ٥$

(٩) فى مفكوك $(١ + م\, س)^ن$ إذا كان : $٤\, ح_٦ = ٧\, ح_٨$ ، $\frac{ح_٤}{ح_٦} = \frac{١}{٤}$ و ذلك عندما : س = ١ فأوجد قيمة كل من : م ، ن

الحل

$\because ٤\, ح_٦ = ٧\, ح_٨ \qquad \therefore \frac{ح_٨}{ح_٦} = \frac{٤}{٧} \qquad \therefore \frac{ح_٨}{ح_٧} \times \frac{ح_٧}{ح_٦} = \frac{٤}{٧}$

$\therefore \frac{ن - ٧ + ١}{٧} \times م\, س \times \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times م\, س = \frac{٤}{٧}$

$\therefore (ن - ٦)\,(ن - ٥)\, م^{٢}\, س^{٢} = ٢٤$ (١)

، $\because \frac{ح_٤}{ح_٦} = \frac{١}{٤} \qquad \therefore \frac{ح_٦}{ح_٤} = \frac{٤}{١} \qquad \therefore \frac{ح_٦}{ح_٥} \times \frac{ح_٥}{ح_٤} = \frac{١}{٤}$

$\therefore \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times م\, س \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times م\, س = \frac{٤}{١}$

$\therefore (ن - ٤)\,(ن - ٣)\, م^{٢}\, س^{٢} = ٨٠$ (٢) بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج :

$١٠\,(ن - ٦)\,(ن - ٥) = ٣\,(ن - ٤)\,(ن - ٣)$

$\therefore ١٠\, ن^{٢} - ١١٠\, ن + ٣٠٠ = ٣\, ن^{٢} - ٢١\, ن + ٣٦$

أحمد الشتوى

$\therefore (٧ن - ٣٣)(ن - ٨) = ٠$ $\therefore ن = \frac{٣٣}{٧}$ مرفوض ، $ن = ٨$

(١٠) أوجد أكبر حد فى مفكوك $(٣ - ٥س)^{١٥}$ عندما : $س = \frac{١}{٥}$

الحل

$\because \frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{١٥ - ر + ١}{ر} \times \frac{٥س}{٣} = \frac{١٦ - ر}{ر} \times \frac{٥س}{٣}$

، عندما : $س = \frac{١}{٥}$ فإن : $\frac{١٦ - ر}{ر} \times \frac{٥}{٣} \times \frac{١}{٥} = \frac{١٦ - ر}{ر} \times \frac{١}{٣}$

أولاً : $\frac{١٦ - ر}{ر} \times \frac{١}{٣} > ١$

$\therefore ١٦ - ر > ٣ر$ $\therefore ٤ر < ١٦$ $\therefore ر < ٤$

$\therefore ح_١ < ح_٢ < ح_٣ < ح_٤$ (١)

ثانياً : $\frac{١٦ - ر}{ر} \times \frac{١}{٣} < ١$

$\therefore ١٦ - ر < ٣ر$ $\therefore ٤ر > ١٦$ $\therefore ر > ٤$

$\therefore ح_٥ > ح_٦ > ح_٧ > .... > ح_{١٦}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $ح_٤$ ، $ح_٥$ متساويان و كل منهما أكبر حد فى المفكوك

، و كل منهما له أكبر قيمة عددية فى المفكوك

ثالثاً : $\frac{١٦ - ر}{ر} \times \frac{١}{٣} = ١$

$\therefore ١٦ - ر = ٣ر$ $\therefore ٤ر = ١٦$ $\therefore ر = ٤ \in ص^+$

$\therefore ح_٤$ ، $ح_٥$ متساويان و كل منهما أكبر حد فى المفكوك

، و كل منهما له أكبر قيمة عددية فى المفكوك

توضيح :

خطوات إيجاد أكبر حد فى المفكوك $(أس \pm ب)^ن$:

[١] نوجد : $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = \frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ب}{أ}$

[٢] نوجد : $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} > ١$ و منها نجد أن : $ر < م$

[٣] نوجد : $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} < ١$ و منها نجد أن : $ر > م$

[٤] نوجد : $\frac{ح_{ر+١}}{ح_ر} = ١$ و منها نجد أن : $ر = م$

حيث : $م = \frac{ن ب + ب}{أ + ب}$ و توجد حالتان :

(١) إذا كان : م عدداً صحيحاً موجباً

فإن : $ح_م$ ، $ح_{م+١}$ متساويان و كل منهما أكبر حد فى المفكوك

، و كل منهما له أكبر قيمة عددية فى المفكوك

(٢) إذا كان : م عدداً غير صحيح موجب

و كان : ل هو أكبر عدد صحيح يحقق العلاقة : $ر \le م$

فإن : $ح_{ل+١}$ هو أكبر حد فى المفكوك و له أكبر قيمة عددية فى المفكوك

حالة خاصة : فى مفكوك $(١ \pm س)^ن$:

(١) إذا كان : $(ن + ١)$ عدداً فردياً

فإن : أكبر معامل فى المفكوك هو معامل الحد الأوسط $= {}^{ن}ق_{\frac{١}{٢}ن}$

(٢) إذا كان : $(ن + ١)$ عدداً زوجياً

فإن : معاملى الحدان الأوسطان متساويين و هما أكبر معامل فى المفكوك

$= {}^{ن}ق_{\frac{١}{٢}(ن - ١)}$ أو ${}^{ن}ق_{\frac{١}{٢}(ن + ١)}$

(١١) فى مفكوك $(\text{س} + \text{ص})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان :
الحد الثانى وسط حسابى بين الحد الأول و الحد الثالث عندما :
س = ٢ ص فأوجد قيمة ن

الحـــل

$\because$ $\text{ح}_{٢}$ وسط حسابى بين $\text{ح}_{١}$ ، $\text{ح}_{٣}$ $\therefore$ $٢\,\text{ح}_{٢} = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٣}$

بالقسمة على $\text{ح}_{٢}$ ينتج : $٢ = \frac{\text{ح}_{١}}{\text{ح}_{٢}} + \frac{\text{ح}_{٣}}{\text{ح}_{٢}}$

$\therefore ٢ = \frac{١}{\text{ن} - ١ + ١} \times \frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ن} - ٢ + ١}{٢} \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، عندما : س = ٢ ص

$\therefore ٢ = \frac{٢}{\text{ن}} + \frac{\text{ن} - ١}{٤}$ بالضرب × ٤ ن ينتج :

$٨\,\text{ن} = ٨ + \text{ن}^{٢} - \text{ن}$ $\therefore \text{ن}^{٢} - ٩\,\text{ن} + ٨ = ٠$

$\therefore (\text{ن} - ٨)(\text{ن} - ١) = ٠$ $\therefore \text{ن} = ١$ مرفوض ، ن = ٨

اجابة أسئلة التمارين العامة و الاختبارات المتعلقة بنظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

حل تمارين عامة صفحة ٣١ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٩) من مفكوك $(١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + \text{أ}_{١}\text{س} + \text{أ}_{٢}\text{س}^{٢} + \text{أ}_{٣}\text{س}^{٣} + \text{أ}_{٤}\text{س}^{٤} + ... + \text{أ}_{١٠}\text{س}^{١٠}$ إذا كان : $\frac{\text{أ}_{٢} + \text{أ}_{٣}}{\text{أ}_{٢}} = ٣$

فإن : ن = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (حـ) ٨ (ء) ٩

(١٠) إذا كان : $١ + \frac{٥}{٢}\text{س} + \frac{٥ \times ٤}{\underline{|٢}\,٤}\text{س}^{٢} + \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{\underline{|٢}\,٨}\text{س}^{٣} + ... + \frac{١}{٣٢}\text{س}^{٥} = ١٠٢٤$ فإن : س = ...

(أ) ٥ (ب) ٤ (حـ) ٦ (ء) ٨

(١١) من مفكوك $(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب})^{٢\text{ن} + ١}$ إذا كان الحدان الأوسطان متساويين عند س = ٢ فإن : ....

(أ) أ = ٢ ب (ب) ب = ٢ أ (حـ) أ ب = ٢ (ء) أ ب = $\frac{١}{٢}$

الحـــل

(٩) $\because (١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + \text{أ}_{١}\text{س} + \text{أ}_{٢}\text{س}^{٢} + \text{أ}_{٣}\text{س}^{٣} + \text{أ}_{٤}\text{س}^{٤} + ... + \text{أ}_{١٠}\text{س}^{١٠}$

، $\because (١ + \text{س})^{\text{ن}} = ١ + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{١}\,\text{س} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٢}\,\text{س}^{٢} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٣}\,\text{س}^{٣} + ... +$

، بمقارنة معاملات س ، $\text{س}^{٢}$ ، $\text{س}^{٣}$ ينتج :

$أ_1 = {}^{ن}ق_1$ ، $أ_2 = {}^{ن}ق_2$ ، $أ_3 = {}^{ن}ق_3$

$\therefore أ_2 + أ_3 = {}^{ن}ق_2 + {}^{ن}ق_3 = {}^{ن+1}ق_3 \quad \therefore \frac{{}^{ن+1}ق_3}{{}^{ن}ق_2} = 3$

$\therefore \frac{(ن+1)\underline{|ن}}{3\underline{|2}} \times \frac{\underline{|2}}{\underline{|ن}} = 3 \quad \therefore ن + 1 = 9 \quad \therefore ن = 8$

(١٠) $1 + {}^{5}ق_1 (\frac{1}{2} س) + {}^{5}ق_2 (\frac{1}{2} س)^2 + {}^{5}ق_3 (\frac{1}{2} س)^3 + ... + (\frac{1}{2} س)^5 = (2)^{10} \quad \therefore (1 + \frac{1}{2} س)^5 = (2)^{10}$

$\therefore 1 + \frac{1}{2} س = 2$ و منها : $س = 6$

أ؛ $1 + \frac{1}{2} س = -2$ و منها : $س = -6$

(١١) رتبتا الحدان الأوسطان هما : $\frac{1}{2}(2ن + 1 + 1)$ ، $\frac{1}{2}(2ن + 1 + 3)$

أى : $ن + 1$ ، $ر + 2$

∴ الحدان الأوسطان فى المفكوك هما : $ح_{ن+1}$ ، $ح_{ر+2}$

$\therefore ح_{ن+1} = {}^{2ن+1}ق_{ن+1} (أ س)^{ن+1} (ب)^{ن}$

، $ح_{ن+2} = {}^{2ن+1}ق_{ن} (أ س)^{ن} (ب)^{ن+1}$

، $\because ح_{ن+1} = ح_{ن+2}$ عند $س = 2$

$\therefore {}^{2ن+1}ق_{ن+1} (2أ)^{ن+1} (ب)^{ن} = {}^{2ن+1}ق_{ن} (2أ)^{ن} (ب)^{ن+1}$

، $\because {}^{2ن+1}ق_{ن+1} = {}^{2ن+1}ق_{ن} \quad \therefore ب = 2أ$

ثانياً : أجب عما يأتى :

(٢٢) أثبت أن : ${}^{ن}ق_1 + (2 \times {}^{ن}ق_2) + (3 \times {}^{ن}ق_3) + (4 \times {}^{ن}ق_4) + ... + (ن \times {}^{ن}ق_ن) = ن \times 2^{ن-1}$

الحل

الطرف الأيمن $= ن + 2 \times \frac{ن(ن-1)}{2 \times 1} + 3 \times \frac{ن(ن-1)(ن-2)}{3 \times 2 \times 1} + ... + ن$

$= ن \left(1 + \frac{ن-1}{1} + \frac{(ن-1)(ن-2)}{2 \times 1} + ... + 1 \right)$

$= ن \left(1 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + ... + {}^{ن-1}ق_{ن-1} \right)$ (١)

، $\because (1 + س)^{ن-1} = 1 + {}^{ن-1}ق_1 س + {}^{ن-1}ق_2 س^2 + ... + {}^{ن-1}ق_{ن-1} س^{ن}$ ، بوضع : $س = 1$ ينتج :

$2^{ن-1} = 1 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + ... + {}^{ن-1}ق_{ن-1}$

، بالضرب × ن ينتج :

$ن \times 2^{ن-1} = ن \left(1 + {}^{ن-1}ق_1 + {}^{ن-1}ق_2 + ... + {}^{ن-1}ق_{ن-1} \right)$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج :

${}^{ن}ق_1 + (2 \times {}^{ن}ق_2) + (3 \times {}^{ن}ق_3) + (4 \times {}^{ن}ق_4) + ... + (ن \times {}^{ن}ق_ن) = ن \times 2^{ن-1}$

حل آخر

$\because (1 + س)^{ن} = 1 + {}^{ن}ق_1 س + {}^{ن}ق_2 س^2 + ... + {}^{ن}ق_ن س^{ن}$

بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :

$ن (1 + س)^{ن-1} \times 1 = {}^{ن}ق_1 + 2 \, {}^{ن}ق_2 س + 3 \, {}^{ن}ق_3 س^2 + ... + ن \, {}^{ن}ق_ن س^{ن-1}$ ، بوضع : $س = 1$ ينتج :

$ن \times 2^{ن-1} = {}^{ن}ق_1 + 2 \, {}^{ن}ق_2 + 3 \, {}^{ن}ق_3 + ... + ن \, {}^{ن}ق_ن$

(٢٣) إذا كان : $(1 + س)^{10} = 1 + {}^{10}ق_1 س + {}^{10}ق_2 س^2 + ... + {}^{10}ق_{10} س^{10}$ استخدم ذلك فى ايجاد :

(أ) $١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}$

(ب) $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - .... + {}^{١٠}ق_{١٠}$

(جـ) $١ + ٣ \times {}^{١٠}ق_{١} + ٩ \times {}^{١٠}ق_{٢} + ٢٧ \times {}^{١٠}ق_{٣} + ... + (٣)^{١٠}$

الحل

(أ) $\because (١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}\, س + {}^{١٠}ق_{٢}\, س^{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}\, س^{١٠}$

بوضع : س = ١ ينتج :

$١ + {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠} = (٢)^{١٠} = ١٠٢٤$

(ب) $\because (١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}\, س + {}^{١٠}ق_{٢}\, س^{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}\, س^{١٠}$

بوضع : س = −١ ينتج : $١ - {}^{١٠}ق_{١} + {}^{١٠}ق_{٢} - .... + {}^{١٠}ق_{١٠} =$ صفر

(جـ) $\because (١ + س)^{١٠} = ١ + {}^{١٠}ق_{١}\, س + {}^{١٠}ق_{٢}\, س^{٢} + ... + {}^{١٠}ق_{١٠}\, س^{١٠}$

بوضع : س = ٣ ينتج :

$١ + {}^{١٠}ق_{١} \times ٣ + {}^{١٠}ق_{٢} \times ٩ + ... + (٣)^{١٠} = (٤)^{١٠}$

(٢٤) في مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{ن}$ إذا كان معامل الحد الرابع يساوى معامل الحد الثالث عشر فأوجد قيمة ن ثم أوجد رتبة و قيمة الحد الخالى من س

الحل

$\because$ معامل $ح_{٤} =$ معامل $ح_{١٣}$ $\therefore {}^{ن}ق_{٣} = {}^{ن}ق_{١٢}$ $\therefore ن = ١٥$

، $\because ح_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر}\, (س^{٢})^{١٥ - ر} (\frac{١}{س})^{ر} = {}^{١٥}ق_{ر}\, (س)^{٣٠ - ٣ر}$

نضع : $٣٠ - ٣ر = ٠$ $\therefore ر = ١٠$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو : $ح_{١١}$ ، $ح_{١١} = {}^{١٥}ق_{١٠} = ٣٠٠٣$

(٢٥) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان : $(ح_{٣})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٥}$

أوجد قيمة : ن عندما : $س = \frac{٩}{٥}$

الحل

$\because (ح_{٣})^{٢} = ح_{٢} \times ح_{٥}$ $\therefore \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{ح_{٥}}{ح_{٣}}$ $\therefore \frac{ح_{٣}}{ح_{٢}} = \frac{ح_{٥}}{ح_{٤}} \times \frac{ح_{٤}}{ح_{٣}}$

$\therefore \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times س = \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times س \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times س$

$\therefore ٦(ن - ١) = (ن - ٣)(ن - ٢)\, س$ ، عندما : $س = \frac{٩}{٥}$

$\therefore ١٠ن - ١٠ = ٣ن^{٢} - ١٥ن + ١٨$

$\therefore ٣ن^{٢} - ٢٥ن + ٢٨ = ٠$ $\therefore (٣ن - ٤)(ن - ٧) = ٠$

$\therefore ن = ٧$ أ، $ن = \frac{٤}{٣}$ مرفوض

(٢٦) في مفكوك $(١ + س)^{ن}$ إذا كان معامل $ح_{١٠}$ هو الوسط الحسابى بين معامل $ح_{٩}$ ، معامل $ح_{١١}$ أوجد كلاً من :

(أ) ن　　(ب) ${}^{ن}ل_{٣}$　　(جـ) $\underline{ن - ١٩|}$

الحل

(أ) $\because$ معامل $ح_{١٠}$ هو الوسط الحسابى بين معامل $ح_{٩}$ ، معامل $ح_{١١}$

$\therefore$ معامل $ح_{٩}$ + معامل $ح_{١١}$ = ٢ بين معامل $ح_{١٠}$

$\therefore \frac{\text{معامل } ح_{٩}}{\text{معامل } ح_{١٠}} + \frac{\text{معامل } ح_{١١}}{\text{معامل } ح_{١٠}} = ٢$ $\therefore \frac{٩}{ن - ٩ + ١} + \frac{ن - ١٠ + ١}{١٠} = ٢$

$\therefore \frac{٩}{ن - ٨} + \frac{ن - ٩}{١٠} = ٢$ بالضرب $\times ١٠(ن - ٨)$ ينتج :

$٩٠ + ن^{٢} - ١٧ ن + ٧٢ = ٢٠ ن - ١٦٠$

$\therefore ن^{٢} - ٣٧ ن + ٣٢٢ = ٠ \qquad \therefore (ن - ٢٣)(ن - ١٤) = ٠$

$\therefore ن = ٢٣$ أ، $ن = ١٤$

(ب) عندما : $ن = ٢٣$ فإن : $^{ن}ل_{٣} = {}^{٢٣}ل_{٣} = ١٠٦٢٦$

عندما : $ن = ١٤$ فإن : $^{ن}ل_{٣} = {}^{١٤}ل_{٣} = ٢١٨٤$

(جـ) عندما : $ن = ٢٣$ فإن : $\lfloor ن - ١٩ = \lfloor ٤ = ٢٤$

عندما : $ن = ١٤$ فإن : $\lfloor ن - ١٩$ مرفوض

(٢٧) من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان $ح_{٨} : ح_{٧} : ح_{٦} = ٦ : ١٤ : ٢١$ أوجد قيمة كل من : ن ، س

الحل

$\because \frac{ح_{٨}}{ح_{٧}} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٣}{٧} \qquad \therefore \frac{ن - ٧ + ١}{٧} \times س = \frac{٣}{٧}$

$\therefore س (ن - ٦) = ٣ \qquad (١)$

، $\because \frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٤}{٢١} = \frac{٢}{٣} \qquad \therefore \frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times س = \frac{٢}{٣}$

$\therefore س (ن - ٥) = ٤ \qquad (٢)$ بقسمة (٢) ÷ (١) ينتج :

$\frac{ن - ٥}{ن - ٦} = \frac{٤}{٣} \qquad \therefore ٤ ن - ٢٤ = ٣ ن - ١٥ \qquad \therefore ن = ٩$

بالتعويض فى (١) ينتج : $٣ س = ٣ \qquad \therefore س = ١$

(٢٨) إذا كانت النسبة بين معاملات ثلاثة حدود متتالية من مفكوك $(س + \frac{ك}{س^{٢}})^{٢٧}$ كنسبة ١٥ : ٦ : ٢ حيث $ك \in ص_{+}$ فأوجد رتب هذه الحدود ثم أوجد رتبة و قيمة الحد الخالى من س فى هذا المفكوك

الحل

بفرض أن : الحدود هى $ح_{ر}$ ، $ح_{ر+١}$ ، $ح_{ر+٢}$

$\therefore \frac{معامل\ ح_{ر+١}}{معامل\ ح_{ر}} = \frac{٦}{١٥} = \frac{٢}{٥} \qquad \therefore \frac{٢٧ - ر + ١}{ر} \times ك = \frac{٢}{٥}$

$\therefore ٥ ك (٢٨ - ر) = ٢ ر \qquad (١)$

، $\frac{معامل\ ح_{ر+٢}}{معامل\ ح_{ر+١}} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣} \qquad \therefore \frac{٢٧ - (ر + ١) + ١}{ر + ١} \times ك = \frac{١}{٣}$

$\therefore ٣ ك (٢٧ - ر) = (ر + ١) \qquad (٢)$

بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج :

$٥ (٢٨ - ر) (ر + ١) = ٦ ر (٢٧ - ر)$

$\therefore ١٤٠ - ١٣٥ ر - ٥ ر^{٢} = ١٦٢ ر - ٦ ر^{٢}$

$\therefore ر^{٢} - ٢٧ ر + ١٤٠ = ٠ \qquad \therefore (ر - ٢٠)(ر - ٧) = ٠$

$\therefore ر = ٢٠$ أ، $ر = ٧$ بالتعويض فى (١) ينتج :

$ك = ١$ أ، $ك = \frac{٢}{١٥}$ مرفوض لأن : $ك \in ص_{+}$

$\therefore$ الحدود هى : $ح_{٢٠}$ ، $ح_{٢١}$ ، $ح_{٢٢}$

، $\because ح_{ر+١} = {}^{٢٧}ق_{ر} (س)^{٢٧ - ر} (\frac{١}{س^{٢}})^{ر} = {}^{٢٧}ق_{ر} (س)^{٢٧ - ٣ ر}$

نضع : $٢٧ - ٣ ر = ٠ \qquad \therefore ر = ٩$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو : $ح_{١٠}$ ، $ح_{١٠} = {}^{٢٧}ق_{٩} = ٤٦٨٦٨٢٥$

(٢٩) فى مفكوك $(١ + م س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحدان الثانى و الثالث هما على الترتيب $- \frac{١٠}{٣} س$ ، $٥ س^{٢}$

أوجد قيمة : م ، ن ثم أحسب قيمة الحد الأوسط من هذا المفكوك عندما : $س = ٣$

الحل

∵ $ع_{٢} = -\frac{١٠}{٣} س$ ∴ $^{ن}ق_{١}\, م\, س = -\frac{١٠}{٣} س$

∴ $ن\, م = -\frac{١٠}{٣}$ (١) ، ∵ $ع_{٣} = ٥ س^{٢}$

∴ $^{ن}ق_{٢}\, م^{٢} س^{٢} = ٥ س^{٢}$ ∴ $\frac{١}{٢} ن (ن - ١) م^{٢} = ٥$

∴ $ن^{٢} م^{٢} - ن\, م^{٢} = ١٠$ بالتعويض من (١) و الاختصار ينتج :

$م = -\frac{١}{٣}$ بالتعويض فى (١) ينتج : $ن = ١٠$

، رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} × ١٠ + ١ = ٦$

∴ الحد الأوسط من المفكوك هو : $ع_{٦}$ ، $ع_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}\, م^{٥} س^{٥}$

، عندما : $س = ٢$ فإن : $ع_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥} (-\frac{١}{٣})^{٥} (٣)^{٥} = -٢٥٢$

(٣٠) إذا كانت رتبة الحد الخالى من س فى مفكوك $(٢ س^{٢} - \frac{٣}{س})^{٢١}$ تساوى رتبة الحد الخالى من س فى مفكوك $(س + \frac{١}{س})^{٢ن}$ أوجد قيمة ن ثم أوجد النسبة بين الحدين الأوسطين من المفكوك الأول عندما : $س = -١$

الحل

من المفكوك الأول : $ع_{ر+١} = {}^{٢١}ق_{ر} (٢ س^{٢})^{٢١ - ر} (-\frac{٣}{س})^{ر}$

$= {}^{٢١}ق_{ر} (٢)^{٢١ - ر} (-٣)^{ر} (س)^{٤٢ - ٣ر}$

نضع : $٤٢ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = ١٤$ (١)

من المفكوك الثانى : $ع_{ر+١} = {}^{٢ن}ق_{ر} (س)^{٢ن - ر} (\frac{١}{س})^{ر}$

$= {}^{٢ن}ق_{ر} (س)^{٢ن - ٢ر}$

نضع : $٢ن - ٢ر = ٠$ ∴ $ر = ن$ (٢)

، ∵ رتبتا الحدان الخاليان من س بالمفكوكيين متساويتين

∴ من (١) ، (٢) ينتج : $ن = ١٤$

رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{١}{٢} (٢١ + ١)$ ، $\frac{١}{٢} (٢١ + ٣)$ أى : ١١ ، ١٢ ، عندما : $س = -١$

فإن : $\frac{ع_{١٢}}{ع_{١١}} = \frac{٢١ - ١١ + ١}{١١} × \frac{٣}{٢} = \frac{٣}{٢}$

(٣١) من مفكوك $(٤ س^{٢} + \frac{١}{٢ س})^{١٣}$ أوجد معامل $س^{٥}$ ثم قيمة س التى تجعل الحدين الأوسطين من هذا المفكوك متساويين ثم أثبت أنه لا يوجد حد خال من س فى هذا المفكوك

الحل

$ع_{ر+١} = {}^{١٣}ق_{ر} (٤ س^{٢})^{١٣ - ر} (\frac{١}{٢ س})^{ر} = {}^{١٣}ق_{ر} (٢)^{٢٦ - ٣ر} (س)^{٢٦ - ٣ر}$

نضع : $٢٦ - ٣ر = ٥$ ∴ $ر = ٧$

∴ الحد المشتمل على $س^{٥}$ هو : $ع_{٨}$ ، معامل $ع_{٨} = {}^{١٣}ق_{٧} (٢)^{٥}$

، رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{١}{٢} (١٣ + ١)$ ، $\frac{١}{٢} (١٣ + ٣)$ أى : ٧ ، ٨ ، ∵ $ع_{٨} = ع_{٧}$

∴ $\frac{ع_{٨}}{ع_{٧}} = ١$ ∴ $\frac{١٣ - ٧ + ١}{٧} × \frac{١}{٨ س^{٣}} = ١$

∴ $٨ س^{٣} = ١$ ∴ $س = \frac{١}{٢}$

، نضع : $٢٦ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = \frac{٢٦}{٣} \notin ص_{+}$

∴ لا يوجد حد خال من س بالمفكوك

(٣٢) إذا كانت معاملات ثلاثة حدود متتالية فى مفكوك $(1 + \text{س})^{\text{ن}}$ على الترتيب هى : ١٥ ، ٢٤ ، ٢٨ حسب قوى س التصاعدية فما قيمة ن و رتب هذه الحدود ؟

الحل

بفرض أن : الحدود هى $ع_{ر}$ ، $ع_{ر+1}$ ، $ع_{ر+2}$

∴ $\frac{\text{معامل } ع_{ر+1}}{\text{معامل } ع_{ر}} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}$ ∴ $\frac{ن - ر + 1}{ر} = \frac{8}{5}$

و منها ينتج : ٥ ن + ٥ = ١٣ ر (١)

، $\frac{\text{معامل } ع_{ر+2}}{\text{معامل } ع_{ر+1}} = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$ ∴ $\frac{ن - (ر+1) + 1}{ر + 1} = \frac{7}{6}$

و منها ينتج : ٦ ن − ٧ = ١٣ ر (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج : ن = ١٢ ، بالتعويض فى (١) ينتج :

∴ ر = ٥ ∴ الحدود هى : $ع_5$ ، $ع_6$ ، $ع_7$

(٣٣) إذا كان الحد الأوسط من مفكوك $(1 + \text{س})^{10}$ يساوى ضعف ضعف الحد السابع أوجد قيمة س

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{1}{2} \times 10 + 1 = 6$ ∴ الحد الأوسط هو : $ع_6$

، ∵ $ع_6 = 2\, ع_7$ ∴ $\frac{ع_7}{ع_6} = \frac{1}{2}$

∴ $\frac{10 - 6 + 1}{6} \times \text{س} = \frac{1}{2}$ ∴ $\text{س} = \frac{3}{5}$

(٣٤) إذا كان مفكوك $(\text{س}^2 + \frac{1}{\text{س}})^{\text{ن}}$ يحتوى على حد خال من س فأثبت أن ن مضاعف للعدد ٣ ، ثم أوجد قيمة هذا الحد عندما : ن = ١٢

الحل

$ع_{ر+1} = {}^{ن}ق_{ر}\,(\text{س}^2)^{ن-ر}\,(\frac{1}{\text{س}})^{ر} = {}^{ن}ق_{ر}\,(\text{س})^{2ن - 3ر}$

، ∵ المفكوك يحتوى على حد خال من س

∴ ٢ ن − ٣ ر = ٠ ∴ $ر = \frac{2}{3}\, ن$ ، ∵ $ر \in ص_+$

∴ ن مضاعف للعدد ٣ ، عندما : ن = ١٢ ∴ $ر = \frac{2}{3} \times 12 = 8$

∴ الحد الخالى من س هو $ع_9$ ، $ع_9 = {}^{12}ق_8 = 495$

(٣٥) إذا كان الحدان الأوسطان فى مفكوك $(2\text{س} + 3)^{17}$ متساويان فما قيمة س ؟

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{1}{2}(17 + 1)$ ، $\frac{1}{2}(17 + 3)$ أى : ٩ ، ١٠ ، ∵ $ع_{10} = ع_9$

∴ $\frac{ع_{10}}{ع_9} = 1$ ∴ $\frac{17 - 9 + 1}{9} \times \frac{3}{2\text{س}} = 1$

∴ ٢ س = ٣ ∴ $\text{س} = \frac{3}{2}$

(٣٦) إذا كان أ ، ب هما الحدان الأوسطان فى مفكوك $(\text{س} - \frac{1}{\text{س}})^{15}$ حسب قوى س التنازلية فأثبت أن : أ + ب س^2 = ٠ .

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{1}{2}(15 + 1)$ ، $\frac{1}{2}(15 + 3)$ أى : ٨ ، ٩ ، ∵ $ع_8 = أ$ ، $ع_9 = ب$

∴ $\frac{ع_9}{ع_8} = \frac{ب}{أ}$ ∴ $\frac{15 - 8 + 1}{8} \times \frac{-1}{\text{س}^2} = \frac{ب}{أ}$

∴ − أ = ب س^2 أى أن : أ + ب س^2 = ٠ .

(٣٧) إذا كانت نسبة معامل الحد السادس إلى معامل الحد الرابع فى مفكوك $(\frac{٣}{٢} + \frac{٢س}{٣})^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية تساوى ٨ : ٢٧ فما قيمة ن ؟

الحل

$\because \frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٤} = \frac{٨}{٢٧}$ $\therefore \frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٥} \times \frac{معامل\ ح_٥}{معامل\ ح_٤} = \frac{٨}{٢٧}$

$\therefore \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{٤}{٩} \times \frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{٤}{٩} = \frac{٨}{٢٧}$

و منها : $(ن - ٤)(ن - ٣) = ٣٠$

$\therefore ن^٢ - ٧ن - ١٨ = ٠$ $\therefore (ن - ٩)(ن + ٢) = ٠$

$\therefore ن = ٩$ أ، $ن = -٢$ مرفوض

(٣٨) أوجد قيمة س التى تجعل الحد الثالث فى مفكوك $(٢س^٢ + \frac{١}{٢})^٧$ حسب قوى س التنازلية مساوياً الحد السادس

الحل

$\because ح_٣ = {}^{٧}ق_{٢} (٢س^٢)^٥ (\frac{١}{٢})^٢ = ١٦٨ س^{١٠}$ ،

$ح_٦ = {}^{٧}ق_{٥} (٢س^٢)^٢ (\frac{١}{٢})^٥ = \frac{٢١}{٨} س^٤$ ، $\because ح_٣ = ح_٦$

$\therefore ١٦٨ س^{١٠} = \frac{٢١}{٨} س^٤$ $\therefore س^٦ = \frac{١}{٦٤}$ $\therefore س = \pm \frac{١}{٢}$

(٣٩) إذا كان : $ح_٤ = \frac{٢٥}{٣} ح_٢$ ، $ح_٥ = ح_٦$ من مفكوك $(١ + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية فأوجد قيم كل من ن ، س

الحل

$\because ح_٤ = \frac{٢٥}{٣} ح_٢$ $\therefore \frac{ح_٤}{ح_٢} = \frac{٢٥}{٣}$ $\therefore \frac{ح_٤}{ح_٣} \times \frac{ح_٣}{ح_٢} = \frac{٢٥}{٣}$

$\therefore \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times س \times \frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times س = \frac{٢٥}{٣}$

و منها : $(ن - ٢)(ن - ١) س^٢ = ٥٠$ (١)

، $\because ح_٥ = ح_٦$ $\therefore \frac{ح_٦}{ح_٥} = ١$ $\therefore \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times س = ١$

و منها : $(ن - ٤) س = ٥$ ، بالتربيع ينتج :

$(ن - ٤)^٢ س^٢ = ٢٥$ (٢) ، بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج :

$ن^٢ - ٣ن + ٢ = ٢ن^٢ - ١٦ن + ٣٢$

$\therefore ن^٢ - ١٣ن + ٣٠ = ٠$ $\therefore (ن - ١٠)(ن - ٣) = ٠$

$\therefore ن = ١٠$ أ، $ن = ٣$ مرفوض

(٤٠) إذا كان : ن عدداً صحيحاً و كان :

$(١ + حـ س)^{ن} = ١ + م_١ س + م_٢ س^٢ + م_٣ س^٣ + م_٤ س^٤ + ...$ و كان : $م_١ = ١٢$ ، $م_٤ = ٤ م_٢$ أوجد قيمة كل من : ن ، حـ

الحل

$\because (١ + حـ س)^{ن} = ١ + م_١ س + م_٢ س^٢ + م_٣ س^٣ + م_٤ س^٤ + ...$

، $\because (١ + حـ س)^{ن} = ١ + {}^{ن}ق_{١} حـ س + {}^{ن}ق_{٢} حـ^٢ س^٢ + {}^{ن}ق_{٣} حـ^٣ س^٣ + {}^{ن}ق_{٤} حـ^٤ س^٤ + ...$

، بمقارنة معاملات س ، $س^٢$ ، $س^٤$ ينتج :

$م_١ = {}^{ن}ق_{١} حـ = ن حـ$ ، $\because م_١ = ١٢$

$\therefore ن حـ = ١٢$ $\therefore حـ = \frac{١٢}{ن}$ (١)

، $م_٢ = {}^{ن}ق_{٢} حـ^٢$ ، $م_٤ = {}^{ن}ق_{٤} حـ^٤$

، ∵ $م_{٤} = ٤ م_{٢}$ ∴ $^{ن}ق_{٤}\, حـ^{٤} = ٤\, ^{ن}ق_{٢}\, حـ^{٢}$

∴ $\frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن}ق_{٢}} حـ^{٢} = ٤$ ∴ $\frac{^{ن}ق_{٤}}{^{ن}ق_{٣}} \times \frac{^{ن}ق_{٣}}{^{ن}ق_{٢}} حـ^{٢} = ٤$

∴ $\frac{ن - ٤ + ١}{٤} \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} حـ^{٢} = ٤$ ، بالتعويض من (١) و الاختصار ينتج :

$٢ن^{٢} - ١٥ن + ١٨ = ٠$ ∴ $(٢ن - ٣)(ن - ٦) = ٠$

∴ $ن = ٦$ ، و من (١) : $حـ = ٢$ أ، $ن = \frac{٣}{٢}$ مرفوض

(٤١) إذا كانت الحدود : الثالث ، الرابع ، الخامس من مفكوك $(س + ص)^{ن}$ هى على الترتيب : ١١٢ ، ٤٤٨ ، ١١٢٠

أوجد قيم كل من : ن ، س ، ص

الحل

راجع : إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٢٨

(٤٢) أوجد فى مفكوك $\left(\frac{٢س}{٣} + \frac{٣}{٢س^{٢}}\right)^{١٢}$ كلاً من : الحد الأوسط و الحد المشتمل على $س^{٣}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٢}ق_{ر} \left(\frac{٢س}{٣}\right)^{١٢-ر} \left(\frac{٣}{٢س^{٢}}\right)^{ر}$

$= {}^{١٢}ق_{ر} (٢)^{١٢-٢ر} (٣)^{٢ر-١٢} (س)^{١٢-٣ر}$

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} \times ١٢ + ١ = ٧$ ∴ الحد الأوسط هو : $ح_{٧}$

∴ $ح_{٧} = {}^{١٢}ق_{٦} (٢)^{٠} (٣)^{٠} (س)^{-٦} = ٩٢٤ س^{-٦}$

، نضع : $١٢ - ٣ر = ٣$ ∴ $ر = ٣$

∴ الحد الخالى من $س^{٣}$ هو : $ح_{٤}$ ، $ح_{٤} = {}^{١٢}ق_{٣} (٢)^{٦} (٣)^{-٦} س^{٣}$

(٤٣) أوجد الحد الخالى من س فى مفكوك

$\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٦} - \left(س - \frac{١}{س}\right)^{٦}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} (س)^{٦-ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} = {}^{٦}ق_{ر} (س)^{٦-٢ر}$

نضع : $٦ - ٢ر = ٠$ ∴ $ر = ٣$

∴ الحد الخالى من س هو : $^{٦}ق_{٣} = ٢٠$

، $ح_{م+١} = {}^{٦}ق_{م} (س)^{٦-م} \left(-\frac{١}{س}\right)^{م} = {}^{٦}ق_{م} (-١)^{م} (س)^{٦-٢م}$

نضع : $٦ - ٢م = ٠$ ∴ $م = ٣$

∴ الحد الخالى من س هو : $^{٦}ق_{٣} (-١)^{٣} = -٢٠$

∴ الحد الخالى من س فى المفكوك هو $= ٢٠ - (-٢٠) = ٤٠$

(٤٤) فى مفكوك $\left(٢س + \frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية إذا كان الحد التاسع و العاشر متساويين و كانت النسبة بين الحد السادس و الحد السابع كنسبة ٨ : ١٥ ، فأوجد قيمة ن ، و أثبت أن المفكوك لا يحتوى على حد خال من س

الحل

∵ $ح_{١٠} = ح_{٩}$ ∴ $\frac{ح_{١٠}}{ح_{٩}} = ١$ ∴ $\frac{ن - ٩ + ١}{٩} \times \frac{٣}{٢س^{٣}} = ١$

و منها : $ن - ٨ = ٦ س^{٣}$ (١)

، ∵ $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٥}{٨}$ ∴ $\frac{ن - ٦ + ١}{٦} \times \frac{٣}{٢س^{٣}} = \frac{١٥}{٨}$

و منها : $٢(ن - ٥) = ١٥ س^{٣}$ (٢) ، بقسمة (١) ÷ (٢) ينتج :

$٥ن - ٤٠ = ٤ن - ٢٠$ و منها : $ن = ٢٠$

، بالتعويض فى (١) ينتج : $س^{٣} = ٢$ ∴ $س = \pm \sqrt[٣]{٢}$

أحمد الشنتورى

، ∵ $ع_{ر+١} = {}^{٢٠}ق_{ر} \, (٢س)^{٢٠-ر} \left(\frac{٣}{س^{٢}}\right)^{ر}$

$= {}^{٢٠}ق_{ر} \, (٢)^{٢٠-ر} (٣)^{ر} (س)^{٢٠-٣ر}$

نضع : $٢٠ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = \frac{٢٠}{٣} \notin ص^{+}$

∴ المفكوك لا يحتوى على حد خال من س

(٤٥) فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{حـ}{س^{٣}}\right)^{١٥}$ أوجد قيمة حـ التى تجعل معامل $س^{١٠}$ ضعف معامل $س^{١٥}$

الحل

$ع_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \, (س^{٢})^{١٥-ر} \left(\frac{حـ}{س^{٣}}\right)^{ر} = {}^{١٥}ق_{ر} \, حـ^{ر} (س)^{٣٠-٥ر}$

نضع : $٣٠ - ٥ر = ١٠$ ∴ $ر = ٤$

∴ الحد المشتمل على $س^{١٠}$ هو : $ع_{٥}$ ، معامله $= {}^{١٥}ق_{٤} \, حـ^{٤} = ١٣٦٥ \, حـ^{٤}$

، نضع : $٣٠ - ٥ر = ١٥$ ∴ $ر = ٣$

∴ الحد المشتمل على $س^{١٥}$ هو : $ع_{٤}$ ، معامله $= {}^{١٥}ق_{٣} \, حـ^{٣} = ٤٥٥ \, حـ^{٣}$

، ∵ معامل $ع_{٥} = ٢$ معامل $ع_{٤}$ ∴ $١٣٦٥ \, حـ^{٤} = ٩١٠ \, حـ^{٣}$

∴ $٣ حـ = ٢$ و منها : $حـ = \frac{٢}{٣}$

(٤٦) فى مفكوك $\left(س^{٢} + \frac{١}{س}\right)^{١٥}$ أوجد النسبة بين الحد الخالى من س و مجموع معاملى الحدين الأوسطين

الحل

$ع_{ر+١} = {}^{١٥}ق_{ر} \, (س^{٢})^{١٥-ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} = {}^{١٥}ق_{ر} \, (س)^{٣٠-٣ر}$

نضع : $٣٠ - ٣ر = ٠$ ∴ $ر = ١٠$

∴ الحد الخالى من س هو : $ع_{١١}$ ، $ع_{١١} = {}^{١٥}ق_{١٠} = ٣٠٠٣$

، رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{١}{٢}(١٥ + ١)$ ،

$\frac{١}{٢}(١٥ + ٣)$ أى : ٨ ، ٩

∴ معامل $ع_{٨}$ + معامل $ع_{٩} = {}^{١٥}ق_{٧} + {}^{١٥}ق_{٨} = ١٢٨٧٠$

∴ النسبة بين الحد الخالى من س و مجموع معاملى الحدين الأوسطين $= \frac{٧}{٣٠}$

(٤٧) فى مفكوك $\left(س^{ك} + \frac{١}{س}\right)^{٨}$ حيث : ك عدد صحيح موجب أوجد :

(أ) قيم ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س

(ب) النسبة بين الحد الخالى من س و معامل الحد الأوسط و ذلك لأكبر قيم ك التى حصلت عليها فى (أ)

الحل

$ع_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} \, (س^{ك})^{٨-ر} \left(\frac{١}{س}\right)^{ر} = {}^{٨}ق_{ر} \, (س)^{٨ك - كر - ر}$

نضع : $٨ك - كر - ر = ٠$ ∴ $ك(٨ - ر) = ر$

∴ $ك = \frac{ر}{٨ - ر}$ ∴ $ر < ٨$ ، ∵ $ر \in ص^{+}$ ∴ $ك \in ص^{+}$

∴ عندما : $ر = ١$ ∴ $ك = \frac{١}{٧}$ مرفوض ، عندما : $ر = ٢$ ∴ $ك = \frac{١}{٣}$ مرفوض

، عندما : $ر = ٣$ ∴ $ك = \frac{٣}{٥}$ مرفوض ، عندما : $ر = ٤$ ∴ $ك = ١$

، عندما : $ر = ٥$ ∴ $ك = \frac{٥}{٣}$ مرفوض ، عندما : $ر = ٦$ ∴ $ك = ٣$

، ، عندما : $ر = ٧$ ∴ $ك = ٧$

(أ) ∴ قيم ك التى تجعل للمفكوك حداً خالياً من س هى : ١ ، ٣ ، ٧

، عندما : $ك = ٧$ " أكبر قيم ك " ∴ الحد الخالى من س هو : $ع_{٨}$

، رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} \times ٨ + ١ = ٥$

(ب) ∴ $ع_{٨}$: معامل $ع_{٥} = {}^{٨}ق_{٧} : {}^{٨}ق_{٤} = ٨ : ٧٠ = ٤ : ٣٥$

(٤٨) إذا كان : $(١ + س)^{ن} = أ_{٠} + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} + ... + أ_{ن} س^{ن}$ فإثبت أن :

(أ) $\frac{أ_{١}}{أ_{٠}} + \frac{٢ أ_{٢}}{أ_{١}} + \frac{٣ أ_{٣}}{أ_{٢}} + ... + \frac{ن أ_{ن}}{أ_{ن-١}} = \frac{١}{٢} ن (ن + ١)$

(ب) $أ_{٠} + ٢ أ_{١} + ٤ أ_{٢} + ٨ أ_{٣} + ... + ٢^{ن} أ_{ن} = ٣^{ن}$

الحل

∵ $(١ + س)^{ن} = أ_{٠} + أ_{١} س + أ_{٢} س^{٢} + ... + أ_{ن} س^{ن}$

، ∵ $(١ + س)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} س + {}^{ن}ق_{٢} س^{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن} س^{ن}$

، بمقارنة معاملات قوى س ينتج : $أ_{٠} = {}^{ن}ق_{٠}$ ، $أ_{١} = {}^{ن}ق_{١}$ ،

$أ_{٢} = {}^{ن}ق_{٢}$ ، $أ_{٣} = {}^{ن}ق_{٣}$ ، .... ، $أ_{ن} = {}^{ن}ق_{ن}$

(أ) الطرف الأيمن $= \frac{{}^{ن}ق_{١}}{{}^{ن}ق_{٠}} + ٢ \times \frac{{}^{ن}ق_{٢}}{{}^{ن}ق_{١}} + ٣ \times \frac{{}^{ن}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٢}} + ... + ن \times \frac{{}^{ن}ق_{ن}}{{}^{ن}ق_{ن-١}}$

$= \frac{ن - ١ + ١}{١} + ٢ \times \frac{ن - ٢ + ١}{٢} + ٣ \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} + ... + ن \times \frac{ن - ن + ١}{ن}$

$= ن + (ن - ١) + (ن - ٢) + ... + ١$

و هى متسلسلة حسابية حدها الأول = ١ ، و أساسها = ١ ، عدد حدودها = ن

∴ مجموعها $= \frac{١}{٢} ن (ن + ١)$ = الطرف الأيسر

(ب) نضع : س = ٢ فى المفكوك المعطى ينتج :

$(١ + ٢)^{ن} = أ_{٠} + ٢ أ_{١} + ٤ أ_{٢} + ٨ أ_{٣} + ... + ٢^{ن} أ_{ن}$

∴ $أ_{٠} + ٢ أ_{١} + ٤ أ_{٢} + ٨ أ_{٣} + ... + ٢^{ن} أ_{ن} = ٣^{ن}$

(٤٩) إذا كان الحد الثالث فى مفكوك $(٢ س + \frac{١}{س^{٢}})^{ن}$ حسب قوى س التنازلية خالياً من س فأوجد قيمة ص التى تجعل هذا الحد مساوياً للحد الثانى فى مفكوك $(١ + ص^{٣})^{٣٠}$

الحل

فى المفكوك الأول :

∵ $ح_{٣} = {}^{ن}ق_{٢} (٢ س)^{ن - ٢} (\frac{١}{س^{٢}})^{٢} = {}^{ن}ق_{٢} (٢)^{ن - ٢} (س)^{ن - ٦}$

، ∵ $ح_{٣}$ خالى من س ∴ ن − ٦ = ٠ ∴ ن = ٦

∴ $ح_{٣} = {}^{٦}ق_{٢} (٢)^{٤} = ٢٤٠$

فى المفكوك الثانى : ∵ $ح_{٢} = {}^{٣٠}ق_{١} ص^{٣} = ٣٠ ص^{٣}$

، ∵ $ح_{٣}$ فى المفكوك الأول = $ح_{٢}$ فى المفكوك الثانى

∴ $٢٤٠ = ٣٠ ص^{٣}$ ∴ $ص^{٣} = ٨$ ∴ ص = ٢

(٥٠) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{أ س})^{٨}$ إذا كان معامل الحد الأوسط يساوى معامل الحد الذى يحتوى على $س^{١٠}$ فأوجد قيمة أ

الحل

رتبة الحد الأوسط $= \frac{١}{٢} \times ٨ + ١ = ٥$ ∴ الحد الأوسط هو : $ح_{٥}$

∴ $ح_{٥} = {}^{٨}ق_{٤} (س^{٢})^{٤} (\frac{١}{أ س})^{٤} = ٧٠ أ^{-٤} س^{٤}$

، ∵ $ح_{ر+١} = {}^{٨}ق_{ر} (س^{٢})^{٨ - ر} (\frac{١}{أ س})^{ر} = {}^{٨}ق_{ر} أ^{-ر} (س)^{١٦ - ٣ر}$

نضع : ١٦ − ٣ر = ١٠ ∴ ر = ٢

∴ الحد المشتمل على $س^{١٠}$ هو : $ح_{٣}$ ، معامله $= {}^{٨}ق_{٢} أ^{-٢} = ٢٨ أ^{-٢}$

، ∵ معامل $ح_{٥}$ = معامل $ح_{٣}$ ∴ $٧٠ أ^{-٤} = ٢٨ أ^{-٢}$

∴ $٤ أ^{٢} = ١٠$　　∴ $أ = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

(٥١) فى مفكوك $(س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٤}$ أثبت أنه لا يوجد حد خال من س
ثم أوجد النسبة بين الحد السابع و الحد السادس فى هذا المفكوك
عندما : س = − ١

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{١٤}ق_{ر} (س^{٢})^{١٤-ر} (-\frac{١}{س})^{ر}$

$= {}^{١٤}ق_{ر} (-١)^{ر} (س)^{٢٨ - ٣ر}$

نضع : $٢٨ - ٣ر = ٠$　　∴ $ر = \frac{٢٨}{٣} \notin ص^{+}$

∴ المفكوك لا يحتوى على حد خال من س

$\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{١٤ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{-١}{س^{٣}} = \frac{٩}{٦} \times \frac{-١}{س^{٣}} = \frac{٣}{٢} \times \frac{-١}{س^{٣}}$

، عندما : س = − ١　فإن : $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{٣}{٢}$

(٥٢) فى مفكوك $(٩ س^{٢} + \frac{١}{٣ س})^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س
ثم أثبت أن الحدين الأوسطين متساويان عندما : $س = \frac{١}{٣}$

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (٩ س^{٢})^{٩-ر} (\frac{١}{٣ س})^{ر}$

$= {}^{٩}ق_{ر} (٣)^{١٨ - ٣ر} (س)^{١٨ - ٣ر}$

نضع : $١٨ - ٣ر = ٠$　　∴ ر = ٦

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_{٧}$ ، $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} = ٨٤$

، رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{١}{٢} (٩ + ١)$ ،

$\frac{١}{٢} (٩ + ٣)$　　أى : ٥ ، ٦

، ∵ $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = \frac{٩ - ٥ + ١}{٥} \times \frac{١}{٢٧ س^{٣}}$　　، عندما : $س = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{ح_{٦}}{ح_{٥}} = ١$　　∴ $ح_{٦} = ح_{٥}$

(٥٣) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٩}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س
و إذا كانت النسبة بين الحد الخالى من س و الحد السادس
تساوى ٩ : ٤ فأوجد قيم س الحقيقية

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} (س^{٢})^{٩-ر} (\frac{١}{س})^{ر} = {}^{٩}ق_{ر} (س)^{١٨ - ٣ر}$

نضع : $١٨ - ٣ر = ٠$　　∴ ر = ٦

∴ الحد الخالى من س هو : $ح_{٧}$ ، $ح_{٧} = {}^{٩}ق_{٦} = ٨٤$

، ∵ $\frac{ح_{٧}}{ح_{٦}} = \frac{٩}{٤}$　　∴ $\frac{٩ - ٦ + ١}{٦} \times \frac{١}{س^{٣}} = \frac{٩}{٤}$

∴ $٨ س^{٣} = ٢٧$　　∴ $س^{٣} = \frac{٢٧}{٨}$　　∴ $س = \frac{٣}{٢}$

(٥٤) فى مفكوك $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣ن}$ أوجد معامل $س^{٣ن}$ ، و إذا كانت
ن = ٦ فأوجد النسبة بين معامل $س^{٣ن}$ و معامل الحد الأوسط

الحل

$ح_{ر+١} = {}^{٣ن}ق_{ر} (س^{٢})^{٣ن - ر} (\frac{١}{س})^{ر} = {}^{٣ن}ق_{ر} (س)^{٦ن - ٣ر}$

نضع : $٦ن - ٣ر = ٣ن$　　∴ ر = ن

∴ الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ هو : $ح_{ن+١}$ ، معامله = ${}^{٣ن}ق_{ن}$

، عندما : ن = ٦　∴ الحد المشتمل على $س^{٣ن} = {}^{١٨}ق_{٦}$

، رتبة الحد الأوسط = $\frac{١}{٢} \times ١٨ + ١ = ١٠$

∴ الحد الأوسط هو : $ح_{١٠}$ ، معامله = $^{١٨}ق_{٩}$

∴ الحد المشتمل على $س^{٣ن}$ ب: معامل $ح_{١٠}$ = $^{١٨}ق_{٦} : {}^{١٨}ق_{٩} = ٢١ : ٥٥$

حل اختبار تراكمى صفحة ٣٥ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى مفكوك $(١ + س)^{١٧}$ إذا كان معامل $ح_{ر+١}$ = معامل $ح_{٣ر+٣}$

فإن : ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٧ (ء) ٧

الحل

∵ معامل $ح_{ر+١}$ = معامل $ح_{٣ر+٣}$ ∴ $^{١٧}ق_{ر+٣} = {}^{١٧}ق_{٣ر+٢}$

∴ ر + ٣ = ٣ر + ٢ ∴ ر = $\frac{١}{٢}$ مرفوض

أ، ر + ٣ + ٣ر + ٢ = ١٧ ∴ ر = ٣

(٢) فى مفكوك $(١ + س)^{٢٧}$ إذا كانت النسبة بين الحدين الأوسطين = ٣ : ١ فإن : س = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (ء) $\frac{١}{٤}$

الحل

رتبتا الحدان الأوسطان من المفكوك الأول هما : $\frac{١}{٢}(٢٧ + ١)$ ، $\frac{١}{٢}(٢٧ + ٣)$ أى : ١٤ ، ١٥

، ∵ $\frac{ح_{١٥}}{ح_{١٤}} = \frac{٢٧ - ١٤ + ١}{١٤} \times \frac{١}{س} = \frac{٣}{١}$ و منها : س = $\frac{١}{٣}$

(٣) المقدار : $(\sqrt{٢} + ١)^{٥} - (\sqrt{٢} - ١)^{٥} = ...$

(أ) -٨٢ (ب) ٨٢ (جـ) $٥٨\sqrt{٢}$ (ء) $-٥٨\sqrt{٢}$

الحل

$(\sqrt{٢} + ١)^{٥} - (\sqrt{٢} - ١)^{٥} = ٢(ح_{٢} + ح_{٤} + ح_{٦})$

$= ٢[{}^{٥}ق_{١}(\sqrt{٢})^{٤} + {}^{٥}ق_{٣}(\sqrt{٢})^{٢} + {}^{٥}ق_{٥}]$

$= ٢(٥ \times ٤ + ١٠ \times ٢ + ١) = ٢ \times ٤١ = ٨٢$

(٤) الحد الرابع فى مفكوك $(\frac{س}{٣} + \frac{٣}{س})^{٦}$ هو : ....

(أ) ٢٠ س (ب) $\frac{٢٠}{س}$ (جـ) ٢٠ (ء) $٢٠ س^{٢}$

الحل

$ح_{٤} = {}^{٦}ق_{٣}(\frac{س}{٣})^{٣}(\frac{٣}{س})^{٣} = ٢٠$

(٥) الحد الأخير من مفكوك $(٢ - س)^{٥}(٢ + س)^{٥}$ هو ....

(أ) $س^{٥}$ (ب) $-س^{٥}$ (جـ) $-س^{١٠}$ (ء) $س^{١٠}$

الحل

∵ $(٢ - س)^{٥}(٢ + س)^{٥} = [(٢ - س)(٢ + س)]^{٥}$

$= (٤ - س^{٢})^{٥}$ ، ∵ عدد الحدود = ٦

∴ الحد الأخير هو : $ح_{٦} = {}^{٥}ق_{٥}(٤)^{٠}(-س^{٢})^{٥} = -س^{١٠}$

(٦) فى مفكوك $(١ + س)^{ن}$ أثبت أن : $\frac{ح_{ر+١}}{ح_{ر}} = \frac{ن - ر + ١}{ر} س$

و إذا كان معامل $ح_{١٣}$ حسب قوى س التصاعدية فى هذا المفكوك

يساوى معامل $ح_{١٤}$ أوجد قيمة ن و إذا كان $\frac{ح_{٧}}{ح_{٥}} = \frac{٧}{٨}$ أوجد قيمة س

الحل

$\frac{\text{ح}_{\text{ر}+1}}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}\ \text{س}^{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}\ \text{س}^{\text{ر}-1}} = \frac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1}}\ \text{س} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+1}{\text{ر}}\ \text{س}$

، ∵ معامل ح_{13} = معامل ح_{14} ∴ $\frac{\text{معامل ح}_{14}}{\text{معامل ح}_{13}} = 1$

∴ $\frac{\text{ن}-13+1}{13} = 1$ ∴ $\text{ن} - 12 = 13$ ∴ $\text{ن} = 25$

، ∵ $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_5} = \frac{7}{8}$ ∴ $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6} \times \frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} = \frac{7}{8}$

∴ $\frac{25-6+1}{6} \times \text{س} \times \frac{25-5+1}{5} \times \text{س} = \frac{7}{8}$

∴ $16\ \text{س}^2 = 1$ ∴ $\text{س}^2 = \frac{1}{16}$ ∴ $\text{س} = \pm \frac{1}{4}$

(٧) (ب) أوجد قيمة الحد الخالى من س فى مفكوك

$\left(\frac{1}{\text{س}^2}\right)\left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}^3}\right)^{10}$

الحل

$\text{ح}_{\text{ر}+1} = \left(\frac{1}{\text{س}^2}\right) {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{س})^{10-\text{ر}} \left(\frac{1}{\text{س}^3}\right)^{\text{ر}} = {}^{10}\text{ق}_{\text{ر}} (\text{س})^{8-4\text{ر}}$

نضع : $8 - 4\text{ر} = 0$ ∴ $\text{ر} = 2$

∴ الحد الخالى من س هو : ح_3 ، $\text{ح}_3 = {}^{10}\text{ق}_2 = 45$

(٨) فى مفكوك $(1 - \text{م}\ \text{س})^{\text{ن}}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان الحد الثانى = $-\frac{1}{4}$ س و كان الحد الثالث = $\frac{3}{100}$ س^2 أوجد قيمة كل من : م ، ن

الحل

∵ $\text{ح}_2 = -\frac{1}{4}\ \text{س}$ ∴ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_1 (-\text{م}\ \text{س})^1 = -\frac{1}{4}\ \text{س}$

∴ $\text{ن}\ \text{م} = \frac{1}{4}$ ∴ $\text{ن}^2\ \text{م}^2 = \frac{1}{16}$ (١)

، ∵ $\text{ح}_3 = \frac{3}{100}\ \text{س}^2$ ∴ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_2 (-\text{م}\ \text{س})^2 = \frac{3}{100}\ \text{س}^2$

∴ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_2\ \text{م}^2\ \text{س}^2 = \frac{3}{100}\ \text{س}^2$ ∴ ${}^{\text{ن}}\text{ق}_2\ \text{م}^2 = \frac{3}{100}$

∴ $\text{ن}(\text{ن} - 1)\ \text{م}^2 = \frac{6}{100}$ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) و الاختصار ينتج : $100\ \text{ن} - 100 = 96\ \text{ن}$

∴ $\text{ن} = 25$ ، بالتعويض فى (١) ينتج : $\text{م} = \frac{1}{100}$

(١٠) إذا كانت النسبة بين الحدود الخامس و السادس و السابع فى مفكوك $\left(\frac{3\text{س}}{2} + \frac{2}{3\text{س}}\right)^{\text{ن}}$ حسب قوى س التنازلية هى ٤٠ : ٢٤ : ١١ أوجد كلاً من : ن ، س

الحل

∵ $\frac{\text{ح}_6}{\text{ح}_5} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ ∴ $\frac{\text{ن}-5+1}{5} \times \frac{4}{9\text{س}^2} = \frac{3}{5}$

∴ $\text{ن} - 4 = \frac{27}{4}\ \text{س}^2$ (١)

، ∵ $\frac{\text{ح}_7}{\text{ح}_6} = \frac{11}{24}$ ∴ $\frac{\text{ن}-6+1}{6} \times \frac{4}{9\text{س}^2} = \frac{11}{24}$

∴ $\text{ن} - 5 = \frac{99}{16}\ \text{س}^2$ (٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) و الاختصار ينتج : $11\ \text{ن} - 44 = 12\ \text{ن} - 16$

∴ $\text{ن} = 16$ ، بالتعويض فى (١) ينتج : $\text{س}^2 = \frac{16}{9}$ ∴ $\text{س} = \pm \frac{4}{3}$

حل اختبارات الكتاب
مسائل نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب

الاختبار الأول

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) معامل $س^5$ فى مفكوك $(3 - 2س)^7$ يساوى ....

الحل

$\because ع_{ر+1} = ق^7_ر \times (-2س)^ر (3)^{7-ر}$

$= ق^7_ر \times (-2)^ر (3)^{7-ر} (س)^ر$ $\therefore ر = 5$

$\therefore$ الحد المشتمل على $س^5$ هو $ع_6$

$\therefore$ معامل $س^5$ = معامل $ع_6 = ق^7_5 \times (-2)^5 (3)^2 = (-32) \times 9$

$= -6048$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(أ) فى مفكوك $(2س + \frac{1}{س^2})^{15}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س

و أثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^5$

الحل

نفرض أن الحد الخالى من س هو الحد العام

$\because ع_{ر+1} = ق^{15}_ر \times (\frac{1}{س^2})^ر (2س)^{15-ر}$

$= ق^{15}_ر \times (2)^{15-ر} (س)^{-2ر} (س)^{15-ر}$

$\therefore ع_{ر+1} = ق^{15}_ر \times (2)^{15-ر} (س)^{15-3ر}$

بوضع : $15 - 3ر = 0$ $\therefore ر = 5$

$\therefore$ الحد الخالى من س هو $ع_6 = ق^{15}_5 \times (2)^{10} = 3075072$

، بفرض أن الحد المشتمل على $س^5$ هو الحد العام

بوضع : $15 - 3ر = 5$ $\therefore ر = \frac{10}{3} \notin ص_+$

$\therefore$ هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^5$

الاختبار الثانى

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(أ) أوجد معامل $س^5$ فى مفكوك $(1 - س + س^2)(1 + س)^{11}$

الحل

المقدار $= (1 - س + س^2)(1 + س)^{11}$

$= (1 - س + س^2)(1 + ق^{11}_1 س + ق^{11}_2 س^2 + ق^{11}_3 س^3 + ق^{11}_4 س^4 + ق^{11}_5 س^5 + \dots + س^{11})$

الحدود المشتملة على $س^5$ هى : $1 \times ق^{11}_5 س^5$ ، $-س \times ق^{11}_4 س^4$ ، $س^2 \times ق^{11}_3 س^3$

$\therefore$ معامل $س^5 = ق^{11}_5 - ق^{11}_4 + ق^{11}_3 = 462 - 330 + 165 = 297$

الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $(١ + س)^{٥}$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) ٥ (حـ) ٣٢ (ء) ٥

الحل

مجموع معاملات الحدود فى مفكوك $(١ + ١)^{٥} = (٢)^{٥} = ٣٢$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كان : $(م + س)^{ن} = ٣أ + ٦أ\,س + ٥أ\,س^{٢} + ...$

حيث ن ∈ ص+ أوجد قيمة كل من م ، أ

الحل

∵ معامل $ع_{١} = ٣أ$ ، معامل $ع_{٢} = ٦أ$ ، معامل $ع_{٣} = ٥أ$

∴ $\frac{معامل\ ع_{٢}}{معامل\ ع_{١}} = \frac{٦أ}{٣أ} = ٢$ ∴ $\frac{ن - ١ + ١}{١} \times \frac{١}{م} = ٢$ ∴ ن = ٢م

، $\frac{معامل\ ع_{٣}}{معامل\ ع_{٢}} = \frac{٥أ}{٦أ} = \frac{٥}{٦}$ ∴ $\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{١}{م} = \frac{٥}{٦}$

و منها : ٣ن − ٣ = ٥م بالتعويض عن : ن = ٢م

∴ ٦م − ٣ = ٥م و منها : م = ٣ ، بالتالى : ن = ٦

، ∵ $م^{ن} = ٣أ$ ∴ $٣^{٦} = ٣أ$ و منها : $أ = ٣^{٥} = ٢٣٤$

الاختبار الرابع

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) أوجد أكبر حد فى مفكوك $(٣ + ٢س)^{٦}$ عندما : س = ١

الحل

∵ $\frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} = \frac{٦ - ر + ١}{ر} \times \frac{٢س}{٣} = \frac{٧ - ر}{ر} \times \frac{٢س}{٣}$

، عندما : س = ١ فإن : $\frac{٧ - ر}{ر} \times \frac{٢}{٣} \times ١ = \frac{٧ - ر}{ر} \times \frac{٢}{٣}$

أولاً : $\frac{٧ - ر}{ر} \times \frac{٢}{٣} > ١$

∴ $١٤ - ٢ر > ٣ر$ ∴ $٥ر < ١٤$ ∴ $ر < ٢,٨$

∴ $ع_{١} < ع_{٢} < ع_{٣}$ (١)

ثانياً : $\frac{٧ - ر}{ر} \times \frac{٢}{٣} < ١$

∴ $١٤ - ٢ر < ٣ر$ ∴ $٥ر > ١٤$ ∴ $ر > ٢,٨$

∴ $ع_{٧} < ع_{٦} < ع_{٥} < ع_{٤} < ع_{٣}$ (٢)

ثالثاً : $\frac{٧ - ر}{ر} \times \frac{٢}{٣} = ١$

∴ $١٤ - ٢ر = ٣ر$ ∴ $٥ر = ١٤$

∴ ر = ٢,٨ ∉ ص+ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج : $ع_{٣}$ أكبر حد فى المفكوك

، قيمته = $^{٦}ق_{٢} \times (٣)^{٤} \times (٢)^{٢} = ٤٨٦٠$

الاختبار الخامس

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) إذا كان : معاملا $ع_{٦}$ ، $ع_{١٦}$ فى مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ متساويين فإن قيمة ن = ...

الحل

∵ معامل $ع_{٦}$ = معامل $ع_{١٦}$

∴ $ق^{ن}_{٥} = ق^{ن}_{١٥}$ ∴ ن = ٥ + ١٥ = ٢٠

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $(١ + س)^{١٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معاملا الحدين $ع_{٢ر+٤}$ ، $ع_{ر-٢}$ متساويين ، أوجد قيمة ر

الحل

∵ معامل $ع_{٢ر+٤}$ = معامل $ع_{ر-٢}$ ∴ $^{١٨}ق_{٢ر+٣} = {}^{١٨}ق_{ر-٣}$

∴ ٢ر + ٣ = ر − ٣ ∴ ر = −٦ مرفوض

أو ٢ر + ٣ + ر − ٣ = ١٨ ∴ ر = ٦

الاختبار السادس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(٣س - \frac{١}{٢})^{١٠}$ يساوى ....

(أ) $-\frac{٦٣}{٨}$　　(ب) $-\frac{٦٧}{٨}$　　(جـ) $\frac{٦٣}{٨}$　　(ء) $\frac{٦٧}{٨}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$

∴ معامل الحد الأوسط = معامل $ع_{٦}$ = $^{١٠}ق_{٥} \times (-\frac{١}{٢})^{٥} \times (٣)^{٥} = -\frac{٦٣}{٨}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كانت معاملات الحدود الرابع و الخامس و السادس فى مفكوك $(٢س + ص)^{ن}$ حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

الحل

∵ معامل $ع_{٤}$ ، معامل $ع_{٥}$ ، معامل $ع_{٦}$ فى تتابع حسابى

∴ معامل $ع_{٤}$ + معامل $ع_{٦}$ = ٢ معامل $ع_{٥}$ بالقسمة ÷ معامل $ع_{٥}$ ينتج :

∴ $\frac{معامل\ ع_{٤}}{معامل\ ع_{٥}} + \frac{معامل\ ع_{٦}}{معامل\ ع_{٥}} = ٢$ ∴ $\frac{٤}{ن-٤+١} \times \frac{٢}{١} + \frac{ن-٥+١}{٥} \times \frac{١}{٢} = ٢$

∴ $\frac{٨}{ن-٣} + \frac{ن-٤}{١٠} = ٢$ بالضرب × ١٠ (ن − ٣) ينتج :

$٨٠ + (ن-٣)(ن-٤) = ٢٠(ن-٣)$

∴ $٨٠ + ن^{٢} - ٧ن + ١٢ = ٢٠ن - ٦٠$ ∴ $ن^{٢} - ٢٧ن + ١٥٢ = ٠$

∴ $(ن-١٩)(ن-٨) = ٠$ ∴ ن = ١٩ أو ن = ٨

الاختبار السابع

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الرابع :

(أ) فى مفكوك $(1 + س)^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان :

$ح_3 = 17$ ، $3\, ح_2 × ح_4 = 544$ أوجد قيمة كل من : ن ، س

الحل

∵ $ح_3 = 17$ ∴ ${}^{ن}ق_2\, س^2 = 17$ (أ)

، ∵ $3\, ح_2 × ح_4 = 544$ بالقسمة ÷ $(ح_3)^2$

∴ $3 × \frac{ح_2}{ح_3} × \frac{ح_4}{ح_3} = \frac{445}{17 × 17}$

∴ $3 × \frac{2}{ن - 2 + 1} × \frac{1}{س} × \frac{ن - 3 + 1}{3} × \frac{س}{1} = \frac{32}{17}$

∴ $\frac{ن - 2}{ن - 1} = \frac{16}{17}$ ∴ $16ن - 16 = 17ن - 34$

∴ $ن = 18$ بالتعويض (أ) ينتج : ${}^{18}ق_2\, س^2 = 17$

∴ $153\, س^2 = 17$ ∴ $س^2 = \frac{1}{9}$ ∴ $س = ± \frac{1}{3}$

الاختبار الثامن

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الخامس :

(أ) فى مفكوك $(س^2 + \frac{1}{2س})^{3ن}$ حسب قوى س التنازلية

أولاً : أثبت أن الحد الخالى من س رتبته $(2ن + 1)$

ثانياً : أوجد النسبة بين الحد الخالى من س و الحد الأوسط

عندما $ن = 4$ ، $س = 1$

الحل

أولاً : نفرض أن : الحد الخالى من س هو الحد العام

∴ $ح_{ر+1} = {}^{3ن}ق_ر \left(\frac{1}{2س}\right)^{ر} (س^2)^{3ن - ر}$

$= {}^{3ن}ق_ر × (2)^{-ر} × س^{-ر} × س^{6ن - 2ر}$

$= {}^{3ن}ق_ر × (2)^{-ر} × س^{6ن - 3ر}$

نضع : $6ن - 3ر = 0$ ∴ $6ن = 3ر$ ∴ $ر = 2ن$

∴ رتبة الحد الخالى من س $= 2ن + 1$

ثانياً : عندما : $ن = 4$ ∴ عدد الحدود $= 12$

، رتبة الحد الأوسط $= \frac{12}{2} + 1 = 7$

، رتبة الحد الخالى من س $= 2 × 4 + 1 = 9$

، رتبة الحد الخالى من س $= 2 × 4 + 1 = 9$

∴ $\frac{ح_9}{ح_7} = \frac{ح_9}{ح_8} × \frac{ح_8}{ح_7} = \frac{12 - 8 + 1}{8} × \frac{\frac{1}{2}}{1} × \frac{12 - 7 + 1}{7} × \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{15}{112}$

الاختبار التاسع

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(ب) أثبت أن الحد الخالى من س فى مفكوك $(س^2 + \frac{1}{س^3})^{5ن}$

حيث $ن ∈ ص^{+}$ يساوى $\frac{\lfloor 5ن}{\lfloor 2ن \; \lfloor 3ن}$

الحل

نفرض أن : الحد الخالى من س هو الحد العام

$\therefore\ ع_{ر+1} = {}^{5ن}ق_{ر}\ \left(\frac{1}{س^{3}}\right)^{ر}\ (س^{2})^{5ن-ر}$

$= {}^{5ن}ق_{ر} \times س^{-3ر} \times س^{10ن-2ر} = {}^{5ن}ق_{ر} \times س^{10ن-5ر}$

نضع : $10ن - 5ر = 0$ $\therefore 10ن = 5ر$ $\therefore ر = 2ن$

$\therefore$ الحد الخالى من س $= {}^{5ن}ق_{2ن} = \frac{\lfloor 5ن}{\lfloor 2ن \ \lfloor 3ن}$

$\because {}^{س+ص}ل_{4} = 360$ $\therefore {}^{س+ص}ل_{4} = {}^{6}ل_{4}$ $\therefore س + ص = 6$ (١)

، $\because$ $= 5050$ $\therefore$ $=$ $\therefore 2س + ص = 7$ (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج : $س = 1$ ، بالتعويض فى (١) ينتج : $ص = 5$

$\therefore {}^{ص}ق_{2س} = {}^{5}ق_{2} = 10$

الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $1 - 6س + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} س^{2} + \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} س^{3} + \ \ldots\ + س^{6} = 64$

فإن : س = ...

(أ) -1 (ب) 3 (جـ) $\{-1 ، 3\}$ (د) 2

الحل

الطرف الأيمن $= (1 - س)^{6}$ $\therefore (1 - س)^{6} = 64 = (2)^{6}$

$\therefore 1 - س = 2$ و منها : $س = -1$

أو : $1 - س = -2$ و منها : $س = 3$

من (١) ، (٢) ، (٣) $\therefore ن = 2$

$\therefore$ طول الضلع الأول $=$ $= 2$

، طول الضلع الثانى $=$ $= 1$ ، طول الضلع الثانى $= 2$ $= 2$

$\therefore$ محيط المثلث $= 2 + 1 + 2 = 5$ وحدة طول

أحمد الشنتورى

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $(2س - 3)^{15}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل : $13ع_{3} + 10ع_{4} + ع_{5} =$ صفر

الحل

$\because 13ع_{3} + 10ع_{4} + ع_{5} =$ صفر بالقسمة ÷ $ع_{4}$ ينتج :

$13 \times \frac{ع_{3}}{ع_{4}} + 10 + \frac{ع_{5}}{ع_{4}} = 0$

$\therefore 13 \times \frac{3}{15 - 3 + 1} \times \frac{-3}{2س} + 10 + \frac{15 - 4 + 1}{4} \times \frac{2س}{-3} = 0$

$\therefore 13 \times \frac{3}{13} \times \frac{-3}{2س} + 10 + \frac{12}{4} \times \frac{2س}{-3} = 0$

$\therefore \frac{-9}{2س} + 10 - 2س = 0$ بالضرب × $-2س$ ينتج :

$4س^{2} - 20س + 9 = 0$ $\therefore (2س - 9)(2س - 1) = 0$

$\therefore س = \frac{9}{2}$ أو $س = \frac{1}{2}$

تم بحمد الله و عونه

أحمد الشنتورى

المتميز

فى

الرياضيات البحتة

الجبر

الجزء النظرى
و
حلول التمارين
الوحدة الثانية

$\tilde{ع}_{ر}$ | $ه^{\pi ت}$ | $م^{مل}$ | ω

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى
القسم العلمى
شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الثانية .... الأعداد المركبة

٢ – ١ الصورة المثلثية للعدد المركب

تذكر ما يلى :

[١] العدد التخيلى " ت " :

هو العدد الذى مربعه = –١ أى : $ت^{٢} = -١$ حيث : ت ∉ ح

ملاحظات :

(١) العدد التخيلى : – ت معكوس جمعى للعدد التخيلى : ت

(٢) ∵ ت ، – ت ∉ ح

∴ لا يمكن تمثيلهما على خط الأعداد الحقيقية

[٢] القوى الصحيحة للعدد : ت تعطى إحدى القيم :

ت ، –١ ، – ت ، ١

ملاحظات :

(١) قيم العدد : ت تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار ٤ :

(٢) لإيجاد $ت^{ن}$ حيث : ن ∈ $ص^{+}$ نقسم ن على ٤

فيكون : $ت^{ن}$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

باقى القسمة	٠	١	٢	٣
القيمة	١	ت	–١	– ت

(٣) لإيجاد $ت^{ن}$ حيث : ن ∈ $ص^{-}$ نقسم ن على ٤

فيكون : $ت^{ن}$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

باقى القسمة	٠	–١	–٢	–٣
القيمة	١	– ت	–١	ت

حيث : $ت^{-١} = \frac{١}{ت} = \frac{ت^{٤}}{ت} = ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$

أو $ت^{-١} = ت^{-١} \times ت^{٤} = ت^{٣} = ت^{٢} \times ت = -ت$

، $ت^{-٢} = \frac{١}{ت^{٢}} = \frac{ت^{٤}}{ت^{٢}} = ت^{٢} = -١$

أو $ت^{-٢} = ت^{-٢} \times ت^{٤} = ت^{٢} = -١$

، $ت^{-٣} = \frac{١}{ت^{٣}} = \frac{ت^{٤}}{ت^{٣}} = ت$

أو $ت^{-٣} = ت^{-٣} \times ت^{٤} = ت$

(٤) يمكن التعبير عن الواحد الصحيح باستخدام العدد : ت مرفوعاً لقوى صحيحة من مضاعفات العدد ٤

و يساعد ذلك فى تبسيط بعض الأعداد التخيلية

[٣] مجموعة الأعداد التخيلية " ت " :

ت = { س : س = ا ت ، ا ∈ ح ، $ت^{٢} = -١$ } أى هى :

كل عدد يكتب على الصورة : ا ت حيث : ا ∈ ح ، $ت^{٢} = -١$

[٤] العدد المركب :

هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة :

ع = أ + ب ت حيث : أ ، ب ∈ ح ، ت^{2} = −١

، و يسمى : أ بالجزء الحقيقى ، ب بالجزء التخيلى

ملاحظات :

(١) إذا كان : ع = أ + ب ت ، كان : ب = ٠ فإن : ع = أ
و يكون : ع حقيقياً

(٢) إذا كان : ع = أ + ب ت ، كان : أ = ٠ فإن : ع = ب ت
و يكون : ع تخيلياً

(٣) أى عدد حقيقى هو عدد مركب جزؤه التخيلى = صفر

(٤) أى عدد تخيلى هو عدد مركب جزؤه الحقيقى = صفر

[٥] مجموعة الأعداد المركبة " ك " :

ك { أ + ب ت : أ ∈ ح ، ب ∈ ح ، ت^{2} = −١ }

ملاحظة :

أى معادلة من الدرجة الثانية لها حل فى مجموعة الأعداد المركبة

[٦] تساوى عددين مركبين :

يتساوى العددان المركبان إذا و فقط إذا تساوى الجزأن الحقيقيان و تساوى الجزأن التخيليان أى أن :

إذا كان : أ + ب ت = حـ + ء ت

فإن : أ = حـ ، ب = ء و العكس صحيح

خاصية : إذا كان : أ + ب ت = ٠ فإن : أ = ٠ ، ب = ٠

[٧] العمليات على الأعداد المركبة :

يمكن إستخدام خواص الإبدال و الدمج و التوزيع عند جمع و ضرب الأعداد المركبة

[٨] العددان المترافقان :

العددان : ع = أ + ب ت ، ع = أ − ب ت
يسميان بالعددين المترافقين

ملاحظات :

(١) العدد المركب و مرافقه لا يختلفان إلا فى إشارة الجزء التخيلى منهما

(٢) العددان : ت ، −ت مترافقان

[٩] بعض خواص العددان المترافقان :

(١) مجموع العددين المترافقين هو عدد حقيقى

حيث : (أ + ب ت) + (أ − ب ت) = ٢ أ ∈ ح

(٢) حاصل ضرب العددين المترافقين هو عدد حقيقى

حيث : (أ + ب ت) + (أ − ب ت) = أ^{2} + ب^{2} ∈ ح

تمثيل العدد المركب " مستوى أرجاند " :

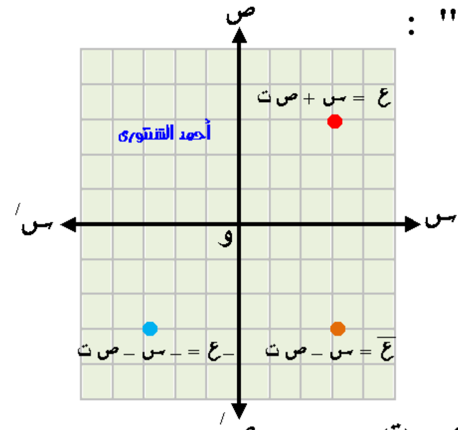
لتمثيل العدد المركب :

ع = س + ص ت

نرسم مستوى احداثيات متعامدة و نجعل المحور الأفقى ←س س'→ يمثل الجزء الحقيقى من العدد المركب و المحور الرأسى ←ص ص'→ يمثل الجزء التخيلى من العدد المركب فتكون النقطة التى احداثيها (س ، ص) تمثل العدد المركب : ع = س + ص ت كما فى الشكل المقابل و منه نلاحظ :

(١) النقطتان اللتان تمثلان العددين : ع ، – ع متمثلتين بالنسبة لنقطة الأصل (و)

(٢) النقطتان اللتان تمثلان العددين : ع ، ع̄ متمثلتين بالنسبة للمحور ←س س'→



الاحداثيات القطبية و الديكارتية :

الشكل المقابل يمثل : دائرة طول نصف قطرها ل ، أ (س ، ص) تقع على الدائرة و تقابل زاوية θ

من الشكل نجد أن :

ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ ،

حتا θ = $\frac{س}{ل}$ ، حا θ = $\frac{ص}{ل}$

أى أن : س = ل حتا θ ، ص = ل حا θ

، ظا θ = $\frac{ص}{س}$ أى أن : θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

و الشكل المقابل الذى مثلت فيه النقطة أ (س ، ص) يسمى بالمستوى الديكارتى مركزه نقطة الأصل (و) ، إذا أعتبرنا نقطة أخرى ثابتة تسمى " القطب " تنطبق على النقطة (و) ، و محور يسمى " المحور القطبى " ينطبق على الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن : هذا المستوى يسمى " المستوى القطبى "

و بذلك يمكن تحويل الاحداثيات الديكارتية إلى قطبية و العكس

تحويل الاحداثيات القطبية إلى احداثيات ديكارتية :

إذا كانت : النقطة أ فى الاحداثيات القطبية هى (ل ، θ) فإن : الاحداثيات الديكارتية لنفس النقطة هى (س ، ص) حيث :

س = ل حتا θ ، ص = ل حا θ

و يكون : (س ، ص) = (ل حتا θ ، ل حا θ)

إجابة حاول أن تحل (أ) صفحة ٣٩

مثل على شكل أرجاند كل من الأعداد :

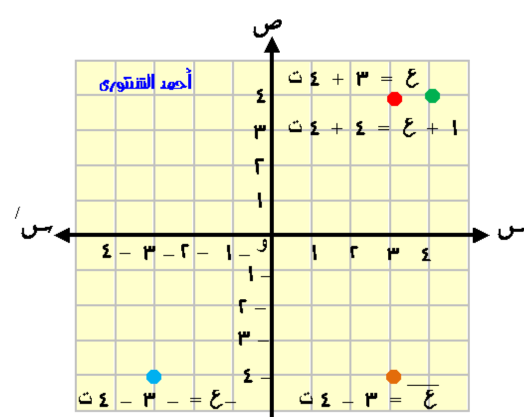
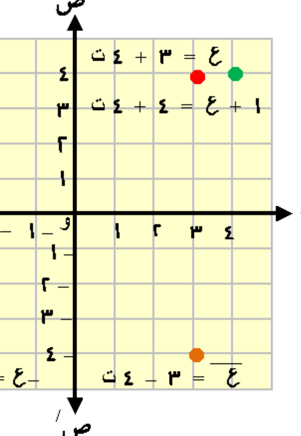
ع = ٣ + ٤ ت ، ع̄ ، –ع ، ١ + ع

الحل

لاحظ :

ع̄ = ٣ – ٤ ت ، ع̄ صورة العدد ع بالانعكاس فى محور س ،

–ع = –٣ – ٤ ت ، –ع صورة العدد ع بالانعكاس فى نقطة الأصل

إجابة تفكير ناقد صفحة ٣٩

ما الذى تمثله جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقى يساوى ٢ على شكل أرجاند

الحل

جميع الأعداد المركبة ع التى جزءها الحقيقى يساوى ٢ تمثل على شكل أرجاند مستقيم يوازى المحور الرأسى و يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

المقياس و السعة للعدد المركب :

إذا كان : ع = س + ص ت عدداً مركباً تمثله نقطة ع (س ، ص) فى مستوى أرجاند ، فإن :

(١) مقياس العدد ع : هو بعده عن نقطة الأصل (و) ، و يرمز بالرمز | ع | أو ل ، و يكون :

| ع | = ل = $\sqrt{س^2 + ص^2}$

(٢) سعة العدد ع : تسمى θ بسعة العدد المركب ، و يكون :

ظا θ = $\frac{ص}{س}$ أى أن : θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

الصورة المثلثية (القطبية) للعدد المركب :

إذا كان : ع = س + ص ت (الصورة الجبرية) عدداً مركباً مقياسه ل و سعته الأساسية θ حيث : θ ∈] −π ، π]

فإنه يكتب بالصورة : ع = ل (حتا θ ، حا θ)

حيث : س = ل حتا θ ، ص = ل حا θ

، و يتحدد قياس θ تبعاً للجدولين التاليين :

س	ص	موقع θ فى الربع	قياس θ
> ٠	> ٠	الأول	ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)
< ٠	> ٠	الثانى	π + ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)
< ٠	< ٠	الثالث	−π + ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)
> ٠	< ٠	الرابع	ظا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$)

س	ص	قياس θ
> ٠	= ٠	٠
< ٠	= ٠	π
= ٠	> ٠	$\frac{١}{٢}$ π
= ٠	< ٠	− $\frac{١}{٢}$ π

ملاحظات :

(١) الصورة المثلثية لقوى العدد ت :

١) ١ = حتا ٠ + حا ٠

٢) −١ = حتا π + حا π

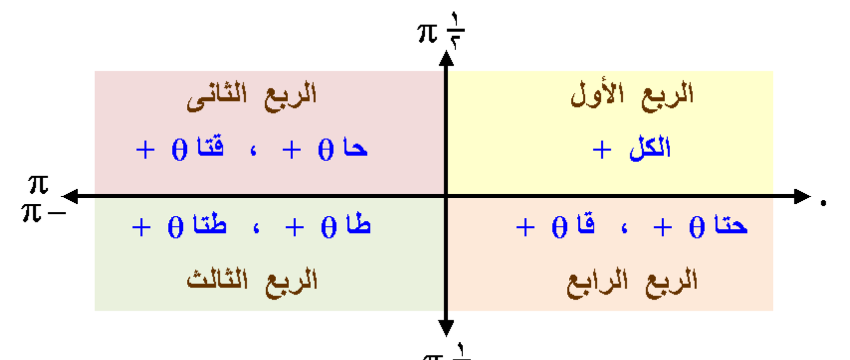
٣) ت = حتا $\frac{١}{٢}$ π + حا $\frac{١}{٢}$ π

٤) −ت = حتا (− $\frac{١}{٢}$ π) + حا (− $\frac{١}{٢}$ π)

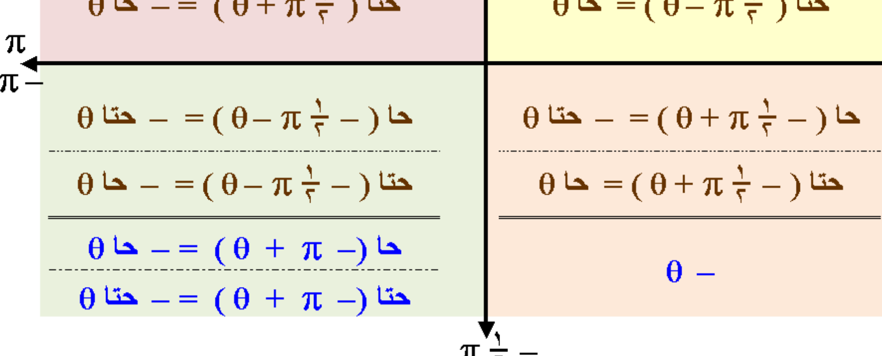
(٢) الدوال المثلثية لبعض الزوايا :

θ		حا θ	حتا θ	ظا θ
$\frac{١}{٦}$ π	٣٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
$\frac{١}{٤}$ π	٤٥°	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
$\frac{١}{٣}$ π	٦٠°	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$

(٣) إشارات الدوال المثلثية تكون كما يلى :



(٤) الدوال المنتسبة :



(٥) تذكر أن :

للتحويل من قياس ستينى إلى قياس دائرى و العكس نستخدم :

$$\frac{\theta^{\circ}}{١٨٠^{\circ}} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٤٠

أوجد المقياس و السعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية :

(أ) $ع_١ = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت　　(ب) $ع_٢ = ١ - \sqrt{٣}$ ت

(جـ) $ع_٣ = -\sqrt{٣}$ ت　　(ء) $ع_٤ = ٥$

الحل

(أ) ∵ $ع_١ = \sqrt{٢} + \sqrt{٢}$ ت

∴ س $= \sqrt{٢}$ ، ص $= \sqrt{٢}$

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ $ع_١$ يقع فى الربع الأول

، ل $= \sqrt{٢ + ٢} = ٢$ وحدة طول

، $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}\right) = ظا^{-١}(١) = \frac{١}{٤}\pi$

∴ مقياس العدد $ع_١$ = ٢ وحدة طول ، سعته الأساسية = $\frac{١}{٤}\pi$

(ب) ∵ $ع_٢ = ١ - \sqrt{٣}$ ت

∴ س = ١ ، ص $= -\sqrt{٣}$

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ $ع_٢$ يقع فى الربع الرابع

، ل $= \sqrt{١ + ٣} = ٢$ وحدة طول

، $\theta = ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = -\frac{١}{٣}\pi$

∴ مقياس العدد $ع_٢$ = ٢ وحدة طول ، سعته الأساسية = $-\frac{١}{٣}\pi$

(حـ) ∵ $ع_٣ = -\sqrt{٣}$ ت

∴ س = ٠ ، ص = $-\sqrt{٣}$

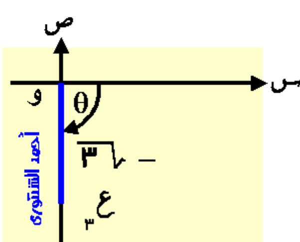
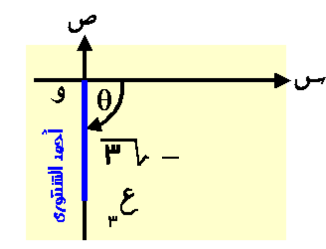
، ∵ س = ٠ ، ص < ٠

∴ $ع_٣$ يقع على محور ص ،

ل = $\sqrt{٠ + ٣} = \sqrt{٣}$ وحدة طول

، θ = $-\frac{١}{٢}π$

∴ مقياس العدد $ع_٣ = \sqrt{٣}$ وحدة طول ، سعته الأساسية = $-\frac{١}{٢}π$

(ء) ∵ $ع_٤ = ٥$

∴ س = ٥ ، ص = ٠

، ∵ س > ٠ ، ص = ٠

، $ع_٤$ يقع على محور ص ،

ل = $\sqrt{٢٥ + ٠}$ = ٥ وحدة طول

∴ θ = صفر

∴ مقياس العدد $ع_٤$ = ٥ وحدة طول ، سعته الأساسية = صفر

خواص المقياس و السعة لعدد المركب :

لكل عدد مركب : ع = س + ص ت ، و سعته θ يكون :

(١) | ع | ≥ صفر　أى : $س^٢ + ص^٢$ ≥ صفر

(٢) | ع | = ٠　إذا كان : ع = ٠ .

(٣) سعة العدد المركب صفر غير معرفة لأن المتجه الصفرى ليس له اتجاه

(٤) سعة العدد المركب تأخذ عدداً غير منته من القيم ، و ذلك بإضافة عدد صحيح من الدورات ٢ π

أى أن : سعة العدد المركب = θ + ٢ π ن حيث : ن عدد صحيح

بينما سعته الأساسية هى θ حيث : θ ∈] -π ، π]

(٤) | ع | = | $\overline{ع}$ | = | -ع | = | $-\overline{ع}$ |

حيث : $\overline{ع}$ هو مرافق العدد ع

(٥) ع . $\overline{ع}$ = $|ع|^٢$ = $|\overline{ع}|^٢$

إجابة تفكير ناقد صفحة ٤٠

إذا كانت السعة الأساسية للعدد ع هى θ فأوجد السعة الأساسية لكل من الأعداد : -ع ، $\overline{ع}$ ، $\frac{١}{ع}$

الحل

بفرض أن : ع = ل (حتا θ + ت حا θ) فيكون :

-ع = -ل (حتا θ + ت حا θ)

= ل (-حتا θ - ت حا θ)

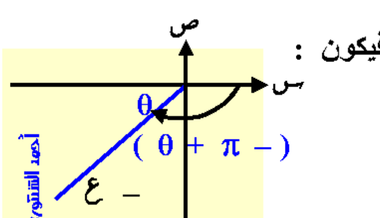
∴ س < ٠ ، ص < ٠

∴ -ع يقع فى الربع الثالث

∴ السعة الأساسية للعدد (-ع) = - (π - θ)

= (-π + θ)

، -ع = ل [حتا (-π + θ) + ت حا (-π + θ)]



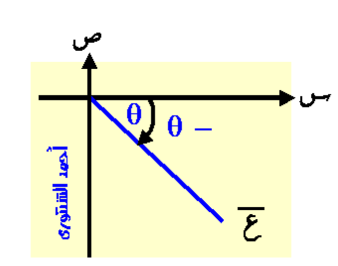
$\overline{ع}$ = ل (حتا θ - ت حا θ)

∴ س > ٠ ، ص < ٠

∴ -ع يقع فى الربع الرابع

∴ السعة الأساسية للعدد ($\overline{ع}$) = -θ

، $\overline{ع}$ = ل [حتا (-θ) + ت حا (-θ)]

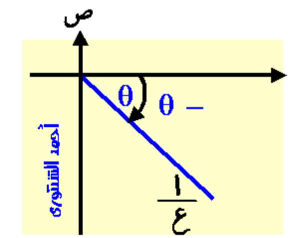
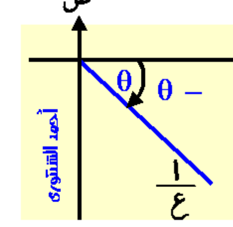


$$\frac{1}{ع} = ع^{-1} = \frac{1}{ل\,(حا\theta + ت\ حتا\theta)}$$

$$= \frac{(حا\theta - ت\ حتا\theta)}{ل\,(حا\theta + ت\ حتا\theta)(حا\theta - ت\ حتا\theta)}$$

$$= \frac{1}{ل} \times \frac{(حا\theta - ت\ حتا\theta)}{حا^2\theta + حتا^2\theta} = \frac{1}{ل}\,(حا\theta - ت\ حتا\theta)$$

$$= \frac{1}{ل}\,[\,حتا(-\theta) + ت\ حا(-\theta)\,]$$ " تذكر : $حا^2\theta + حتا^2\theta = 1$ "

∴ س > ٠ ، ص < ٠

∴ $\frac{1}{ع}$ يقع فى الربع الرابع

∴ السعة الأساسية للعدد $(\frac{1}{ع}) = -\theta$

، $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل}\,[\,حتا(-\theta) + ت\ حا(-\theta)\,]$

ملاحظة :

يمكن بالمثل ايجاد السعة الأساسية للأعداد التالية :

(١) إذا كان : $ع = ل\,(-حتا\theta + ت\ حا\theta)$

فإن : س < ٠ ، ص > ٠

، ع يقع فى الربع الثانى

، السعة الأساسية $= (\pi - \theta)$

، $ع = ل\,[\,حتا(\pi - \theta) + ت\ حا(\pi - \theta)\,]$

(٢) إذا كان : $ع = ل\,(حا\theta + ت\ حتا\theta)$

فإن : س > ٠ ، ص > ٠

، ع يقع فى الربع الأول

، السعة الأساسية $= (\frac{1}{2}\pi - \theta)$

، $ع = ل\,[\,حتا(\frac{1}{2}\pi - \theta) + ت\ حا(\frac{1}{2}\pi - \theta)\,]$

(٣) إذا كان : $ع = ل\,(-حا\theta + ت\ حتا\theta)$

فإن : س < ٠ ، ص > ٠

، ع يقع فى الربع الثانى

، السعة الأساسية $= (\frac{1}{2}\pi + \theta)$

$ع = ل\,[\,حتا(\frac{1}{2}\pi + \theta) + ت\ حا(\frac{1}{2}\pi + \theta)\,]$

(٤) إذا كان : $ع = ل\,(-حا\theta - ت\ حتا\theta)$

فإن : س < ٠ ، ص < ٠

، ع يقع فى الربع الثالث

، السعة الأساسية $= -(\frac{1}{2}\pi + \theta)$

$= (-\frac{1}{2}\pi - \theta)$

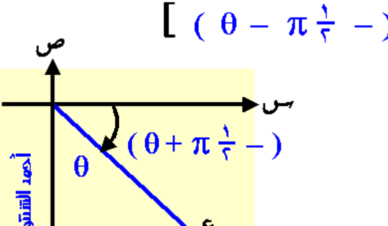
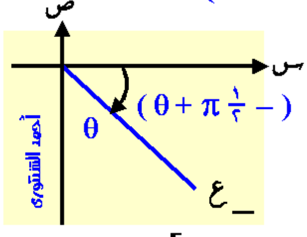
$ع = ل\,[\,حتا(-\frac{1}{2}\pi - \theta) + ت\ حا(-\frac{1}{2}\pi - \theta)\,]$

(٥) إذا كان : $ع = ل\,(حا\theta - ت\ حتا\theta)$

فإن : س > ٠ ، ص < ٠

، ع يقع فى الربع الرابع

، السعة الأساسية $= (-\frac{1}{2}\pi + \theta)$

$ع = ل\,[\,حتا(-\frac{1}{2}\pi + \theta) + ت\ حا(-\frac{1}{2}\pi + \theta)\,]$

(٦) $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل\,(حتا\theta - ت\ حا\theta)}$

$$= \frac{(حتا\theta + ت\ حا\theta)}{ل\,(حتا\theta - ت\ حا\theta)(حتا\theta + ت\ حا\theta)}$$

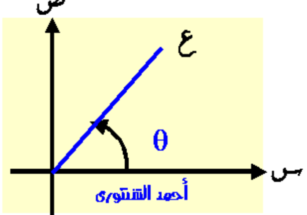
$$= \frac{1}{ل} \times \frac{(حتا\theta + ت\ حا\theta)}{حتا^2\theta + حا^2\theta} = \frac{1}{ل}\,(حتا\theta + ت\ حا\theta)$$

∴ س > ٠ ، ص > ٠

، $\frac{1}{ع}$ يقع فى الربع الأول

، السعة الأساسية = θ

، $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ل}$ (حتا θ + ت حا θ)



إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٤١

أكتب كلاً الأعداد الآتية في الصورة المثلثية :

(أ) $ع_1$ = ٨   (ب) $ع_2$ = ٥ ت   (حـ) $ع_3$ = − ٣ − ٣ ت

الحل

(أ) ∵ $ع_1$ = ٨

∴ س = ٨ ، ص = ٠

، ∵ س > ٠ ، ص = ٠

∴ $ع_1$ يقع على محور س

، ل = $\sqrt{٦٤ + ٠}$ = ٨ وحدة طول

، θ = صفر ∴ $ع_1$ = ٨ (حتا ٠ + ت حا ٠)

(ب) ∵ $ع_2$ = ٥ ت

∴ س = ٠ ، ص = ٥

، ∵ س = ٠ ، ص > ٠

∴ $ع_2$ يقع على محور ص

، ل = $\sqrt{٠ + ٢٥}$ = ٥ وحدة طول

، θ = $\frac{1}{2}$π ∴ $ع_2$ = ٥ (حتا $\frac{1}{2}$π + ت حا $\frac{1}{2}$π)

(حـ) ∵ $ع_3$ = − ٣ − ٣ ت

∴ س = − ٣ ، ص = − ٣

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠

∴ $ع_3$ يقع فى الربع الثالث

، ل = $\sqrt{٩ + ٩}$ = ٢ $\sqrt{٣}$ وحدة طول

، θ = − π + ظا$^{-1}$ ($\frac{-٣}{-٣}$) = − π + ظا$^{-1}$ (١)

= − π + $\frac{1}{4}$π = − $\frac{3}{4}$π

∴ $ع_3$ = ٢ $\sqrt{٣}$ [حتا (− $\frac{3}{4}$π) + ت حا (− $\frac{3}{4}$π)]

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٤١

أوجد المقياس و السعة الأساسية لكل من الأعداد المركبة الآتية :

(أ) $ع_1$ = ٢ (حتا $\frac{1}{3}$π − ت حا $\frac{1}{3}$π)

(ب) $ع_2$ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (حا ٤٥° − ت حتا ٤٥°)

الحل

(أ) ∵ $ع_1$ = ٢ (حتا $\frac{1}{3}$π − ت حا $\frac{1}{3}$π)

∴ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ $ع_1$ يقع فى الربع الرابع

∴ $ع_1$ = ٢ [حتا (− $\frac{1}{3}$π) + ت حا (− $\frac{1}{3}$π)]

∴ مقياس $ع_1$ = ٢ ، سعته الأساسية = (− $\frac{1}{3}$π)

(ب) ∵ $ع_2$ = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (حا ٤٥° − ت حتا ٤٥°)

= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (− حا ٤٥° + ت حتا ٤٥°)

∴ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ $ع_2$ يقع فى الربع الثانى

$$\therefore \text{ع}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\text{حتا}(90^\circ + 45^\circ) + \text{ت حا}(90^\circ + 45^\circ) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\text{حتا } 135^\circ + \text{ت حا } 135^\circ \right)$$

$\therefore$ مقياس $\text{ع}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، سعته الأساسية $= 135^\circ$

ضرب و قسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة المثلثية :

إذا كان : $\text{ع}_1 = \text{ل}_1 \left(\text{حتا}\,\theta_1 + \text{ت حا}\,\theta_1 \right)$ ،

$\text{ع}_2 = \text{ل}_2 \left(\text{حتا}\,\theta_2 + \text{ت حا}\,\theta_2 \right)$ فإن :

(1) $\text{ع}_1 \text{ع}_2 = \text{ل}_1 \text{ل}_2 \left[\text{حتا}(\theta_1 + \theta_2) + \text{ت} \left(\text{حا}(\theta_1 + \theta_2) \right) \right]$

أى أن : $|\text{ع}_1 \text{ع}_2| = \text{ل}_1 \text{ل}_2 = |\text{ع}_1|\,|\text{ع}_2|$

، سعة $(\text{ع}_1 \text{ع}_2) = (\theta_1 + \theta_2)$

البرهان :

$$\text{ع}_1 \text{ع}_2 = \text{ل}_1 \text{ل}_2 \left(\text{حتا}\,\theta_1 + \text{ت حا}\,\theta_1 \right) \left(\text{حتا}\,\theta_2 + \text{ت حا}\,\theta_2 \right)$$

$$= \text{ل}_1 \text{ل}_2 \left(\text{حتا}\,\theta_1 \text{حتا}\,\theta_2 + \text{ت حا}\,\theta_1 \text{حتا}\,\theta_2 \right.$$

$$\left. + \text{ت حتا}\,\theta_1 \text{حا}\,\theta_2 - \text{حا}\,\theta_1 \text{حا}\,\theta_2 \right)$$

$$= \text{ل}_1 \text{ل}_2 \left(\left[\text{حتا}\,\theta_1 \text{حتا}\,\theta_2 - \text{حا}\,\theta_1 \text{حا}\,\theta_2 \right] \right.$$

$$\left. + \text{ت} \left[\text{حا}\,\theta_1 \text{حتا}\,\theta_2 + \text{حتا}\,\theta_1 \text{حا}\,\theta_2 \right] \right)$$

$$= \text{ل}_1 \text{ل}_2 \left[\text{حتا}(\theta_1 + \theta_2) + \text{ت} \left(\text{حا}(\theta_1 + \theta_2) \right) \right]$$

أى أن :

مقياس حاصل ضرب عددين مركبين = حاصل ضرب مقياسيهما

سعة حاصل ضرب عددين مركبين = مجموع سعتيهما

(2) $\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} \left[\text{حتا}(\theta_1 - \theta_2) + \text{ت} \left(\text{حا}(\theta_1 - \theta_2) \right) \right]$

أى أن : $\left| \frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} \right| = \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} = \frac{|\text{ع}_1|}{|\text{ع}_2|}$

، سعة $\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} \right) = (\theta_1 - \theta_2)$

البرهان :

$$\frac{\text{ع}_1}{\text{ع}_2} = \frac{\text{ل}_1 (\text{حتا}\,\theta_1 + \text{ت حا}\,\theta_1)}{\text{ل}_2 (\text{حتا}\,\theta_2 + \text{ت حا}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{\text{ل}_1 (\text{حتا}\,\theta_1 + \text{ت حا}\,\theta_1)(\text{حتا}\,\theta_2 - \text{ت حا}\,\theta_2)}{\text{ل}_2 (\text{حتا}\,\theta_2 + \text{ت حا}\,\theta_2)(\text{حتا}\,\theta_2 - \text{ت حا}\,\theta_2)}$$

$$= \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} \times \frac{(\text{حتا}\,\theta_1 \text{حتا}\,\theta_2 + \text{حا}\,\theta_1 \text{حا}\,\theta_2) + \text{ت}(\text{حا}\,\theta_1 \text{حتا}\,\theta_2 - \text{حتا}\,\theta_1 \text{حا}\,\theta_2)}{\text{حتا}^2\theta_2 + \text{ت حا}^2\theta_2}$$

$$= \frac{\text{ل}_1}{\text{ل}_2} \left[\text{حتا}(\theta_1 - \theta_2) + \text{ت} \left(\text{حا}(\theta_1 - \theta_2) \right) \right]$$

أى أن :

مقياس خارج قسمة عددين مركبين = خارج قسمة مقياسيهما

سعة خارج قسمة عددين مركبين = الفرق بين سعتيهما

نتيجة :

إذا كان : $\text{ع} = \text{ل} \left(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta \right)$ فإن :

$$\text{ع}^2 = \text{ل}^2 \left(\text{حتا}\,2\theta + \text{ت حا}\,2\theta \right)$$

البرهان :

$ع^٢$ = ل (حتا θ + ت حا θ) × ل (حتا θ + ت حا θ)

= $ل^٢$ [حتا (θ + θ) + ت حا (θ + θ)]

= $ل^٢$ (حتا ٢θ + ت حا ٢θ)

تعميم :

إذا كان : $ع_١$ = $ل_١$ (حتا $θ_١$ + ت حا $θ_١$) ،

$ع_٢$ = $ل_٢$ (حتا $θ_٢$ + ت حا $θ_٢$) ، ..... ،

$ع_ن$ = $ل_ن$ (حتا $θ_ن$ + ت حا $θ_ن$) فإن :

$ع_١ ع_٢ ع_٣$ .... $ع_ن$ = $ل_١ ل_٢ ل_٣$ .... $ل_ن$ ×

[حتا ($θ_١ + θ_٢ + ... + θ_ن$) + ت حا ($θ_١ + θ_٢ + ... + θ_ن$)]

حالة خاصة :

إذا كان : $ع_١$ = $ع_٢$ = ... = $ع_ن$ = ل (حتا θ + ت حا θ)

فإن : $ع^ن$ = $ل^ن$ (حتا ن θ + ت حا ن θ)

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٤٣

عبر عن : ٢ (حتا $\frac{١}{١٥}π$ + ت حا $\frac{١}{١٥}π$) ×

٣ [حتا ($-\frac{٢}{٥}π$) + ت حا ($-\frac{٢}{٥}π$)]

بالصورة : س + ص ت

الحل

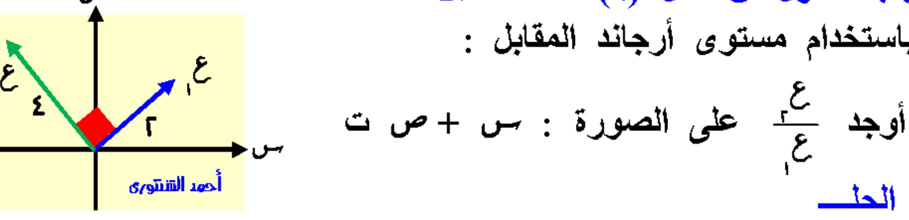
المقدار = ٢ × ٣ [حتا ($\frac{١}{١٥}π - \frac{٢}{٥}π$) + ت حا ($\frac{١}{١٥}π - \frac{٢}{٥}π$)]

= ٦ [حتا ($-\frac{١}{٣}π$) + ت حا ($-\frac{١}{٣}π$)]

= ٦ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ٣ − ٣$\sqrt{٣}$ ت

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٤٣

باستخدام مستوى أرجاند المقابل :



أوجد $\frac{ع_٢}{ع_١}$ على الصورة : س + ص ت

الحل

من هندسة الشكل إذا كان : $ع_١$ = ٢ (حتا θ + ت حا θ)

فإن : $ع_٢$ = ٤ [حتا ($\frac{١}{٢}π$ + θ) + ت حا ($\frac{١}{٢}π$ + θ)]

∴ $\frac{ع_٢}{ع_١}$ = $\frac{٤}{٢}$ [حتا ($\frac{١}{٢}π$ + θ − θ) + ت حا ($\frac{١}{٢}π$ + θ − θ)]

= ٢ (حتا $\frac{١}{٢}π$ + ت حا $\frac{١}{٢}π$) = ٢ ت

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ٤٤

إذا كان : $ع_١$ = ٢ (حتا ١٠° + ت حا ١٠°) ،

$ع_٢$ = ٣ (حتا ٤٠° + ت حا ٤٠°) أوجد العدد : $ع_١^٤ ع_٢^٢$

على الصورة : س + ص ت

الحل

∵ $ع_١$ = ٢ (حتا ١٠° + ت حا ١٠°)

∴ $ع_١^٤$ = $[٢ (حتا ١٠° + ت حا ١٠°)]^٤$ = ١٦ (حتا ٤٠° + ت حا ٤٠°)

، ∵ $ع_٢$ = ٣ (حتا ٤٠° + ت حا ٤٠°)

∴ $ع_٢^٢$ = $[٣ (حتا ٤٠° + ت حا ٤٠°)]^٢$ = ٩ (حتا ٨٠° + ت حا ٨٠°)

$$\therefore\ \text{ع}_1\,\text{ع}_2^{\,4}\,\text{ع}_3^{\,2} = 16 \times 9\ [\ \text{حتا}\,(40^\circ + 80^\circ) + \text{ت حا}\,(40^\circ + 80^\circ)\ ]$$

$$= 144\ (\ \text{حتا}\ 120^\circ + \text{ت حا}\ 120^\circ\ )$$

$$= 144 \times (\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ ) = 720 + 720\sqrt{3}\ \text{ت}$$

الصورة الأسية للعدد المركب (صورة أويلر) :

كل دالة فى المتغير س يمكن التعبير عنها كمتسلسلة من قوى س تسمى **متسلسلة تايلور** حيث :

إذا كانت الدالة : ص = د (س)

قابلة للاشتقاق المتكرر عند النقطة س = أ فإن :

$$\text{د}(\text{س}) = \text{د}(\text{أ}) + (\text{س} - \text{أ}) \times \frac{\text{د}'(\text{أ})}{\lfloor 1} + (\text{س} - \text{أ})^2 \times \frac{\text{د}''(\text{أ})}{\lfloor 2} + \dots + (\text{س} - \text{أ})^{\text{ن}} \times \frac{\text{د}^{(\text{ن})}(\text{أ})}{\lfloor \text{ن}} + \dots$$

حالة خاصة :

إذا كانت : أ = ٠ فإن :

$$\text{د}(\text{س}) = \text{د}(0) + \text{س} \times \frac{\text{د}'(0)}{\lfloor 1} + \text{س}^2 \times \frac{\text{د}''(0)}{\lfloor 2} + \dots + \text{س}^{\text{ن}} \times \frac{\text{د}^{(\text{ن})}(\text{أ})}{\lfloor \text{ن}} + \dots$$

و تسمى هذه المتسلسلة **بمتسلسلة مكلورين**

و فيما يلى مفكوك تايلور لبعض الدوال :

(أ) دالة الجيب : ص = حا س

نكون الجدول التالى :

د (س) = حا س	د (٠) = ٠
$\text{د}^{(1)}(\text{س})$ = حتا س	$\text{د}^{(1)}(0) = 1$
$\text{د}^{(2)}(\text{س})$ = − حا س	$\text{د}^{(2)}(0) = 0$
$\text{د}^{(3)}(\text{س})$ = − حتا س	$\text{د}^{(3)}(0) = -1$
$\text{د}^{(4)}(\text{س})$ = حا س	$\text{د}^{(4)}(0) = 0$
$\text{د}^{(5)}(\text{س})$ = حتا س	$\text{د}^{(5)}(0) = 1$
.....	.....

$$\therefore\ \text{حا س} = 0 + \frac{1}{\lfloor 1}\,\text{س} + 0 + \frac{-1}{\lfloor 3}\,\text{س}^3 + 0 + \frac{1}{\lfloor 5}\,\text{س}^5 + \dots + (-1)^{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{2\text{ن}+1}}{\lfloor 2\text{ن}+1} + \dots$$

$$= \frac{\text{س}}{\lfloor 1} - \frac{\text{س}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{س}^5}{\lfloor 5} + \dots + (-1)^{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{2\text{ن}+1}}{\lfloor 2\text{ن}+1} + \dots$$

لاحظ :

دالة الجيب دالة فردية : حا (− س) = − حا س

لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الفردية

(٢) دالة جيب التمام : ص = حتا س نكون جدول كما سبق فيكون :

$$\text{حتا س} = ١ - \frac{\text{س}^{٢}}{|٢} + \frac{\text{س}^{٤}}{|٤} + ... + (-١)^{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{٢\text{ن}}}{|٢\text{ن}} + ...$$

لاحظ :

دالة جيب التمام دالة زوجية : حتا (- س) = حتا س

لذلك المفكوك يحتوى على قوى س الزوجية

(٣) الدالة الأسية : ص = $\text{هـ}^{\text{س}}$ نكون جدول كما سبق فيكون :

$$\text{هـ}^{\text{س}} = ١ + \frac{\text{س}}{|١} + \frac{\text{س}^{٢}}{|٢} + \frac{\text{س}^{٣}}{|٣} + ... + \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{|\text{ن}} + ...$$

لاحظ :

$$\text{هـ}^{\text{ت س}} = ١ + \frac{\text{ت س}}{|١} + \frac{\text{ت}^{٢}\text{س}^{٢}}{|٢} + \frac{\text{ت}^{٣}\text{س}^{٣}}{|٣} + ... + \frac{\text{ت}^{\text{ن}}\text{س}^{\text{ن}}}{|\text{ن}} + ...$$

$$= ١ + \frac{\text{ت س}}{|١} - \frac{\text{س}^{٢}}{|٢} + \frac{\text{ت س}^{٣}}{|٣} + ...$$

$$= \left(١ - \frac{\text{س}^{٢}}{|٢} + \frac{\text{س}^{٤}}{|٤} + ... \right) + \text{ت} \left(\frac{\text{س}}{|١} - \frac{\text{س}^{٣}}{|٣} + ... \right)$$

$$\therefore \text{هـ}^{\text{ت س}} = \text{حتا س} + \text{ت حا س}$$

أى أن : العدد المركب ع = س + ص ت = ل (حتا θ + ت حا θ)

يمكن كتابته بالصورة : ع = ل $\text{هـ}^{\theta\text{ ت}}$ و تسمى صورة أويلر

حيث : θ بالتقدير الدائرى

برهان آخر :

نفرض أن : ى = حتا س + ت حا س   (١) بالاشتقاق بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{\text{ءى}}{\text{ءس}} = - \text{حا س} + \text{ت حتا س} \quad (٢)$$

بقسمة (٢) على (١) ينتج :

$$\therefore \frac{١}{\text{ى}} \times \frac{\text{ءى}}{\text{ءس}} = \frac{- \text{حا س} + \text{ت حتا س}}{\text{حتا س} + \text{ت حا س}} \times \frac{\text{حتا س} - \text{ت حا س}}{\text{حتا س} - \text{ت حا س}}$$

و ذلك بالضرب فى مرافق المقام

$$\therefore \frac{١}{\text{ى}} \times \frac{\text{ءى}}{\text{ءس}} = (- \text{حا س} + \text{ت حتا س}) (\text{حتا س} - \text{ت حا س})$$

$$= - \text{حا س حتا س} + \text{ت} (\text{حا}^{٢}\text{س} + \text{حتا}^{٢}\text{س}) + \text{حا س حتا س} = \text{ت}$$

، و بتكامل الطرفين ينتج :

$$\int \frac{\text{ءى}}{\text{ى}} = \int \text{ت ءس} \qquad \therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ى} = \text{ت س} + \text{ث}$$

، عندما : س = ٠ فإن : ى = ١ أى أن : $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ى} = ٠$.

$$\therefore \text{ث} = ٠ \qquad \therefore \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ى} = \text{ت س} \qquad \therefore \text{ى} = \text{هـ}^{\text{ت س}}$$

أى أن : $\text{هـ}^{\text{ت س}} = \text{حتا س} + \text{ت حا س}$

ملاحظة :

١) $١ = \text{حتا } ٠ + \text{حا } ٠ = \text{هـ}^{\text{صفر ت}}$

٢) $-١ = \text{حتا } \pi + \text{حا } \pi = \text{هـ}^{\pi \text{ ت}}$

٣) $\text{ت} = \text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{حا } \frac{١}{٢}\pi = \text{هـ}^{\frac{١}{٢}\pi \text{ ت}}$

٤) $- \text{ت} = \text{حتا } (-\frac{١}{٢}\pi) + \text{حا } (-\frac{١}{٢}\pi) = \frac{١}{٢} \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\pi \text{ ت}}$

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ٤٥

إذا كان : $ع = \frac{\sqrt{٢}\,ت}{١ + ت}$ فأكتب العدد ع بالصورة الأسية

الحل

∵ $ع = \frac{\sqrt{٢}\,ت}{١ + ت} \times \frac{١ - ت}{١ - ت} = \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢}\,ت$

∴ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ع يقع فى الربع الأول

، $ل = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = ١$ وحدة طول

، $\theta = ظا^{-١}\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢} \div \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right) = ظا^{-١}(١) = \frac{١}{٤}\pi$

∴ الصورة المثلثية للعدد ع = حتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٤}\pi$

، الصورة الأسية للعدد ع = $هـ^{\frac{١}{٤}\pi\,ت}$

ضرب و قسمة الأعداد المركبة باستخدام الصورة الأسية :

إذا كان : $ع_١ = ل_١\,هـ^{\theta_١ ت}$ ، $ع_٢ = ل_٢\,هـ^{\theta_٢ ت}$ فإن :

(١) $ع_١\,ع_٢ = ل_١\,ل_٢\,هـ^{\theta_١ ت} \times هـ^{\theta_٢ ت} = ل_١\,ل_٢\,هـ^{(\theta_١ + \theta_٢)ت}$

(٢) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{ل_١}{ل_٢} \times \frac{هـ^{\theta_١ ت}}{هـ^{\theta_٢ ت}} = \frac{ل_١}{ل_٢}\,هـ^{(\theta_١ - \theta_٢)ت}$

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ٤٦

إذا كان : $ع_١ = ١ - \sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_٢ = ١ + ت$ أوجد كلاً مما يأتى

فى الصورة المثلثية : (أ) $ع_١\,ع_٢$ (ب) $\frac{ع_٢}{ع_١}$ (حـ) $(ع_٢)^٦$

الحل

∵ $ع_١ = ١ - \sqrt{٣}\,ت$ ∴ س > ٠ ، ص < ٠

∴ $ع_١$ يقع فى الربع الرابع ، $ل = \sqrt{١ + ٣} = ٢$ وحدة طول

، $\theta = ظا^{-١}(-\sqrt{٣}) = -\frac{١}{٣}\pi$

∴ $ع_١ = ٢\,[\,حتا(-\frac{١}{٣}\pi) + ت\,حا(-\frac{١}{٣}\pi)\,]$

، ∵ $ع_٢ = ١ + ت$ ∴ س > ٠ ، ص > ٠

∴ $ع_٢$ يقع فى الربع الأول ، $ل = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

، $\theta = ظا^{-١}(١) = \frac{١}{٤}\pi$ ∴ $ع_٢ = \sqrt{٢}\,(حتا\,\frac{١}{٤}\pi + ت\,حا\,\frac{١}{٤}\pi)$

(أ) $ع_١\,ع_٢ = ٢\sqrt{٢}\,[\,حتا(-\frac{١}{٣}\pi + \frac{١}{٤}\pi) + ت\,حا(-\frac{١}{٣}\pi + \frac{١}{٤}\pi)\,]$

$= ٢\sqrt{٢}\,[\,حتا(-\frac{١}{١٢}\pi) + ت\,حا(-\frac{١}{١٢}\pi)\,]$

(ب) $\frac{ع_٢}{ع_١} = \frac{\sqrt{٢}}{٢}\,[\,حتا(\frac{١}{٤}\pi + \frac{١}{٣}\pi) + ت\,حا(\frac{١}{٤}\pi + \frac{١}{٣}\pi)\,]$

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢}\,(حتا\,\frac{٧}{١٢}\pi + ت\,حا\,\frac{٧}{١٢}\pi)$

(حـ) $(ع_٢)^٦ = [\,\sqrt{٢}\,(حتا\,\frac{١}{٤}\pi + ت\,حا\,\frac{١}{٤}\pi)\,]^٦$

$= ٨\,(حتا\,\frac{٣}{٢}\pi + ت\,حا\,\frac{٣}{٢}\pi)$

إجابة حاول أن تحل (١٠) صفحة ٤٦

عبر عن العدد : $ع = ٨\,هـ^{\frac{١}{٢}\pi\,ت}$ بالصورة الجبرية س + ص ت

حيث : س ، ص ∈ ح

الحل

∵ $ع = ٨\,هـ^{\frac{١}{٢}\pi\,ت}$ ∴ ل = ٨ وحدة طول ، $\theta = \frac{١}{٢}\pi$

∴ ع = ٨ (حتا $\frac{١}{٦}$ π + ت حا $\frac{١}{٦}$ π) = ٨ × ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت)

= ٤ $\sqrt{٣}$ + ٤ ت

حل آخر

∵ ع = ٨ هـ$^{\frac{١}{٦}π ت}$ ∴ س = ٨ حتا $\frac{١}{٦}$ π = ٤ $\sqrt{٣}$ ،

ص = ٨ حا $\frac{١}{٦}$ π = ٤   ∴ ع = ٤ $\sqrt{٣}$ + ٤ ت

حل تمارين (٢ – ١) صفحة ٤٧ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

(١) العدد : ع = ٣ – ٤ ت يمثل على شكل أرجاند بالنقطة أ حيث : أ = (.... ، ....)

(٢) إذا كانت نقطة أ تمثل ع على مستوى أرجاند ، ب تمثل العدد $\bar{ع}$ على مستوى أرجاند فإن : ب صورة أ بالانعكاس فى ....

(٣) مقياس العدد المركب : ع = – ٥ ت يساوى ....

(٤) إذا كان : ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت}$ فإن : | ع | = ...

(٥) إذا كانت : θ هى السعة الأساسية للعدد المركب ع فإن : سعة $\bar{ع}$ هى ....

(٦) إذا كان : ع = $\frac{١}{\bar{ع}}$ فإن : | ع | = ...

(٧) الصورة الأسية للعدد : – ١ + ت هى ....

(٨) إذا كان : ع = ١ + $\sqrt{٣}$ ت فإن : السعة الأساسية للعدد : $(١ + \sqrt{٣}\ ت)^{٨}$ هى ....

(٩) الصورة المثلثية للعدد : ٢ – ٢ $\sqrt{٣}$ ت هى ....

(١٠) إذا كانت سعة العدد المركب ع هى θ فإن : سعة العدد المركب ٢ ع هى ....

الحل

(١) ∵ ع = ٣ – ٤ ت   ∴ س = ٣ ، ص = – ٤

∴ أ = (٣ ، – ٤)

(٢) بفرض أن : ع = س + ص ت يقع فى الربع الأول ، تمثله نقطة أ

∴ $\bar{ع}$ = س – ص ت يقع فى الربع الرابع و تمثله نقطة ب

∴ ب صورة أ بالانعكاس فى محور السينات

(٣) ∵ ع = – ٥ ت   ∴ س = ٠ ، ص = – ٥

∴ | ع | = $\sqrt{٠ + ٢٥}$ = ٥ وحدة طول

(٤) ∵ ع = $\frac{٢ - ت}{٢ + ت} × \frac{٢ - ت}{٢ - ت}$ = $\frac{٣}{٥}$ – $\frac{٤}{٥}$ ت

∴ | ع | = $\sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}}$ = ١ وحدة طول

(٥) بفرض أن : ع = ل (حتا θ + ت حا θ)   ∴ $\bar{ع}$ = ل (حتا θ – ت حا θ)

∴ س < ٠ ، ص > ٠   ∴ – ع يقع فى الربع الرابع

∴ السعة الأساسية للعدد ($\bar{ع}$) = – θ

(٦) بفرض أن : ع = ل (حتا θ + ت حا θ)   ∴ $\bar{ع}$ = ل (حتا θ – ت حا θ)

∴ $\frac{١}{\bar{ع}}$ = $\frac{١}{ل (حتا θ - ت حا θ)}$

= $\frac{(حتا θ + ت حا θ)}{ل (حتا θ - ت حا θ)(حتا θ + ت حا θ)}$

= $\frac{١}{ل}$ × $\frac{(حتا θ + ت حا θ)}{حتا^{٢} θ + حا^{٢} θ}$ = $\frac{١}{ل}$ (حتا θ + ت حا θ)

، ∵ $ع = \frac{1}{\bar{ع}}$ ∴ $ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta) = \frac{1}{ل}\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta)$

∴ $ل^2 = 1$ ∴ $ل = 1$ أى أن : $|ع| = 1$

(٧) بفرض أن : $ع = -1 + ت$ ∴ $س < 0$ ، $ص > 0$

∴ ع يقع فى الربع الثانى ، $ل = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ وحدة طول

، $\theta = \pi - \text{ظا}^{-1}(-1) = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$

∴ $ع = \sqrt{2}\,(\text{حتا}(\frac{3}{4}\pi) + ت\,\text{حا}(\frac{3}{4}\pi))$

، الصورة الأسية للعدد هى : $\sqrt{2}\,هـ^{\frac{3}{4}\pi\,ت}$

(٨) ∵ $ع = 1 + \sqrt{3}\,ت$ ∴ $س = 1$ ، $ص = \sqrt{3}$

∴ $ل = \sqrt{1+3} = 2$ وحدة طول

، ∵ $س > 0$ ، $ص > 0$ ∴ ع يقع فى الربع الأول

∴ $\theta = \text{ظا}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi$

∴ $ع = 2\,(\text{حتا}\,\frac{1}{3}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{1}{3}\pi)$

∴ $(1 + \sqrt{3}\,ت)^8 = [\,2(\text{حتا}\,\frac{1}{3}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{1}{3}\pi)\,]^8$

$= 256\,(\text{حتا}\,\frac{8}{3}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{8}{3}\pi)$

$= 256\,[\,\text{حتا}(\frac{8}{3}\pi - 2\pi) + ت\,\text{حا}(\frac{8}{3}\pi - 2\pi)\,]$

$= 256\,(\text{حتا}\,\frac{2}{3}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{2}{3}\pi)$

∴ السعة الأساسية للعدد : $(1 + \sqrt{3}\,ت)^8$ هى $\frac{2}{3}\pi$

(٩) ∵ $ع = -2 - 2\sqrt{3}\,ت$ ∴ $س = 2$ ، $ص = -2\sqrt{3}$

∴ $ل = \sqrt{4 + 12} = 4$ وحدة طول

، ∵ $س > 0$ ، $ص < 0$ ∴ ع يقع فى الربع الرابع

∴ $\theta = \text{ظا}^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$

∴ $ع = 4\,[\,\text{حتا}(-\frac{1}{3}\pi) + ت\,\text{حا}(-\frac{1}{3}\pi)\,]$

(١٠) بفرض أن : $ع = ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta)$

∴ $2ع = ل\,(\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta)$ ∴ السعة الأساسية للعدد : ٢ ع هى θ

أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١١) إذا كان : $ع = \sqrt{2}\,(\text{حا}\,30^\circ + ت\,\text{حتا}\,30^\circ)$ فإن :

السعة الأساسية للعدد ع = ...

(أ) 30° (ب) 60° (ح) 90° (ء) 120°

(١٢) إذا كان : $ع = (1 + \sqrt{3}\,ت)^{ن}$ ، و كان : $|ع| = 8$

فإن : السعة الأساسية للعدد ع = ...

(أ) $\frac{1}{2}\pi$ (ب) $\frac{1}{3}\pi$ (ح) $\frac{1}{6}\pi$ (ء) π

(١٣) إذا كان : $ع_1 = ل_1\,(\text{حتا}\,\theta_1 + ت\,\text{حا}\,\theta_1)$ ،

$ع_2 = ل_2\,(\text{حتا}\,\theta_2 + ت\,\text{حا}\,\theta_2)$ ، و كان : $\theta_1 + \theta_2 = \pi$

فإن : $ع_1\,ع_2 = ...$

(أ) $ل_1\,ل_2$ (ب) $-ل_1\,ل_2$ (ح) $ل_1\,ل_2\,ت$ (ء) $-ل_1\,ل_2\,ت$

(١٤) سعة العدد المركب : $ع = -3$ تساوى ....

(أ) صفر° (ب) 90° (ح) 180° (ء) 270°

(١٥) إذا كان : $ع = -1 + \sqrt{3}\,ت$ فإن : $|\bar{ع}| = ...$

(أ) $-1 - \sqrt{3}\,ت$ (ب) $\sqrt{2}$ (ح) 2 (ء) -2

(١٦) إذا كان : ع = – ١ – ت فإن :

الصورة الأسية للعدد ع = ...

(أ) هـ$^{\frac{3}{4}\pi}$ (ب) هـ$^{\frac{3}{4}\pi}$ (حـ) $\sqrt{2}$ هـ$^{\frac{5}{4}\pi}$ (ء) $\sqrt{2}$ هـ$^{225\ ت}$

(١٧) إذا كان : ع$_1$ = ٢ + ٢ $\sqrt{3}$ ت ، ع$_2$ = – ٣ – ٣ $\sqrt{3}$ ت

فإن : سعة العدد ع$_1$ + ع$_2$ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٢٤٠° (حـ) ١٨٠° (ء) ٣٠٠°

(١٨) إذا كان : س + ص ت = $\frac{أ + ب ت}{أ - ب ت}$ فإن : س^2 + ص^2 = ...

(أ) أ^2 + ب^2 (ب) أ^2 – ب^2 (حـ) ٢ أ ب (ء) ١

(١٩) الشكل المقابل يمثل العدد المركب ....

(أ) ٣ (جتا ٣٠° + ت جا ٣٠°)

(ب) ٣ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

(حـ) ٣ (جتا ١٢٠° + ت جا ١٢٠°)

(ء) ٣ (جتا ١٥٠° + ت جا ١٥٠°)

(٢٠) إذا كان : ع عدداً مركباً سعته الأساسية θ فإن :

سعة $\frac{1}{ع}$ هى ....

(أ) θ (ب) – θ (حـ) π – θ (ء) – π – θ

الحل

(١١) ∵ ع = $\sqrt{2}$ (جا ٣٠° + ت جتا ٣٠°)

= $\sqrt{2}$ [جتا (٩٠° – ٣٠°) + ت جا (٩٠° – ٣٠°)]

= $\sqrt{2}$ (جتا ٦٠° + ت جا ٦٠°)

∴ السعة الأساسية للعدد ع = ٦٠°

(١٢) ∵ ع = (١ + $\sqrt{3}$ ت)^ن ∴ | ع | = ($\sqrt{1 + 3}$)^ن = (٢)^ن

، ∵ | ع | = ٨ ∴ (٢)^ن = ٨ = (٢)^3 ∴ ن = ٣

∴ ع = (١ + $\sqrt{3}$ ت)^3 = [٢ ($\frac{1}{2}$ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت)]^3

= [٢ (جتا $\frac{1}{3}$ π + ت جا $\frac{1}{3}$ π)]^3

∴ ع = ٨ (جتا π + ت جا π) ∴ السعة الأساسية للعدد ع = π

(١٣) ∵ ع$_1$ = ل$_1$ (جتا θ$_1$ + ت جا θ$_1$) ، ع$_2$ = ل$_2$ (جتا θ$_2$ + ت جا θ$_2$)

∴ ع$_1$ ع$_2$ = ل$_1$ ل$_2$ [جتا (θ$_1$ + θ$_2$) + ت جا (θ$_1$ + θ$_2$)]

، ∵ θ$_1$ + θ$_2$ = π

∴ ع$_1$ ع$_2$ = ل$_1$ ل$_2$ (جتا π + ت جا π) = ل$_1$ ل$_2$ (– ١ + ت × ٠)

∴ ع$_1$ ع$_2$ = – ل$_1$ ل$_2$

(١٤) ∵ ع = – ٣ = ٣ (جتا π + ت جا π) ∴ سعة العدد المركب ع = π

(١٥) ∵ ع = – ١ + $\sqrt{3}$ ت ∴ $\bar{ع}$ = – ١ – $\sqrt{3}$ ت

∴ | $\bar{ع}$ | = $\sqrt{1 + 3}$ = ٢ وحدة طول

(١٦) ∵ ع = – ١ – ت ∴ س < ٠ ، ص < ٠

∴ ع يقع فى الربع الثالث ، ل = $\sqrt{1 + 1}$ = $\sqrt{2}$ وحدة طول

، θ = – π + ظا$^{-1}$ (١) = – π + $\frac{1}{4}$ π = – $\frac{3}{4}$ π

∴ ع = $\sqrt{2}$ [جتا (– $\frac{3}{4}$ π) + ت جا (– $\frac{3}{4}$ π)]

∴ الصورة الأسية للعدد ع = $\sqrt{2}$ هـ$^{- \frac{3}{4} \pi\ ت}$

(١٧) ∵ $ع_١ = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_٢ = -٣ - ٣\sqrt{٣}\,ت$

∴ $ع_١ + ع_٢ = -١ - \sqrt{٣}\,ت$ ∴ $س < ٠$ ، $ص < ٠$.

∴ $ع_١ + ع_٢$ يقع فى الربع الثالث ، $ل = \sqrt{١ + ٣} = ٢$ وحدة طول

، $θ = -١٨٠° + ظا^{-١}(\sqrt{٣}) = -١٨٠° + ٦٠°$

$= -١٢٠° = ٣٦٠° = ٢٤٠°$

∴ سعة العدد $ع_١ + ع_٢ = ٢٤٠°$

(١٨) ∵ $س + ص\,ت = \frac{أ + ب\,ت}{أ - ب\,ت} \times \frac{أ + ب\,ت}{أ + ب\,ت}$

$= \frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٢ + ب^٢} + \frac{٢\,أ\,ب}{أ^٢ + ب^٢}\,ت$

∴ $س = \frac{أ^٢ - ب^٢}{أ^٢ + ب^٢}$ ، $ص = \frac{٢\,أ\,ب}{أ^٢ + ب^٢}$

∴ $س^٢ + ص^٢ = \frac{أ^٤ - ٢أ^٢ب^٢ + ب^٤}{أ^٤ + ٢أ^٢ب^٢ + ب^٤} + \frac{٤أ^٢ب^٢}{أ^٤ + ٢أ^٢ب^٢ + ب^٤}$

$= \frac{أ^٤ + ٢أ^٢ب^٢ + ب^٤}{أ^٤ + ٢أ^٢ب^٢ + ب^٤} = ١$

(١٩) من الشكل : ∵ مقياس العدد = ٣ ، سعة العدد = $٩٠° + ٣٠° = ١٢٠°$

∴ العدد المركب $= ٣\,(حتا\,١٢٠° + ت\,حا\,١٢٠°)$

(٢٠) بفرض أن : $ع = ل\,(حتا\,θ + ت\,حا\,θ)$

∴ $\frac{١}{ع} = \frac{١}{ل\,(حتا\,θ + ت\,حا\,θ)}$

$= \frac{(حتا\,θ - ت\,حا\,θ)}{ل\,(حتا\,θ + ت\,حا\,θ)(حتا\,θ - ت\,حا\,θ)}$

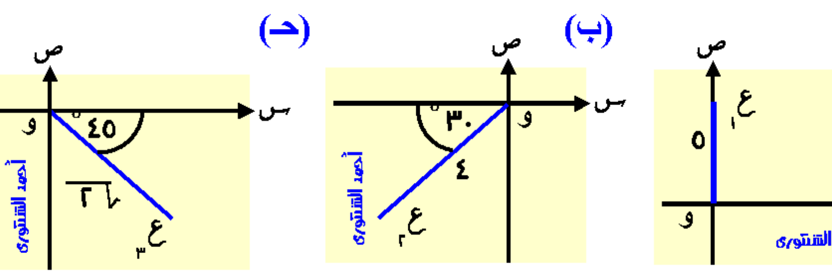
$= \frac{١}{ل} \times \frac{(حتا\,θ - ت\,حا\,θ)}{حتا^٢\,θ + حا^٢\,θ} = \frac{١}{ل}\,(حتا\,θ - ت\,حا\,θ)$

$= \frac{١}{ل}\,[\,حتا\,(-θ) + ت\,حا\,(-θ)\,]$

∴ سعة $\left(\frac{١}{ع}\right) = -θ$

أجب عما يأتى :

(٢١) أكتب كلاً من الأعداد المركبة الآتية بالصورة المثلثية :



(ء) $ع_٤ = -\sqrt{٣} + ٤\,ت$

(هـ) $ع_٥ = ٤\,(حتا\,٤٠° - ت\,حا\,٤٠°)$

الحل

(أ) ∵ من الشكل : $|ع_١| = ٥$ ، سعة $ع_١ = \frac{١}{٢}π$

∴ $ع_١ = ٥\,(حتا\,\frac{١}{٢}π + ت\,حا\,\frac{١}{٢}π)$

لاحظ : $ع_١$ يقع على محور ص

(ب) ∵ من الشكل : $|ع_٢| = ٤$ ، سعة $ع_٢ = -١٨٠° + ٣٠° = -١٥٠°$

∴ $ع_٢ = ٤\,[\,حتا\,(-١٥٠°) + ت\,حا\,(-١٥٠°)\,]$

لاحظ : $ع_٢$ يقع فى الربع الثالث

(حـ) ∵ من الشكل : $|ع_{٣}| = \sqrt{٢}$ ، سعة $ع_{٣} = -٤٥^\circ$

∴ $ع_{٣} = \sqrt{٢}\,[\,حتا(-٤٥^\circ) + ت\ حا(-٤٥^\circ)\,]$

لاحظ : $ع_{٣}$ يقع فى الربع الرابع

(ء) ∵ $ع_{٤} = -\sqrt{٣} + ٤ت$ ∴ $س = -\sqrt{٣}$ ، $ص = ٤$

∴ $ل = \sqrt{٣ + ١٦} = \sqrt{١٩}$ وحدة طول

، ∵ $س < ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ ع يقع فى الربع الثانى

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + طا^{-١}(-\frac{٤}{\sqrt{٣}}) = ١٨٠^\circ - ٦٦^\circ\ ٣٥' = ١١٣^\circ\ ٢٥'$

∴ $ع_{٤} = \sqrt{١٩}\,(\,حتا\ ١١٣^\circ\ ٢٥' + ت\ حا\ ١١٣^\circ\ ٢٥'\,)$

(هـ) ∵ $ع_{٥} = ٤\,(\,حتا\ ٤٠^\circ - ت\ حا\ ٤٠^\circ\,)$

∴ $ع_{٥} = ٤\,[\,حتا(-٤٠^\circ) + ت\ حا(-٤٠^\circ)\,]$

(٢٢) أوجد المقياس و السعة لكل من الأعداد المركبة الآتية :

(أ) $ع_{١} = -١ + ت$ (ب) $ع_{٢} = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت}$

(حـ) $ع_{٣} = -٢\,(\,حتا\ ٤٥^\circ + ت\ حا\ ٤٥^\circ\,)$

(ء) $ع_{٤} = ١ + ت\ طا\ ٢٠^\circ$

الحل

(أ) ∵ $ع_{١} = -١ + ت$ ∴ $س = -١$ ، $ص = ١$

∴ $ل = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

أى أن : مقياس $ع_{١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

، ∵ $س < ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ $ع_{١}$ يقع فى الربع الثانى

∴ $\theta = ١٨٠^\circ + طا^{-١}(-١) = ١٨٠^\circ - ٤٥^\circ = ١٣٥^\circ$

أى أن : سعة $ع_{١} = ١٣٥^\circ$

(ب) ∵ $ع_{٢} = \frac{٤}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت} = \sqrt{٣} + ت$

∴ $س = \sqrt{٣}$ ، $ص = ١$ ∴ $ل = \sqrt{٣ + ١} = ٢$ وحدة طول

أى أن : مقياس $ع_{٢} = ٢$ وحدة طول

، ∵ $س > ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ $ع_{٢}$ يقع فى الربع الأول

∴ $\theta = طا^{-١}(\frac{١}{\sqrt{٣}}) = ٣٠^\circ$ أى أن : سعة $ع_{٢} = ٣٠^\circ$

(حـ) ∵ $ع_{٣} = -٢\,(\,حتا\ ٤٥^\circ + ت\ حا\ ٤٥^\circ\,)$

$= ٢\,(\,-حتا\ ٤٥^\circ - ت\ حا\ ٤٥^\circ\,)$

$= ٢\,[\,حتا(-١٨٠^\circ + ٤٥^\circ) - ت\ حا(-١٨٠^\circ + ٤٥^\circ)\,]$

$= ٢\,[\,حتا(-١٣٥^\circ) - ت\ حا(-١٣٥^\circ)\,]$

∴ مقياس $ع_{٣} = ٢$ وحدة طول ، سعة $ع_{٣} = -١٣٥^\circ$

(ء) ∵ $ع_{٤} = ١ + ت\ طا\ ٢٠^\circ = ١ + ت\ \frac{حا\ ٢٠^\circ}{حتا\ ٢٠^\circ}$

$= \frac{١}{حتا\ ٢٠^\circ}\,(\,حتا\ ٢٠^\circ + ت\ حا\ ٢٠^\circ\,)$

$= قا\ ٢٠^\circ\,(\,حتا\ ٢٠^\circ + ت\ حا\ ٢٠^\circ\,)$

∴ مقياس $ع_{٣} = قا\ ٢٠^\circ$ وحدة طول ، سعة $ع_{٣} = ٢٠^\circ$

(٢٣) إذا كان : $ع_{١} = حتا\ ١١٤^\circ + ت\ حا\ ٦٦^\circ$ ،

$ع_{٢} = حتا\ ٤٢^\circ + ت\ حا\ ١٣٨^\circ$ ، $ع_{٣} = حا\ ٢٤^\circ + ت\ حا\ ١١٤^\circ$

أوجد الصورة الجبرية للعدد : $\frac{ع_{١}\ ع_{٢}}{ع_{٣}}$

الحل

∵ $ع_1$ = حتا ١١٤° + ت حا ٦٦° = حتا ١١٤° + ت حا (١٨٠° − ٦٦°)

= حتا ١١٤° + ت حا ١١٤° ،

$ع_2$ = حتا ٤٢° + ت حا ١٣٨° = حتا ٤٢° + ت حا (١٨٠° − ١٣٨°)

= حتا ٤٢° + ت حا ٤٢°

∴ $ع_1$ $ع_2$ = حتا (١١٤° + ٤٢°) + ت حا (١١٤° + ٤٢°)

= حتا ١٥٦° + ت حا ١٥٦° ،

∵ $ع_3$ = حا ٢٤° + ت حا ١١٤° = حتا (٩٠° − ٢٤°) + ت حا ١١٤°

= حتا ٦٦° + ت حا ١١٤° = حتا ٦٦° + ت حا (١٨٠° − ١١٤°)

= حتا ٦٦° + ت حا ٦٦°

∴ $\frac{ع_1 ع_2}{ع_3}$ = حتا (١٥٦° − ٦٦°) + ت حا (١٥٦° − ٦٦°)

= حتا ٩٠° + ت حا ٩٠° = ت

(٢٤) إذا كان : $ع_1$ = ٢ (حتا ٧٥° + ت حا ٧٥°) ،

$ع_2$ = ٤ (حتا ١٥° + ت حا ١٥°)

أوجد على الصورة الأسية للعدد : $ع_1$ $ع_2$ ، $\frac{ع_1}{ع_2}$

الحل

∵ $ع_1$ $ع_2$ = ٢ × ٤ (حتا (٧٥° + ١٥°) + ت حا (٧٥° + ١٥°)

= ٨ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٨ $هـ^{\frac{١}{٢} \pi ت}$ ،

$\frac{ع_1}{ع_2}$ = $\frac{٢}{٤}$ حتا (٧٥° − ١٥°) + ت حا (٧٥° − ١٥°)

= $\frac{١}{٢}$ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°) = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{\frac{١}{٣} \pi ت}$

(٢٥) فى الشكل المقابل :

أوجد على الصورة الأسية $\frac{ع_1}{ع_2}$

الحل

∵ من الشكل : | $ع_1$ | = ٢ ،

سعة $ع_1$ = ٩٠° + ١٠° = ١٠٠°

∴ $ع_1$ = ٢ (حتا ١٠٠° + ت حا ١٠٠°)

، ∵ من الشكل : | $ع_2$ | = ٤ ، سعة $ع_2$ = − ١٨٠° + ١٠° = − ١٧٠°

∴ $ع_2$ = ٤ [حتا (− ١٧٠°) + ت حا (− ١٧٠°)]

∴ $\frac{ع_1}{ع_2}$ = $\frac{٢}{٤}$ [حتا (١٠٠° + ١٧٠°) + ت حا (١٠٠° + ١٧٠°)]

= $\frac{١}{٢}$ (حتا ٢٧٠° + ت حا ٢٧٠°)

= $\frac{١}{٢}$ [حتا (− $\frac{١}{٢}$ π) + ت حا (− $\frac{١}{٢}$ π)] = $\frac{١}{٢}$ $هـ^{- \frac{١}{٢} \pi ت}$

(٢٦) أكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصورة الجبرية :

(أ) $ع_1$ = $هـ^{\frac{١}{٣} \pi ت}$ (ب) $ع_2$ = ٢ $هـ^{\frac{٣}{٤} \pi ت}$ (جـ) $ع_3$ = ٣ $هـ^{- \frac{١}{٦} \pi ت}$

الحل

(أ) $ع_1$ = $هـ^{\frac{١}{٣} \pi ت}$ = (حتا $\frac{١}{٣}$ π + ت حا $\frac{١}{٣}$ π) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت

(ب) $ع_2$ = ٢ $هـ^{\frac{٣}{٤} \pi ت}$ = ٢ (حتا $\frac{٣}{٤}$ π + ت حا $\frac{٣}{٤}$ π)

= ٢ (− $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت) = − $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت

" بالضرب بسطاً و مقاماً × $\sqrt{٢}$

(حـ) $ع_3 = 3 هـ^{-\frac{1}{6}\pi ت} = 3 \left(حتا (-\frac{1}{6}\pi) + ت\, حا (-\frac{1}{6}\pi) \right)$

$= 3 \left(حتا \frac{1}{6}\pi - ت\, حا \frac{1}{6}\pi \right)$

$= 3 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} ت \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} ت$

(٢٧) إذا كان : $ع = 3 \left(حتا \frac{1}{3}\pi + ت\, حا \frac{1}{3}\pi \right)$

أثبت أن : $\frac{1}{ع} = \frac{1}{3} هـ^{\frac{5}{3}\pi ت}$

الحل

$\frac{1}{ع} = \frac{حتا ٠ + ت\, حتا ٠}{3 (حتا \frac{1}{3}\pi + ت\, حا \frac{1}{3}\pi)} = \frac{1}{3} \left[حتا (-\frac{1}{3}\pi) + ت\, حا (-\frac{1}{3}\pi) \right]$

$= \frac{1}{3} \left[حتا (2\pi - \frac{1}{3}\pi) + ت\, حا (2\pi - \frac{1}{3}\pi) \right]$

$= \frac{1}{3} \left(حتا \frac{5}{3}\pi + ت\, حا \frac{5}{3}\pi \right) = \frac{1}{3} هـ^{\frac{5}{3}\pi ت}$

(٢٨) إذا كان : $ع = \sqrt{3} + ت$ أوجد بالصورة الجبرية : $ع^6$

الحل

∵ $ع = \sqrt{3} + ت$ ∴ $س = \sqrt{3}$ ، $ص = 1$

∴ $ل = \sqrt{3 + 1} = 2$ وحدة طول

، ∵ $س > ٠$ ، $ص > ٠$ ∴ ع يقع فى الربع الأول

∴ $\theta = طا^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{6}\pi$ ∴ $ع = 2 \left(حتا \frac{1}{6}\pi + ت\, حا \frac{1}{6}\pi \right)$

، $ع^6 = \left[2 \left(حتا \frac{1}{6}\pi + ت\, حا \frac{1}{6}\pi \right) \right]^6$

$= 64 \left(حتا \pi + ت\, حا \pi \right) = -64$

(٢٩) إذا كان : $ع = \frac{(أ + ب ت) + ت (أ - ب ت)}{(أ - ب ت) - ت (أ + ب ت)}$ فأوجد العدد ع فى أبسط صورة ثم أوجد $|ع|$ حيث : أ ، ب ∈ ح

الحل

$ع = \frac{ت \left(-ت (أ + ب ت) + (أ - ب ت) \right)}{(أ - ب ت) - ت (أ + ب ت)} = ت$

∴ $|ع| = 1$ وحدة طول

(٣٠) إذا كان : $ع_1 = حتا 75° + ت\, حا 75°$ ، $ع_2 = حتا 15° + ت\, حا 15°$ أوجد بالصورة المثلثية العدد : $ع_1 + ع_2$

الحل

$ع_1 + ع_2 = حتا 75° + ت\, حا 75° + حتا 15° + ت\, حا 15°$

$= حتا (45° + 30°) + ت\, حا (45° + 30°)$

$+ حتا (45° - 30°) + ت\, حا (45° - 30°)$

$= حتا 45° حتا 30° - حا 45° حا 30°$

$+ ت\, حا 45° حتا 30° + ت\, حا 45° حتا 30°$

$+ حتا 45° حتا 30° + حا 45° حا 30°$

$+ ت\, حا 45° حتا 30° - ت\, حا 45° حتا 30°$

$= 2\, حتا 45° حتا 30° + 2\, ت\, حا 45° حتا 30°$

$= 2\, حتا 30° \left(حتا 45° + ت\, حا 45° \right)$

$= 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(حتا 45° + ت\, حا 45° \right)$

$= \sqrt{3} \left(حتا 45° + ت\, حا 45° \right)$

(٣١) إذا كان : سعة $ع_1$ = $\frac{1}{3}\pi$ ، سعة $ع_2$ = $\frac{3}{4}\pi$ ، سعة $ع_3$ = $\frac{1}{2}\pi$ أوجد :

(أ) سعة ($ع_1^{3} ع_2^{2}$) **(ب)** سعة (٢ $ع_1$. $ع_2$)

(جـ) سعة ($\frac{ع_1 ع_2}{ع_3}$) **(د)** سعة ($ع_3^{6}$)

الحل

(أ) سعة ($ع_1^{3} ع_2^{2}$) = ٣ سعة $ع_1$ + ٢ سعة $ع_2$

$= 3 \times \frac{1}{3}\pi + 2 \times \frac{3}{4}\pi = \pi + \frac{3}{2}\pi$

$= \frac{5}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi - 2\pi = \frac{1}{2}\pi$

(ب) سعة (٢ $ع_1$. $ع_2$) = سعة $ع_1$ + سعة $ع_2$

$= \frac{1}{3}\pi + \frac{3}{4}\pi = \frac{13}{12}\pi$

$= \frac{13}{12}\pi - 2\pi = -\frac{11}{12}\pi$

(جـ) سعة ($\frac{ع_1 ع_2}{ع_3}$) = سعة $ع_1$ + سعة $ع_2$ − سعة $ع_3$

$= \frac{1}{3}\pi + \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{11}{12}\pi$

(د) سعة ($ع_3^{6}$) = ٦ سعة $ع_3$ = $6 \times \frac{1}{2}\pi = \pi$

(٣٢) أثبت أن : حتا θ = $\frac{1}{2}$ ($هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}$)

، حا θ = $-\frac{1}{2}$ ت ($هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}$)

الحل

∵ $هـ^{\theta ت}$ = حتا θ + ت حا θ ، $هـ^{-\theta ت}$ = حتا θ − ت حا θ

∴ بالجمع ينتج : حتا θ = $\frac{1}{2}$ ($هـ^{\theta ت} + هـ^{-\theta ت}$)

و بالطرح ينتج : حا θ = $\frac{1}{2ت}$ ($هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}$)

وحيث : $\frac{1}{2ت} \times \frac{ت}{ت} = -\frac{1}{2}$ ت " تذكر أن : $ت^2 = -1$ "

∴ حا θ = $-\frac{1}{2}$ ت ($هـ^{\theta ت} - هـ^{-\theta ت}$)

أحمد الشتوري

٢ – ٢ نظرية ديموافر

نظرية ديموافر بأس صحيح موجب :

إذا كان : ن عدداً صحيحاً موجباً

فإن : $(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{\text{ن}} = \text{حتا ن}\,\theta + \text{ت حا ن}\,\theta$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٥٠

عبر عن : حا ٣ θ بدلالة قوى حا θ

الحل

$\because (\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{3} = \text{حتا}\,3\theta + \text{ت حا}\,3\theta$ (١)

، $(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{3} = \text{حتا}^{3}\theta + \text{ق}^{3}_{1}\,\text{حتا}^{2}\theta\,(\text{ت حا}\,\theta)$

$+ \text{ق}^{3}_{2}\,\text{حتا}\,\theta\,(\text{ت حا}\,\theta)^{2} + (\text{ت حا}\,\theta)^{3}$

$= \text{حتا}^{3}\theta + 3\,\text{ت حتا}^{2}\theta\,\text{حا}\,\theta$

$- 3\,\text{حتا}\,\theta\,\text{حا}^{2}\theta - \text{ت حا}^{3}\theta$

$= \text{حتا}^{3}\theta - 3\,\text{حتا}\,\theta\,\text{حا}^{2}\theta$

$+ (3\,\text{حتا}^{2}\theta\,\text{حا}\,\theta - \text{حا}^{3}\theta)\,\text{ت}$ (٢)

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء التخيلى ينتج :

$\text{حا}\,3\theta = 3\,\text{حتا}^{2}\theta\,\text{حا}\,\theta - \text{حا}^{3}\theta$

$= 3\,(1 - \text{حا}^{2}\theta)\,\text{حا}\,\theta - \text{حا}^{3}\theta$

$= 3\,\text{حا}\,\theta - 3\,\text{حا}^{3}\theta - \text{حا}^{3}\theta$

$= 3\,\text{حا}\,\theta - 4\,\text{حا}^{3}\theta$

نظرية ديموافر بأس نسبى موجب :

نعلم أن :

$\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta = \text{حتا}\,(\theta + 2\text{م}\pi) + \text{ت حا}\,(\theta + 2\text{م}\pi)$

حيث : م عدد صحيح فإذا كان : ل عدداً موجباً فإن :

$(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{\frac{1}{\text{ل}}} = \text{حتا}\,\frac{\theta + 2\text{م}\pi}{\text{ل}} + \text{ت حا}\,\frac{\theta + 2\text{م}\pi}{\text{ل}}$

أى أن : مقدار $(\text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta)^{\frac{1}{\text{ل}}}$ يأخذ قيماً متعددة تبعاً لقيم م

و يكون : عدد هذه القيم المختلفة يساوى ل من القيم

التى نحصل عليها بوضع :

قيم م = ... ، –٢ ، –١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، .... التى

تجعل $\frac{\theta + 2\text{م}\pi}{\text{ل}}$ محصورة بين $-\pi$ ، π

ملاحظة :

طرق اختيار قيم م التى تجعل $\frac{\theta + 2\text{م}\pi}{\text{ل}}$ محصورة بين $-\pi$ ، π

(١) إذا كان : ل عدد فردى

نضع : م = ٠ ، ١ ، –١ ، ٢ ، –٢ ، .... إلى ل من القيم

(٢) إذا كان : ل عدد زوجى ، $\theta \in]0 ، \pi[$

نضع : م = ٠ ، –١ ، ١ ، –٢ ، ٢ ، .... إلى ل من القيم

لاحظ : بعد الصفر نبدأ بالعدد السالب

(٣) إذا كان : ل عدد زوجى ، $\theta \in]-\pi ، 0[$

نضع : م = ٠ ، ١ ، –١ ، ٢ ، –٢ ، .... إلى ل من القيم

لاحظ : بعد الصفر نبدأ بالعدد الموجب

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥١

أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة : $ع^{٤} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$

الحلـــ

$\because\ ع^{٤} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت \quad \therefore\ س = ٢ \ ،\ ص = ٢\sqrt{٣}$

$\therefore\ ل = \sqrt{٤ + ١٢} = ٤$ وحدة طول أى أن : مقياس $ع^{٤} = ٤$ وحدة طول

، $\because$ س > ٠ ، ص > ٠ $\therefore\ ع^{٤}$ يقع فى الربع الأول

$\therefore\ \theta = ط^{-١}(\sqrt{٣}) = \frac{١}{٣}\pi \quad \therefore\ ع^{٤} = ٤\,(حتا\ \frac{١}{٣}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٣}\pi)$

$\therefore\ ع = \sqrt{٢}\,[\,حتا\ \frac{١}{٤}(\frac{١}{٣}\pi + ٢ر\pi) + ت\ حا\ \frac{١}{٤}(\frac{١}{٣}\pi + ٢ر\pi)\,]$

عندما ر = ٠ فإن : $ع_{١} = \sqrt{٢}\,(حتا\ \frac{١}{١٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{١٢}\pi) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{١}{١٢}\pi ت}$

عندما ر = −١ فإن : $ع_{٢} = \sqrt{٢}\,[\,حتا(-\frac{٥}{١٢}\pi) + ت\ حا(-\frac{٥}{١٢}\pi)\,]$

$= \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{٥}{١٢}\pi ت}$

عندما ر = ١ فإن : $ع_{٣} = \sqrt{٢}\,(حتا\ \frac{٧}{١٢}\pi + ت\ حا\ \frac{٧}{١٢}\pi) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧}{١٢}\pi ت}$

عندما ر = −٢ فإن : $ع_{٤} = \sqrt{٢}\,[\,حتا(-\frac{١١}{١٢}\pi) + ت\ حا(-\frac{١١}{١٢}\pi)\,]$

$= \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{١١}{١٢}\pi ت}$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{١}{١٢}\pi ت} ، \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧}{١٢}\pi ت} \ \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{٥}{١٢}\pi ت} ، \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{١١}{١٢}\pi ت}\}$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٥٢

أوجد جذور المعادلة : $ع^{٤} = ١$ ، و مثل الجذور على مستوى أرجاند

الحلـــ

$\because\ ع^{٤} = ١ = حتا\ ٠ + ت\ حا\ ٠$

$\therefore\ ع = (حتا\ ٠ + ت\ حا\ ٠)^{\frac{١}{٤}}$

$= حتا\ \frac{١}{٤}(٢ر\pi) + ت\ حا\ \frac{١}{٤}(٢ر\pi)$

عندما ر = ٠ فإن :

$ع_{١} = حتا\ ٠ + ت\ حا\ ٠ = ١$

عندما ر = ١ فإن :

$ع_{٢} = حتا\ \frac{١}{٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\pi = ت$

عندما ر = −١ فإن :

$ع_{٣} = حتا(-\frac{١}{٢}\pi) + ت\ حا(-\frac{١}{٢}\pi) = -ت$

عندما ر = ٢ فإن : $ع_{٤} = حتا\ \pi + ت\ حا\ \pi = -١$

الجذور النونية :

المعادلة : $س^{ن} = أ$ حيث : أ عدد مركب يكون لها ن من الجذور على الصورة : $س = أ^{\frac{١}{ن}}$

يمكن حسابها بايجاد الصورة المثلثية للعدد أ ثم تطبيق نظرية ديموافر

ملاحظات :

(١) جميع الجذور لها نفس المقياس = $\sqrt[ن]{|أ|} = |أ|^{\frac{١}{ن}}$

(٢) السعة الأساسية تبدأ من $\frac{\theta}{ن}$ و تزداد بمقدار $\frac{١}{ن} \times ٢\pi$

(٣) تقع جميع الجذور فى مستوى أرجاند على دائرة واحدة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها = $\sqrt[ن]{|أ|}$

و احداثيات النقط تكون مضلعاً منتظماً عدد أضلاعه = ن

أى : تقسم الدائرة إلى أقواس متساوية عددها = ن ، و قياس كل منها = قياس الزاوية بين كل جذر و الذى يليه = $\frac{1}{ن}$ × ٢ π

فمثلاً :

الجذور التكعيبية تقسم الدائرة التى مركزها نقطة الأصل إلى ٣ أقواس متساوية و قياس كل منها = $\frac{1}{3}$ × ٢ π = (١٢٠°)

(احداثيات النقطة تكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع)

الجذور الخماسية تقسم الدائرة التى مركزها نقطة الأصل إلى ٥ أقواس متساوية و قياس كل منها = $\frac{1}{5}$ × ٢ π = (٧٢°)

(احداثيات النقطة تكون رؤوس مضلع خماسى منتظم)

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ٥٣

مثل الجذور على مستوى أرجاند الجذور السداسية للعدد ١

الحل

∵ ع^{٦} = ١ = حتا ٠° + ت حا ٠°

∴ ع = (حتا ٠° + ت حا ٠°)$^{\frac{1}{6}}$

= حتا $\frac{1}{6}$(٢ ر π) + ت حا $\frac{1}{6}$(٢ ر π)

عندما ر = ٠ فإن :

ع$_{١}$ = حتا ٠° + ت حا ٠°

و يكون قياس الزاوية بين كل جذر و الذى يليه هو : $\frac{1}{6}$ × ٢ π = ٦٠°

∴ ع$_{٢}$ = حتا (٠° + ٦٠°) + ت حا (٠° + ٦٠°)

= حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°

، ع$_{٣}$ = حتا (٠° + ٢ × ٦٠°) + ت حا (٠° + ٢ × ٦٠°)

= حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°

، ع$_{٤}$ = حتا (٠° + ٣ × ٦٠°) + ت حا (٠° + ٣ × ٦٠°)

= حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°

، ع$_{٥}$ = حتا (٠° + ٤ × ٦٠°) + ت حا (٠° + ٤ × ٦٠°)

= حتا ٢٤٠° + ت حا ٢٤٠° = حتا (– ١٢٠°) + ت حا (– ١٢٠°)

، ع$_{٦}$ = حتا (٠° + ٥ × ٦٠°) + ت حا (٠° + ٥ × ٦٠°)

= حتا ٣٠٠° + ت حا ٣٠٠° = حتا (– ٦٠°) + ت حا (– ٦٠°)

و بطريقة أخرى :

∵ ع^{٦} = ١ = حتا ٠° + ت حا ٠°

∴ ع = (حتا ٠° + ت حا ٠°)$^{\frac{1}{6}}$

= [حتا $\frac{1}{6}$(٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{1}{6}$(٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، – ١ ، ٢ ، – ٢ ، ٣

عندما ر = ٠ فإن : ع$_{١}$ = حتا ٠° + ت حا ٠°

عندما ر = ١ فإن : ع$_{٢}$ = حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°

عندما ر = – ١ فإن : ع$_{٣}$ = حتا (– ٦٠°) + ت حا (– ٦٠°)

عندما ر = ٢ فإن : ع$_{٤}$ = حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°

عندما ر = – ٢ فإن : ع$_{٥}$ = حتا (– ١٢٠°) + ت حا (– ١٢٠°)

عندما ر = ٣ فإن : ع$_{٦}$ = حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°

ايجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب :

(١) باستخدام الصورة المثلثية :

إذا كان : ع = ل (حتا θ + ت حا θ)

حيث : θ السعة الأساسية للعدد ع

فإن : $ع^{\frac{1}{2}}$ = (ل (حتا θ + ت حا θ))$^{\frac{1}{2}}$

= $\sqrt{ل}$ (حتا $\frac{θ + ٢ ر π}{٢}$ + ت حا $\frac{θ + ٢ ر π}{٢}$) حيث :

١) إذا كان : θ ∋] ٠ ، π] فإن : ر = ٠ ، ١ −

٢) إذا كان : θ ∋] − π ، ٠] فإن : ر = ٠ ، ١

و يلاحظ :

الجذران يقسمان الدائرة التى مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها $\sqrt{ل}$ إلى قوسين متساويين قياس كل منهما = ١٨٠°

" كل منهما نصف دائرة "

أى أن : احداثيات النقطتين تكونان على استقامة واحدة

(٢) باستخدام الصورة الجبرية :

إذا كان : ع = ٩ + ت ب   نفرض أن : $ع^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص

∴ (٩ + ت ب)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص   بالتربيع ينتج :

٩ + ت ب = س٢ − ص٢ + ٢ ت س ص

∴ س٢ − ص٢ = ٩   (١)   ، ٢ س ص = ب   (٢)

بحل (١) ، (٢) نحصل على قيم س ، ص و بالتالى نحصل على $ع^{\frac{1}{2}}$

لاحظ :

١) س٢ − ص٢ < ٠ . حيث : س٢ − ص٢ = مقياس العدد ع

٢) إذا كان : ٢ س ص > ٠ . فإن : س ، ص لهما نفس الإشارة

٣) إذا كان : ٢ س ص < ٠ . فإن : س ، ص مختلفى الإشارة

ملاحظة :

يفضل استخدام الصورة المثلثية إذا كان : θ = طا$^{-1}$ ($\frac{ص}{س}$) فإن : θ قياس لأحدى الزوايا الخاصة : ٣٠° أو ٤٥° أو ....

أما إذا كانت θ قياس زاوية أخرى فيفضل استخدام الصورة الجبرية

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ٥٣

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد : ٧ − ٢٤ ت

الحل

نفرض أن : (٧ − ٢٤ ت)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص   بالتربيع ينتج :

٧ − ٢٤ ت = س٢ − ص٢ + ٢ ت س ص

∴ س٢ − ص٢ = ٧   (١)   ، ٢ س ص = − ٢٤   (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

س٤ − ٢ س٢ص٢ + ص٤ + ٤ س٢ص٢ = ٦٢٥

∴ س٤ + ٢ س٢ص٢ + ص٤ = ٦٢٥

∴ (س٢ + ص٢)٢ = ٦٢٥   ∴ س٢ + ص٢ = ٢٥   (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : ٢ س٢ = ٣٢

∴ س٢ = ١٦   ∴ س = ± ٤

، ∵ من (٢) ٢ س ص < ٠ . فإن : س ، ص مختلفى الإشارة

∴ بالتعويض فى (٢) ينتج :

عندما : س = ٤ فإن : ص = − ٣

، عندما : س = − ٤ فإن : ص = ٣

∴ الجذر الأول = ٤ − ٣ ت ، الجذر الثانى = − ٤ + ٣ ت

أى أن : الجذرين التربيعيين للعدد : ٧ − ٢٤ ت هما : ± (٤ − ٣ ت)

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ٥٤

أوجد فى ك مجموعة حل المعادلة :

$$س^{٢} + (١ + ت) س - ٦ + ٣ ت$$

الحل

∵ $س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ ج}}{٢ أ}$ " القانون العام لحل المعادلة التربيعية "

∴ $س = \frac{- (١ + ت) \pm \sqrt{(١ + ت)^{٢} - ٤ \times ١ \times (- ٦ + ٣ ت)}}{٢ \times ١}$

$= \frac{- (١ + ت) \pm \sqrt{٢ ت + ٢٤ - ١٢ ت}}{٢}$

$= \frac{- (١ + ت) \pm \sqrt{٢٤ - ١٠ ت}}{٢}$

بفرض أن : $م + ن ت = \sqrt{٢٤ - ١٠ ت}$ بالتربيع ينتج :

$م^{٢} - ن^{٢} + ٢ م ن ت = ٢٤ - ١٠ ت$

∴ $م^{٢} - ن^{٢} = ٢٤$ (١) ، $٢ م ن = - ١٠$ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

$م^{٤} - ٢ م^{٢} ن^{٢} + ن^{٤} + ٤ م^{٢} ن^{٢} = ٦٧٦$

∴ $م^{٤} + ٢ م^{٢} ن^{٢} + ن^{٤} = ٦٧٦$

∴ $(م^{٢} + ن^{٢})^{٢} = ٦٧٦$ ∴ $م^{٢} + ن^{٢} = ٢٦$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : $٢ م^{٢} = ٥٠$

∴ $م^{٢} = ٢٥$ ∴ $م = \pm ٥$

، ∵ من (٢) $٢ م ن < ٠$ فإن : م ، ن مختلفى الإشارة

∴ بالتعويض فى (١) ينتج :

عندما : م = ٥ فإن : ن = − ١

، عندما : م = − ٥ فإن : ن = ١

∴ $\sqrt{٢٤ - ١٠ ت} = \pm (٥ - ت)$

∴ $س = \frac{- (١ + ت) \pm (٥ - ت)}{٢}$

∴ $س = \frac{- ١ - ت + ٥ - ت}{٢} = \frac{٤ - ٢ ت}{٢} = ٢ - ت$

أو $س = \frac{- ١ - ت - ٥ + ت}{٢} = - \frac{٦}{٢} = - ٣$

∴ مجموعة الحل = { ٢ − ت ، − ٣ }

حل تمارين (٢ – ٢) صفحة ٥٤ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

(١) باستخدام نظرية ديموافر أثبت صحة المتطابقات الآتية :

(أ) حتا 4θ = ٨ حتا$^{4}\theta$ – ٨ حتا$^{2}\theta$ + ١

(ب) حا 5θ = ١٦ حا$^{5}\theta$ – ٢٠ حا$^{3}\theta$ + ٥ حاθ

الحل

(أ) ∵ (حتاθ + ت حاθ)^{4} = حتا 4θ + ت حا 4θ (١)

، (حتاθ + ت حاθ)^{4} = حتا$^{4}\theta$ + ق$_{1}^{4}$ حتا$^{3}\theta$ (ت حاθ) + ق$_{2}^{4}$ حتا$^{2}\theta$ (ت حاθ)^{2} + ق$_{3}^{4}$ حتاθ (ت حاθ)^{3} + (ت حاθ)^{4}

= حتا$^{4}\theta$ + ٤ ت حتا$^{3}\theta$ حاθ – ٦ حتا$^{2}\theta$ حا$^{2}\theta$ – ٤ ت حتاθ حا$^{3}\theta$
+ حا$^{4}\theta$

= حتا$^{4}\theta$ – ٦ حتا$^{2}\theta$ حا$^{2}\theta$ + حا$^{4}\theta$
+ (٤ حتا$^{3}\theta$ حاθ – ٦ حتا$^{2}\theta$ حا$^{2}\theta$ – ٤ حتاθ حا$^{3}\theta$) ت (٢)

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء الحقيقى ينتج :

حتا 4θ = حتا$^{4}\theta$ – ٦ حتا$^{2}\theta$ حا$^{2}\theta$ + حا$^{4}\theta$

= حتا$^{4}\theta$ – ٦ حتا$^{2}\theta$ (١ – حتا$^{2}\theta$) + (١ – حتا$^{2}\theta$)^{2}

= حتا$^{4}\theta$ – ٦ حتا$^{2}\theta$ + ٦ حتا$^{4}\theta$ + ١ – ٢ حتا$^{2}\theta$ + حتا$^{4}\theta$

= ٨ حتا$^{4}\theta$ – ٨ حتا$^{2}\theta$ + ١

(ب) ∵ (حتاθ + ت حاθ)^{5} = حتا 5θ + ت حا 5θ (١)

، (حتاθ + ت حاθ)^{5} = حتا$^{5}\theta$ + ق$_{1}^{5}$ حتا$^{4}\theta$ (ت حاθ)
+ ق$_{2}^{5}$ حتا$^{3}\theta$ (ت حاθ)^{2} + ق$_{3}^{5}$ حتا$^{2}\theta$ (ت حاθ)^{3}
+ ق$_{4}^{5}$ حتاθ (ت حاθ)^{4} + (ت حاθ)^{5}

= حتا$^{5}\theta$ + ٥ ت حتا$^{4}\theta$ حاθ – ١٠ حتا$^{3}\theta$ حا$^{2}\theta$ – ١٠ ت حتا$^{2}\theta$ حا$^{3}\theta$
+ ٥ حتاθ حا$^{4}\theta$ + ت حا$^{5}\theta$

= حتا$^{5}\theta$ – ١٠ حتا$^{3}\theta$ حا$^{2}\theta$ + ٥ حتاθ حا$^{4}\theta$
+ (٥ حتا$^{4}\theta$ حاθ – ١٠ حتا$^{2}\theta$ حا$^{3}\theta$ + حا$^{5}\theta$) ت (٢)

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء التخيلى ينتج :

حا 5θ = ٥ حتا$^{4}\theta$ حاθ – ١٠ حتا$^{2}\theta$ حا$^{3}\theta$ + حا$^{5}\theta$

= ٥ (١ – حا$^{2}\theta$)^{2} حاθ – ١٠ (١ – حا$^{2}\theta$) حا$^{3}\theta$ + حا$^{5}\theta$

= ٥ (١ – ٢ حا$^{2}\theta$ + حا$^{4}\theta$) حاθ – ١٠ حا$^{3}\theta$
+ ١٠ حا$^{5}\theta$ + حا$^{5}\theta$

= ٥ حاθ – ١٠ حا$^{3}\theta$ + ٥ حا$^{5}\theta$ – ١٠ حا$^{3}\theta$ + ١٠ حا$^{5}\theta$ + حا$^{5}\theta$

= ١٦ حا$^{5}\theta$ – ٢٠ حا$^{3}\theta$ + ٥ حاθ

(٢) أوجد فى ك مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :
أكتب الجذور على صورة : س + ت ص

(أ) ع^{4} = ١٦ **(ب)** ع^{3} + ٨ = ٠ **(حـ)** ع^{3} + ٨ ت = ٠

الحل

(أ) ∵ ع^{4} = ١٦ = ١٦ (حتا ٠° + ت حا ٠°)

∴ ع = ٢ (حتا ٠° + ت حا ٠°)$^{\frac{1}{4}}$

أحمد الشنتورى

= ٢ [حتا $\frac{١}{٤}$ (٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{١}{٤}$ (٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢

عندما ر = ٠ فإن : $ع_١$ = ٢ (حتا ٠° + ت حا ٠°) = ٢

عندما ر = ١ فإن : $ع_٢$ = ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٢ ت

عندما ر = −١ فإن : $ع_٣$ = ٢ [حتا (−٩٠°) + ت حا (−٩٠°)] = −٢ ت

عندما ر = ٢ فإن : $ع_٤$ = ٢ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) = −٢

∴ مجموعة الحل = { ٢ ، ٢ ت ، −٢ ت ، −٢ }

(ب) ∵ $ع^٣$ = −٨ = ٨ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

∴ ع = ٢ $(\text{حتا } ١٨٠° + \text{ت حا } ١٨٠°)^{\frac{١}{٣}}$

= ٢ [حتا $\frac{١}{٣}$ (١٨٠° + ٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{١}{٣}$ (١٨٠° + ٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما ر = ٠ فإن : $ع_١$ = ٢ (حتا ٦٠° + ت حا ٦٠°)

= ٢ ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ١ + $\sqrt{٣}$ ت

عندما ر = ١ فإن : $ع_٢$ = ٢ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) = −٢

عندما ر = −١ فإن : $ع_٣$ = ٢ [حتا (−٦٠°) + ت حا (−٦٠°)]

= ٢ ($\frac{١}{٢}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت) = ١ − $\sqrt{٣}$ ت

∴ مجموعة الحل = { ١ + $\sqrt{٣}$ ت ، −٢ ، ١ − $\sqrt{٣}$ ت }

(جـ) ∵ $ع^٣$ = −٨ ت = ٨ [حتا (−٩٠°) + ت حا (−٩٠°)]

∴ ع = ٢ $[\text{حتا } (−٩٠°) + \text{ت حا } (−٩٠°)]^{\frac{١}{٣}}$

= ٢ [حتا $\frac{١}{٣}$ (−٩٠° + ٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{١}{٣}$ (−٩٠° + ٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما ر = ٠ فإن : $ع_١$ = ٢ [حتا (−٣٠°) + ت حا (−٣٠°)]

= ٢ ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ ت) = $\sqrt{٣}$ − ت

عندما ر = ١ فإن : $ع_٢$ = ٢ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°) = ٢ ت

عندما ر = −١ فإن : $ع_٣$ = ٢ [حتا (−١٥٠°) + ت حا (−١٥٠°)]

= ٢ (−$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ ت) = −$\sqrt{٣}$ − ت

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt{٣}$ − ت ، ٢ ت ، −$\sqrt{٣}$ − ت }

(٣) أوجد مجموعة حل المعادلة : $ع^٥$ + ٢٤٣ = ٠ حيث : ع ∈ ك

الحل

∵ $ع^٥$ = −٢٤٣ = ٢٤٣ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°)

∴ ع = $[٢٤٣ (\text{حتا } ١٨٠° + \text{ت حا } ١٨٠°)]^{\frac{١}{٥}}$

= ٣ [حتا $\frac{١}{٥}$ (١٨٠° + ٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{١}{٥}$ (١٨٠° + ٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، −١ ، ٢ ، −٢

عندما ر = ٠ فإن : $ع_١$ = ٣ (حتا ٣٦° + ت حا ٣٦°)

عندما ر = ١ فإن : $ع_٢$ = ٣ (حتا ١٠٨° + ت حا ١٠٨°)

عندما ر = −١ فإن : $ع_٣$ = ٣ [حتا (−٣٦°) + ت حا (−٣٦°)]

عندما ر = ٢ فإن : $ع_٤$ = ٣ (حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠°) = −٣

عندما ر = −٢ فإن : $ع_٥$ = ٣ [حتا (−١٠٨°) + ت حا (−١٠٨°)]

(٤) أوجد مجموعة حل المعادلة : $ع^٤$ = ٢ + ٢$\sqrt{٣}$ ت

أكتب الحل على الصورة الأسية

الحل

$\because ع^{٤} = ٢ + ٢\sqrt{٣}\,ت$ $\therefore$ س $= ٢$ ، ص $= ٢\sqrt{٣}$

$\therefore ل = \sqrt{٤ + ١٢} = ٤$ وحدة طول أى أن : مقياس $ع^{٤} = ٤$ وحدة طول

، $\because$ س > ٠ ، ص > ٠ $\therefore ع^{٤}$ يقع فى الربع الأول

$\therefore \theta = ظا^{-١}(\sqrt{٣}) = \frac{١}{٣}\pi$ $\therefore ع^{٤} = ٤\,(حتا\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,حا\,\frac{١}{٣}\pi)$

$\therefore ع = \left[\,٤\,(حتا\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,حا\,\frac{١}{٣}\pi)\,\right]^{\frac{١}{٤}}$

$= \sqrt{٢}\left[\,حتا\,\frac{١}{٤}(\frac{١}{٣}\pi + ٢ر\pi) + ت\,حا\,\frac{١}{٤}(\frac{١}{٣}\pi + ٢ر\pi)\,\right]$

حيث : ر $= ٠$ ، ١ ، -١ ، -٢

عندما ر $= ٠$ فإن : $ع_{١} = \sqrt{٢}\,(حتا\,\frac{١}{١٢}\pi + ت\,حا\,\frac{١}{١٢}\pi) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{١٢}ت}$

عندما ر $= -١$ فإن : $ع_{٢} = \sqrt{٢}\left[\,حتا\,(-\frac{٥}{١٢}\pi) + ت\,حا\,(-\frac{٥}{١٢}\pi)\,\right]$

$= \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{٥}{١٢}\pi ت}$

عندما ر $= ١$ فإن : $ع_{٣} = \sqrt{٢}\,(حتا\,\frac{٧}{١٢}\pi + ت\,حا\,\frac{٧}{١٢}\pi) = \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧}{١٢}\pi ت}$

عندما ر $= -٢$ فإن : $ع_{٤} = \sqrt{٢}\left[\,حتا\,(-\frac{١١}{١٢}\pi) + ت\,حا\,(-\frac{١١}{١٢}\pi)\,\right]$

$= \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{١١}{١٢}\pi ت}$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{\sqrt{٢}\,هـ^{\frac{\pi}{١٢}ت} ، \sqrt{٢}\,هـ^{\frac{٧}{١٢}\pi ت} ، \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{٥}{١٢}\pi ت} ، \sqrt{٢}\,هـ^{-\frac{١١}{١٢}\pi ت}\}$

(٥) أوجد الجذور التربيعية لكل من :

(أ) $٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت$ (ب) $١ - ت$ (جـ) $٨\,ت$

(ء) $٣ + ٤\,ت$ (هـ) $٥ - ١٢\,ت$

الحل

(أ) نفرض أن : $(٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت)^{\frac{١}{٢}} =$ س + ت ص بالتربيع ينتج :

$٢ - ٢\sqrt{٣}\,ت = س^{٢} - ص^{٢} + ٢\,ت\,س\,ص$

$\therefore س^{٢} - ص^{٢} = ٢$ (١) ، $٢\,س\,ص = -٢\sqrt{٣}$ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

$س^{٤} - ٢\,س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} + ٤\,س^{٢}ص^{٢} = ١٦$

$\therefore س^{٤} + ٢\,س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ١٦$

$\therefore (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ١٦$ $\therefore س^{٢} + ص^{٢} = ٤$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : $٢\,س^{٢} = ٦$ $\therefore س^{٢} = ٣$ $\therefore$ س $= \pm\sqrt{٣}$

، $\because$ من (٢) ٢ س ص < ٠ فإن : س ، ص مختلفى الإشارة

$\therefore$ بالتعويض فى (٢) ينتج :

عندما : س $= \sqrt{٣}$ فإن : ص $= -١$

، عندما : س $= -\sqrt{٣}$ فإن : ص $= ١$

$\therefore$ الجذر الأول $= \sqrt{٣} - ت$ ، الجذر الثانى $= -\sqrt{٣} + ت$

أى أن : الجذرين التربيعيين للعدد : $٢ - \sqrt{٣}\,ت$ هما : $\pm(\sqrt{٣} - ت)$

(ب) نفرض أن : $ع = ١ - ت$ $\therefore$ س $= ١$ ، ص $= -١$

$\therefore ل = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

، $\because$ س > ٠ ، ص < ٠ $\therefore$ ع يقع فى الربع الرابع

$\therefore \theta = ظا^{-١}(-١) = -\frac{١}{٤}\pi$

$\therefore ع = \sqrt{٢}\left[\,حتا\,(-\frac{١}{٤}\pi) + ت\,حا\,(-\frac{١}{٤}\pi)\,\right]$

$\therefore ع^{\frac{١}{٢}} = \left[\,\sqrt{٢}\,(حتا\,(-\frac{١}{٤}\pi + ٢ر\pi) + ت\,حا\,(-\frac{١}{٤}\pi + ٢ر\pi))\,\right]^{\frac{١}{٢}}$

= $\sqrt[4]{2}$ [حتا $\frac{1}{2}$ (− $\frac{1}{4}\pi$ + ٢ ر π) + ت حا $\frac{1}{2}$ (− $\frac{1}{4}\pi$ + ٢ ر π)]

حيث : ر = ٠ ، ١

عندما ر = ٠ فإن : ع$_{١}$ = $\sqrt[4]{2}$ [حتا (− $\frac{1}{8}\pi$) + ت حا (− $\frac{1}{8}\pi$)]

عندما ر = ١ فإن : ع$_{٢}$ = $\sqrt[4]{2}$ (حتا $\frac{7}{8}\pi$ + ت حا $\frac{7}{8}\pi$)

(حـ) نفرض أن : (٨ ت)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص   بالتربيع ينتج :

٨ ت = س^{٢} − ص^{٢} + ٢ ت س ص

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٠ (١) ، ٢ س ص = ٨ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

س^{٤} − ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} + ٤ س^{٢} ص^{٢} = ٦٤

∴ س^{٢} + ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٦٤

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٦٤   ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٨ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : ٢ س^{٢} = ٨

∴ س^{٢} = ٤   ∴ س = ± ٢

، ∵ من (٢) ٢ س ص $>$ ٠ فإن : س ، ص لهما نفس الإشارة

∴ بالتعويض فى (٢) ينتج :

عندما : س = ٢   فإن : ص = ٢

، عندما : س = − ٢   فإن : ص = − ٢

∴ الجذر الأول = ٢ + ٢ ت ، الجذر الثانى = − ٢ − ٢ ت

أى أن : الجذرين التربيعيين للعدد : ٨ ت هما : ± (٢ + ٢ ت)

(ء) نفرض أن : (٣ + ٤ ت)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص   بالتربيع ينتج :

٣ + ٤ ت = س^{٢} − ص^{٢} + ٢ ت س ص

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٣ (١) ، ٢ س ص = ٤ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

س^{٤} − ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} + ٤ س^{٢} ص^{٢} = ٢٥

∴ س^{٢} + ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٥

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ٢٥   ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ٥ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : ٢ س^{٢} = ٨

∴ س^{٢} = ٤   ∴ س = ± ٢

، ∵ من (٢) ٢ س ص $>$ ٠ فإن : س ، ص لهما نفس الإشارة

∴ بالتعويض فى (٢) ينتج :

عندما : س = ٢   فإن : ص = ١

، عندما : س = − ٢   فإن : ص = − ١

∴ الجذر الأول = ٢ + ت ، الجذر الثانى = − ٢ − ت

أى أن : الجذرين التربيعيين للعدد : ٣ + ٤ ت هما : ± (٢ + ت)

(هـ) نفرض أن : (٥ − ١٢ ت)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص   بالتربيع ينتج :

٥ − ١٢ ت = س^{٢} − ص^{٢} + ٢ ت س ص

∴ س^{٢} − ص^{٢} = ٥ (١) ، ٢ س ص = − ١٢ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

س^{٤} − ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} + ٤ س^{٢} ص^{٢} = ١٦٩

∴ س^{٢} + ٢ س^{٢} ص^{٢} + ص^{٤} = ١٦٩

∴ (س^{٢} + ص^{٢})^{٢} = ١٦٩   ∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٣ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : ٢ س^{٢} = ١٨

∴ س^{٢} = ٩   ∴ س = ± ٣

، ∵ من (٢) ٢ س ص $>$ ٠ فإن : س ، ص مختلفى الإشارة

∴ بالتعويض فى (٢) ينتج :

عندما : س = ٣ فإن : ص = − ٢

، عندما : س = − ٣ فإن : ص = ٢

∴ الجذر الأول = ٣ − ٢ ت ، الجذر الثانى = − ٣ + ٢ ت

أى أن : الجذرين التربيعيين للعدد : ٥ − ١٢ ت هما : ± (٣ − ٢ ت)

(٦) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ٨ و مثل هذه الجذور على شكل أرجاند

الحل

∵ $ع^{٣}$ = ٨ = ٨ (حتا ٠° + ت حا ٠°)

∴ ع = ٢ $(حتا ٠° + ت حا ٠°)^{\frac{١}{٣}}$

= ٢ [حتا $\frac{١}{٣}$(٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{١}{٣}$(٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، − ١

عندما ر = ٠ فإن :

$ع_{١}$ = ٢ (حتا ٠° + ت حا ٠°) = ٢

عندما ر = ١ فإن :

$ع_{٢}$ = ٢ (حتا ١٢٠° + ت حا ١٢٠°)

عندما ر = − ١ فإن :

، $ع_{٣}$ = ٢ (حتا (− ١٢٠°) + ت حا (− ١٢٠°))

(٧) أوجد الجذور الرابعة للعدد − ١ و مثل هذه الجذور على شكل أرجاند

الحل

∵ $ع^{٤}$ = − ١ = حتا π + ت حا π

∴ ع = $(حتا π + ت حا π)^{\frac{١}{٤}}$

= حتا $\frac{١}{٤}$(π + ٢ ر π) + ت حا $\frac{١}{٤}$(π + ٢ ر π)

حيث : ر = ٠ ، − ١ ، ١ ، − ٢

عندما ر = ٠ فإن :

$ع_{١}$ = حتا $\frac{١}{٤}$π + ت حا $\frac{١}{٤}$π

عندما ر = − ١ فإن :

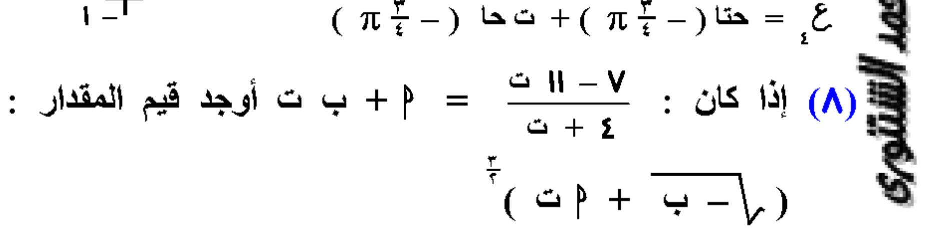
$ع_{٢}$ = حتا (− $\frac{١}{٤}$π) + ت حا (− $\frac{١}{٤}$π)

عندما ر = ١ فإن :

، $ع_{٣}$ = ٢ (حتا $\frac{٣}{٤}$π + ت حا $\frac{٣}{٤}$π)

عندما ر = − ٢ فإن :

$ع_{٤}$ = حتا (− $\frac{٣}{٤}$π) + ت حا (− $\frac{٣}{٤}$π)



(٨) إذا كان : $\frac{٧ − ١١ ت}{٤ + ت}$ = أ + ب ت أوجد قيم المقدار : $(\sqrt{− ب} + أ ت)^{\frac{٣}{٢}}$

الحل

∵ $\frac{٧ − ١١ ت}{٤ + ت} \times \frac{٤ − ت}{٤ − ت} = \frac{١٧ − ٥١ ت}{١٧}$ = ١ − ٣ ت

∴ أ = ١ ، ب = − ٣

، بفرض أن : ع = $(\sqrt{− ب} + أ ت)^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ ع = $(\sqrt{٣} + ت)^{\frac{٣}{٢}}$

∴ $ع^{٢} = (\sqrt{٣} + ت)^{٣} = (\sqrt{٣})^{٣} + ٣ (\sqrt{٣})^{٢} ت + ٣ \sqrt{٣} ت^{٢} + ت^{٣}$

= ٣ $\sqrt{٣}$ + ٩ ت − ٣ $\sqrt{٣}$ − ت = ٨ ت

= ٨ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)

∴ ع = $[٨ (حتا ٩٠° + ت حا ٩٠°)]^{\frac{١}{٢}}$

= ٢ $\sqrt{2}$ [حتا $\frac{1}{2}$(٩٠° + ٣٦٠° ر) + ت حا $\frac{1}{2}$(٩٠° + ٣٦٠° ر)]

حيث : ر = ٠ ، −١

عندما ر = ٠ فإن : ع$_1$ = ٢ $\sqrt{2}$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)

= ٢ $\sqrt{2}$ ($\frac{1}{\sqrt{2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت) = ٢ + ٢ ت

عندما ر = −١ فإن : ع$_2$ = ٢ $\sqrt{2}$ [حتا (−١٣٥°) + ت حا (−١٣٥°)]

= ٢ $\sqrt{2}$ (−$\frac{1}{\sqrt{2}}$ − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ت) = −٢ − ٢ ت

(٩) ضع العدد : ٢ $\sqrt{2}$ (١ + ت) على الصورة المثلثية ثم أوجد جذوره التربيعية على الصورة الأسية

الحل

بفرض أن : ع = ٢ $\sqrt{2}$ + ٢ $\sqrt{2}$ ت ∴ س = ٢ $\sqrt{2}$ ، ص = ٢ $\sqrt{2}$

∴ ل = $\sqrt{8+8}$ = ٤ وحدة طول

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ع يقع فى الربع الأول

∴ θ = ظا$^{-1}$ (١) = $\frac{1}{4}\pi$ ∴ ع = ٤ (حتا $\frac{1}{4}\pi$ + ت حا $\frac{1}{4}\pi$)

∴ ع$^{\frac{1}{2}}$ = ٢ [حتا $\frac{1}{2}$($\frac{1}{4}\pi$ + ٢ ر π) + ت حا $\frac{1}{2}$($\frac{1}{4}\pi$ + ٢ ر π)]

حيث : ر = ٠ ، −١

عندما ر = ٠ فإن : ع$_1$ = ٢ (حتا $\frac{1}{8}\pi$ + ت حا $\frac{1}{8}\pi$) = ٢ هـ$^{\frac{1}{8}\pi \text{ ت}}$

عندما ر = −١ فإن : ع$_2$ = ٢ [حتا (−$\frac{7}{8}\pi$) + ت حا (−$\frac{7}{8}\pi$)]

= ٢ هـ$^{-\frac{7}{8}\pi \text{ ت}}$

(١٠) إذا كان : ع = ٨ − ٦ ت أوجد ع$^{\frac{3}{2}}$ على الصورة الجبرية

الحل

∴ ع = ٨ − ٦ ت ∴ ع$^{\frac{1}{2}}$ = (٨ − ٦ ت)$^{\frac{1}{2}}$

بفرض أن : (٨ − ٦ ت)$^{\frac{1}{2}}$ = س + ت ص بالتربيع ينتج :

٨ − ٦ ت = س^2 − ص^2 + ٢ ت س ص

∴ س^2 − ص^2 = ٨ (١) ، ٢ س ص = −٦ (٢)

بتربيع (١) ، (٢) و الجمع ينتج :

س^4 − ٢ س^2 ص^2 + ص^4 + ٤ س^2 ص^2 = ١٠٠

∴ س^2 + ٢ س^2 ص^2 + ص^4 = ١٠٠

∴ (س^2 + ص^2)^2 = ١٠٠ ∴ س^2 + ص^2 = ١٠ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ينتج : ٢ س^2 = ١٨

∴ س^2 = ٩ ∴ س = ± ٣

، ∵ من (٢) ٢ س ص < ٠ فإن : س ، ص مختلفى الإشارة

∴ بالتعويض فى (٢) ينتج :

عندما : س = ٣ فإن : ص = −١

، عندما : س = −٣ فإن : ص = ١

∴ ع$^{\frac{1}{2}}$ = ± (٣ − ت)

∴ ع$^{\frac{3}{2}}$ = (± (٣ − ت))^3 = ± (١٨ − ٢٦ ت)

(١١) أثبت أن : حتا^{4} θ = $\frac{1}{8}$ (حتا ٤ θ + ٤ حتا ٢ θ + ٣)

الحل

∵ (حتا θ + ت حا θ)^{4} = حتا ٤ θ + ت حا ٤ θ (١)

، (حتا θ + ت حا θ)^{4} = حتا^{4} θ + ق$_{1}^{4}$ حتا^{3} θ (ت حا θ) + ق$_{2}^{4}$ حتا^{2} θ (ت حا θ)^{2} + ق$_{3}^{4}$ حتا θ (ت حا θ)^{3} + (ت حا θ)^{4}

= حتا^{4} θ + ٤ ت حتا^{3} θ حا θ − ٦ حتا^{2} θ حا^{2} θ − ٤ ت حتا θ حا^{3} θ + حا^{4} θ

= حتا^{4} θ − ٦ حتا^{2} θ حا^{2} θ + حا^{4} θ

+ (٤ حتا^{3} θ حا θ − ٦ حتا^{2} θ حا^{2} θ − ٤ حتا θ حا^{3} θ) ت (٢)

من (١) ، (٢) بمساواة الجزء الحقيقى ينتج :

∴ حتا ٤ θ = حتا^{4} θ − ٦ حتا^{2} θ حا^{2} θ + حا^{4} θ

= حتا^{4} θ − ٦ حتا^{2} θ (١ − حتا^{2} θ) + (١ − حتا^{2} θ)^{2}

= حتا^{4} θ − ٦ حتا^{2} θ + ٦ حتا^{4} θ + ١ − ٢ حتا^{2} θ + حتا^{4} θ

= ٨ حتا^{4} θ − ٨ حتا^{2} θ + ١

∴ حتا^{4} θ = $\frac{1}{8}$ (حتا ٤ θ + ٨ حتا^{2} θ − ١)

= $\frac{1}{8}$ (حتا ٤ θ + ٨ × $\frac{1}{2}$ (حتا ٢ θ + ١) − ١)

= $\frac{1}{8}$ (حتا ٤ θ + ٤ حتا ٢ θ + ٤ − ١)

= $\frac{1}{8}$ (حتا ٤ θ + ٤ حتا ٢ θ + ٣)

٢ − ٣ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

الجذور التكيبية للواحد الصحيح :

ايجاد الجذور التكيبية للواحد الصحيح باستخدام نظرية ديموافر :

نحل المعادلة : ع^{3} = ١ كما يلى :

∵ ١ = حتا ٠ + ت حا ٠ . ∴ ع^{3} = حتا ٠ + ت حا ٠ .

∴ ع = (حتا ٠ + ت حا ٠)$^{\frac{1}{3}}$ = حتا $\frac{1}{3}$ (٢ ر π) + ت حا $\frac{1}{3}$ (٢ ر π)

عندما : ر = ٠ فإن : ع$_{1}$ = حتا ٠ + ت حا ٠ = ١

عندما : ر = ١ فإن : ع$_{2}$ = حتا $\frac{2}{3}$ π + ت حا $\frac{2}{3}$ π

= − $\frac{1}{2}$ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

عندما : ر = −١ فإن : ع$_{3}$ = حتا (− $\frac{2}{3}$ π) + ت حا (− $\frac{2}{3}$ π)

= − $\frac{1}{2}$ − $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ت

إجابة تفكير ناقد صفحة ٥٥

هل يمكنك ايجاد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح باستخدام الصورة الجبرية

الحل

نحل المعادلة : ع^{3} = ١ أى : ع^{3} − ١ = ٠ فيكون :

(ع − ١) (ع^{2} + ع + ١) = ٠

∴ ع − ١ = ٠ و منها : ع = ١ أ، ع^{2} + ع + ١ = ٠

و منها : باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية يكون :

ع = $\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ = $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ = $\frac{-1 \pm \sqrt{3\text{ت}^{2}}}{2}$

أحمد الشتوى

$\therefore$ ع $= \frac{-١ \pm \sqrt{٣}\,ت}{٢} = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$

$\therefore$ الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى :

$١ \ ، \ -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت \ ، \ -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$

ملاحظات :

(١) الجذور التكعيبية للواحد الصحيح هى أعداد مركبة احداها حقيقى هو ١ و الآخران مركبان مترافقان

(٢) مربع أحد الجذرين المركبين يساوى الجذر الآخر حيث :

من الصورة المثلثية :

$(\text{حتا } \frac{٢}{٣}\pi + ت \text{ حا } \frac{٢}{٣}\pi)^٢ = \text{حتا } \frac{٤}{٣}\pi + ت \text{ حا } \frac{٤}{٣}\pi$

$= \text{حتا } (\frac{٤}{٣}\pi - ٢\pi) + ت \text{ حا } (\frac{٤}{٣}\pi - ٢\pi)$

$= \text{حتا } (-\frac{٢}{٣}\pi) + ت \text{ حا } (-\frac{٢}{٣}\pi) =$ الجذر المركب الآخر

، $[\text{حتا } (-\frac{٢}{٣}\pi) + ت \text{ حا } (-\frac{٢}{٣}\pi)]^٢$

$= \text{حتا } (-\frac{٤}{٣}\pi) + ت \text{ حا } (-\frac{٤}{٣}\pi)$

$= \text{حتا } (٢\pi - \frac{٤}{٣}\pi) + ت \text{ حا } (٢\pi - \frac{٤}{٣}\pi)$

$= \text{حتا } \frac{٢}{٣}\pi + ت \text{ حا } \frac{٢}{٣}\pi =$ الجذر المركب الآخر

من الصورة الجبرية :

$(-\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت)^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} - ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$

$= -\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت =$ الجذر الآخر ،

$(-\frac{١}{٢} - \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت)^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} + ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$

$= -\frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت =$ الجذر الآخر

و لذلك يمكن أن نفرض الجذور التكعيبية على الصورة : $١ \ ، \ \omega \ ، \ \omega^٢$

حيث : $\omega = -\frac{١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$ ، $\omega^٢ = -\frac{١}{٢} \mp \frac{\sqrt{٣}}{٢}\,ت$

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

إذا كانت : $١ \ ، \ \omega \ ، \ \omega^٢$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح فإن :

(١) $١ + \omega + \omega^٢ = ٠$ " مجموع الجذور = صفر " ينتج ذلك :
مباشرة بجمع الجذور التى على الصورة الجبرية و منها :

$١ + \omega = -\omega^٢ \ ، \ ١ + \omega^٢ = -\omega \ ، \ \omega + \omega^٢ = -١$

(٢) $\omega \times \omega^٢ = ١$ أى أن : $\omega^٣ = ١$

" حاصل ضرب الجذرين المركبين = ١ " ينتج ذلك :
مباشرة بضرب الجذرين المركبين اللذين على الصورة الجبرية

ملاحظة : القوى الصحيحة للعدد ω :

القوى الصحيحة للعدد : ω تعطى إحدى القيم : $١ \ ، \ \omega \ ، \ \omega^٢$ حيث :

١) قيم العدد : ω تتكرر بصفة دورية كلما زاد الأس بمقدار : ٣

٢) لإيجاد $\omega^{ن}$ حيث : $ن \in ص_+$ نقسم ن على ٣ فيكون :

$\omega^{ن}$ = إحدى القيم كما بالجدول المقابل :

باقى القسمة	٠	١	٢
القيمة	١	ω	$\omega^{٢}$

(٣) لإيجاد $\omega^{ن}$ حيث : $ن \in ص^{-}$ نقسم ن على ٣

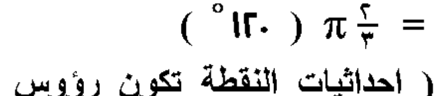
فيكون : $ت^{ن}$ = إحدى القيم كما بالجدول التالى :

باقى القسمة	٠	− ١	− ٢
القيمة	١	$\omega^{٢}$	ω

حيث : $\omega^{-١} = \frac{١}{\omega} = \frac{\omega^{٣}}{\omega} = \omega^{٢}$ أ، $\omega^{-١} = \omega^{-١} \times \omega^{٣} = \omega^{٢}$

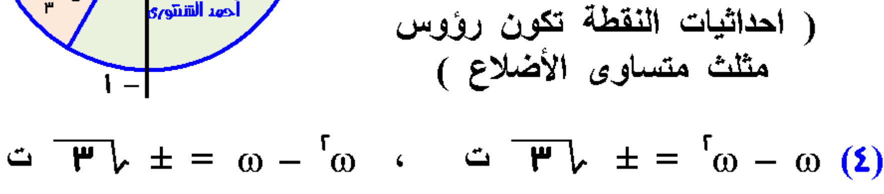
، $\omega^{-٢} = \frac{١}{\omega^{٢}} = \frac{\omega^{٣}}{\omega^{٢}} = \omega$ أ، $\omega^{-٢} = \omega^{-٢} \times \omega^{٣} = \omega$

(٣) الجذور التكعيبية تقسم الدائرة التى مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ١ إلى ٣ أقواس متساوية و قياس كل منها



$= \frac{٢}{٣}\pi$ (١٢٠°)

(احداثيات النقطة تكون رؤوس مثلث متساوى الأضلاع)



(٤) $\omega - \omega^{٢} = \pm\sqrt{٣}\,ت$ ، $\omega^{٢} - \omega = \pm\sqrt{٣}\,ت$

" الفرق بين الجذرين المركبين = $\pm\sqrt{٣}\,ت$ " لأن :

$\because (\omega - \omega^{٢})^{٢} = (\omega^{٢} - \omega)^{٢}$

$= \omega^{٤} - ٢\omega^{٣} + \omega^{٢} = \omega - ٢ + \omega^{٢}$

$= (\omega + \omega^{٢}) - ٢ = -١ - ٢ = -٣ = ٣ت^{٢}$

$\therefore \omega - \omega^{٢} = \pm\sqrt{٣}\,ت$ ، $\omega^{٢} - \omega = \pm\sqrt{٣}\,ت$

الجذور النونية للواحد الصحيح :

إذا كان : $ع^{ن} = ١$ فإن :

$ع = (حتا ٠ + ت حا ٠)^{\frac{١}{ن}} = حتا \frac{٢ر\pi}{ن} + ت حا \frac{٢ر\pi}{ن}$

حيث : $ر \in ص$ ، $\frac{٢ر\pi}{ن} \in]-\pi ، \pi]$

و تمثل الجذور النونية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند برؤوس مضلع منتظم عدد رؤوسه ن و تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها يساوى ١

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ٥٦

إذا كانت : ١ ، ω ، $\omega^{٢}$ هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح أوجد قيمة :

(أ) $(٢ + ٥\omega + ٢\omega^{٢})^{٥}$

(ب) $(\omega + \frac{١}{\omega})^{٢} (\omega^{٢} + \frac{١}{\omega^{٢}})^{٢}$

الحل

(أ) المقدار $= ((٢ + ٢\omega^{٢}) + ٥\omega)^{٥} = (٢(١ + \omega^{٢}) + ٥\omega)^{٥}$

$= (٢(-\omega) + ٥\omega)^{٥} = (-٢\omega + ٥\omega)^{٥}$

$= (٣\omega)^{٥} = ٢٤٣\omega^{٥} = ٢٤٣\omega^{٣} \times \omega^{٢} = ٢٤٣\omega^{٢}$

(ب) المقدار $= (\omega + \omega^2)^2 (\omega^2 + \omega)^2$ حيث : $\frac{1}{\omega} = \omega^2$ ، $\frac{1}{\omega^2} = \omega$

$= (-1)^2 (-1)^2 = 1$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ٥٦

أثبت أن : $\left[\frac{\text{أ} + \text{ب}\,\omega + \text{جـ}\,\omega^2}{\omega^2\,\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \frac{\text{جـ} + \text{ب}\,\omega + \text{أ}\,\omega^2}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}} \right]^8 = 81$

الحل

الطرف الأيمن $= \left[\frac{\omega(\text{أ}\,\omega^2 + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega)}{\omega^2\,\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}\,\omega} - \frac{\omega^2(\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ})}{\omega\,\text{جـ} + \text{ب}\,\omega^2 + \text{أ}} \right]^8$

$= (\omega - \omega^2)^8 = (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^8 = 81 =$ الطرف الأيسر

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ٥٧

كون المعادلة التربيعية التى جذراها :

$(1 + \omega - \omega^2)^3$ ، $(1 - \omega + \omega^2)^3$

الحل

∵ $(1 + \omega - \omega^2)^3 = ((1 + \omega) - \omega^2)^3 = (-\omega^2 - \omega^2)^3$

$= (-2\omega^2)^3 = -8\omega^6 = -8$

، $(1 - \omega + \omega^2)^3 = ((1 + \omega^2) - \omega)^3 = (-\omega - \omega)^3$

$= (-2\omega)^3 = -8\omega^3 = -8$

∴ مجموع الجذرين $= -8 - 8 = -16$

، حاصل ضرب الجذرين $= (-8) \times (-8) = 64$

∴ المعادلة هى : $\text{س}^2 + 16\,\text{س} + 64 = 0$

حل تمارين (٢ – ٣) صفحة ٥٧ بالكتاب المدرسى

إذا كانت : 1 ، ω ، ω^2 هى الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

أكمل ما يلى :

(١) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^2 = \dots$

(٢) $(\omega - \omega^2)^4 = \dots$

(٣) $\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 \left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right)^2 = \dots$

(٤) إذا كان : $\text{س} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ فإن : $\text{س}^8 + \text{س}^4 = \dots$

(٥) $\left(\frac{1}{\omega + 1}\right)\left(1 + \omega - \frac{3}{\omega}\right) = \dots$

(٦) $1 + 3\omega + 3\omega^2 = \dots$

(٧) إذا كان : $\text{أ} = 2\omega - 3\omega^2$ ، $\text{ب} = 3 + 5\omega^2$

فإن : $\text{أ}^2 + \text{ب}^2 = \dots$

(٨) $\sum_{\text{ن}=1}^{5} \omega^{\text{ن}} = \dots$

الحل

(١) المقدار $= (2 + 2\omega^2 + 5\omega)^2 = (2(1 + \omega^2) + 5\omega)^2$

$= (2(-\omega) + 5\omega)^2 = (-2\omega + 5\omega)^2$

$= (3\omega)^2 = 9\omega^2$

(٢) المقدار $= (\pm\sqrt{3}\,\text{ت})^4 = 9$

(٣) المقدار $= (\omega + \omega^2)^2 (\omega^2 + \omega)^2 = (-1)^2(-1)^2 = 1$

(٤) $\because$ س $= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,\text{ت}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{ت}$

$\therefore$ س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح

عندما : س $= \omega$ فإن : س^8 + س$^4 = \omega^8 + \omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$

عندما : س $= \omega^2$ فإن : س^8 + س$^4 = \omega^{16} + \omega^8 = \omega + \omega^2 = -1$

(٥) المقدار $= \left(\frac{1}{-\omega^2}\right)(-\omega^2 - 3\omega^2) = \left(\frac{1}{-\omega^2}\right)(-4\omega^2) = 1$

(٦) المقدار $= 1 + 3(\omega + \omega^2) = 1 - 3 = -2$

(٧) أ$^2 = (2\omega - 3\omega^2)^2 = 4\omega^2 - 12\omega^3 + 9\omega^4 = 4\omega^2 - 12 + 9\omega$

ب$^2 = (3 + 5\omega^2)^2 = 9 - 30\omega^2 + 25\omega^4 = 9 + 30\omega^2 + 25\omega$

أ^2 + ب$^2 = 4\omega^2 - 12 + 9\omega + 9 + 30\omega^2 + 25\omega$

$= 34\omega^2 + 34\omega - 3 = 34(\omega + \omega^2) - 3$

$= -34 - 3 = -37$

(٨) المقدار $= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$

$= (\omega + \omega^2 + 1) + (\omega + \omega^2) = 0 - 1 = -1$

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(٩) مرافق العدد : ω يساوى ....

(أ) ω (ب) ω^2 (ج) ١ (د) $-\omega$

(١٠) $\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)^2 = ...$

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) -3 (د) -5

(١١) (أ + ب ω + أ ω^2) (أ + ب ω^2 + أ ω^4) = ...

(أ) ١ (ب) أ − ب (ج) (أ − ب)^2 (د) ب^2 − أ^2

(١٢) $\left(1 + 2\omega^5 + \frac{1}{\omega^2}\right)\left(1 + 2\omega + \frac{1}{\omega^4}\right) = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) -1 (د) ٢

(١٣) $\frac{\text{أ} - \text{ء}\,\omega}{\text{أ}\,\omega^2 - \text{ء}} - \omega^2 = ...$

(أ) ٣ ت (ب) $\pm\sqrt{3}$ ت (ج) -3 (د) ٣

(١٤) إذا كان : $(1 + \omega)^7$ = أ + ب ω حيث :

أ ، ب عددان حقيقيان فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٠ ، −١) (ب) (١ ، ١) (ج) (٠ ، ١) (د) (١ ، −١)

(١٥) إذا كان : $(1 + \omega)^{ن} = (1 + \omega^2)^{ن}$ فإن :

أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة هى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٥ (د) ٦

(١٦) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + ... + \omega^{100} = ...$

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ω (د) $-\omega^2$

(١٧) إذا كان : ع $= \omega^{س}$ فإن : | ع | = ...

حيث : س عدد صحيح موجب

(أ) ١ (ب) ω (ج) س (د) ω^2

(١٨) $\sum_{ر=1}^{6} 1 + \omega^{ر} = ...$

(أ) ω (ب) ω^2 (ج) ١ (د) $-\omega$

أحمد الشنتورى

الحل

(٩) ω^2 " مباشرة لأن الجذران التكعيبيان المركبان للواحد الصحيح مترافقان "

(١٠) المقدار = $(\omega^2+\omega^2)(1+\omega)^2 = (2\omega^2)(1+2\omega+\omega^2)$

$= (2\omega^2)((1+\omega^2)+2\omega) = (2\omega^2)(-\omega+2\omega)$

$= (2\omega^2)(\omega) = 2\omega^3 = 2$

(١١) المقدار = $(\text{أ}+\text{ب}\omega+\text{أ}\omega^2)(\text{أ}+\text{ب}\omega^2+\text{أ}\omega)$

$= (\text{أ}(1+\omega^2)+\text{ب}\omega)(\text{أ}(1+\omega)+\text{ب}\omega^2)$

$= (-\text{أ}\omega+\text{ب}\omega)(-\text{أ}\omega^2+\text{ب}\omega^2)$

$= \omega(-\text{أ}+\text{ب})\times\omega^2(-\text{أ}+\text{ب})$

$= \omega^3(-\text{أ}+\text{ب})^2 = (-(\text{أ}-\text{ب}))^2 = (\text{أ}-\text{ب})^2$

(١٢) المقدار = $(1+2\omega^2+\omega)(1+2\omega+\omega^2)$

$= ((1+\omega)+2\omega^2)((1+\omega^2)+2\omega)$

$= (-\omega^2+2\omega^2)(-\omega+2\omega) = \omega^2\times\omega = \omega^3 = 1$

(١٣) المقدار = $\frac{\omega(\text{أ}\omega^2-\text{ء})}{\text{أ}\omega^2-\text{ء}} - \omega^2 = \omega-\omega^2 = \pm\sqrt{3}\,\text{ت}$

(١٤) ∵ $(1+\omega)^7 = ((1+\omega)^2)^3(1+\omega)$

$= (1+2\omega+\omega^2)^3(1+\omega)$

$= ((1+\omega^2)+2\omega)^3(1+\omega)$

$= (-\omega+2\omega)^3(1+\omega)$

$= \omega^3(1+\omega) = (1+\omega)$

∴ $1+\omega = \text{أ}+\text{ب}\omega$ ∴ أ = ١ ، ب = ١

∴ (أ ، ب) = (١ ، ١)

(١٥) ∵ $(1+\omega)^{ن} = (1+\omega^2)^{ن}$ ∴ $(-\omega^2)^{ن} = (-\omega)^{ن}$

∴ $(-1)^{ن}(\omega^2)^{ن} = (-1)^{ن}(\omega)^{ن}$ ∴ $\omega^{2ن} = \omega^{ن}$

∴ $\omega^{2ن-ن} = 1$ ∴ $\omega^{ن} = 1$ ∴ ن = { ٠ ، ٣ ، ٦ ، .... }

∴ أقل قيمة لـ ن الصحيحة الموجبة تجعل تحقق العلاقة هى : ٣

(١٦) ∵ $1 = \omega^3 = \omega^6 = \omega^9 = ... = \omega^{99}$ ،

$\omega = \omega^4 = \omega^7 = ... = \omega^{100}$ ، $\omega^2 = \omega^5 = \omega^8 = ... = \omega^{98}$

∴ المقدار = $33(1+\omega+\omega^2)+\omega$

$= 33\times 0 + 1\times\omega = \omega$

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ω ، أساسها ر = ω

، حدها الأخير ل = $\omega^{100} = (\omega^3)^{33}\times\omega = 1\times\omega = \omega$

∴ $\text{ح}_{100} = \frac{\text{ل ر}-\text{أ}}{\text{ر}-1} = \frac{\omega\times\omega-\omega}{\omega-1} = \frac{\omega(\omega-1)}{\omega-1} = \omega$

(١٧) ∵ ع = $\omega^{س}$ ∴ ع = $(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت})^{س}$

∴ |ع| = $|(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت})^{س}| = (|\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}|)^{س}$

، ∵ $|\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

∴ |ع| = $(1)^{س} = 1$

(١٨) المقدار = $(1+\omega)+(1+\omega^2)+(1+\omega^3)+(1+\omega^4)$

$+(1+\omega^5)+(1+\omega^6)$

$= 6+(\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6)$

$= 6+(\omega+\omega^2+1+\omega+\omega^2+1)$

$= 6 +$ (صفر + صفر) $= 6$

(١٩) أثبت صحة المتطابقات الآتية :

(أ) $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)$
$(1 - \omega^8 + \omega^{16}) = 2^4$

(ب) $\left(\frac{\omega}{1 + 2\omega}\right)^2 \left(\frac{1 + 2\omega^2}{\omega^2}\right)^2 = -\frac{10}{3}\omega^2$

(جـ) $\left[\frac{1}{1 + \omega ت} - \frac{\omega + ت}{1 + \omega^2 ت}\right]^8 = 16$

(د) $\left[\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} - \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7}\right]^2 = -3$

(هـ) $(1 + \omega^2)^8 = \omega^2$

(و) $(1 - \omega^2 + \omega^4)^2 + (1 + \omega^2 + \omega^4)^2 = 4\omega$

الحل

(أ) الطرف الأيمن $= (1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega)$
$(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega)$
$= (1 - \omega + \omega^2)^2(1 - \omega^2 + \omega)^2$
$= ((1 + \omega^2) - \omega)^2((1 + \omega) - \omega^2)^2$
$= (-\omega - \omega)^2(-\omega^2 - \omega^2)^2$
$= (-2\omega)^2(-2\omega^2)^2 = 4\omega^2 \times 4\omega$
$= 16\omega^3 = 2^4 =$ الطرف الأيسر

(ب) الطرف الأيمن $= \frac{\omega^2}{1 + 4\omega + 4\omega^2} + \frac{1 + 4\omega + 4\omega^2}{\omega^4}$
$= \frac{\omega^2}{1 + 4(\omega + \omega^2)} + \frac{1 + (4\omega + \omega^2)}{\omega}$
$= \frac{\omega^2}{-3} + \frac{-3}{\omega} = -\frac{1}{3}\omega^2 - 3\omega^2$
$= -\frac{10}{3}\omega^2 =$ الطرف الأيسر

(جـ) الطرف الأيمن $= \left[\frac{1 + \omega^2 ت - (\omega + ت)(1 + \omega ت)}{(1 + \omega ت)(1 + \omega^2 ت)}\right]^8$
$= \left[\frac{1 + \omega^2 ت - \omega - \omega^2 ت - ت + \omega}{1 + \omega^2 ت + \omega ت - 1}\right]^8$
$= \left[\frac{1 - ت}{ت(\omega^2 + \omega)}\right]^8 = \left[\frac{1 - ت}{-ت}\right]^8$
$= \left[\left(\frac{1 - ت}{-ت}\right)^2\right]^4 = \left[\frac{-2ت}{-1}\right]^4$
$= \frac{16}{1} = 16 =$ الطرف الأيسر

(د) الطرف الأيمن $= \left[\frac{\omega^2(5\omega - 3)}{5\omega - 3} - \frac{\omega(2\omega^2 - 7)}{2\omega^2 - 7}\right]^2$
$= (\omega^2 - \omega)^2 = (\pm\sqrt{3}\, ت)^2 = -3 =$ الطرف الأيسر

(هـ) الطرف الأيمن $= (1 + \omega^2)^8 = (-\omega)^8 = \omega^8 = \omega^6 \times \omega^2$
$= \omega^2 =$ الطرف الأيسر

(و) الطرف الأيمن $= (1 - \omega^2 + \omega^4)^2 + (1 + \omega^2 + \omega^4)^2$
$= (1 - \omega^2 + \omega)^2 + (1 + \omega^2 + \omega)^2$
$= ((1 + \omega) - \omega^2)^2 + ($صفر$)^2$
$= (-\omega^2 - \omega^2)^2 = (-2\omega^2)^2$
$= 4\omega^4 = 4\omega =$ الطرف الأيسر

(٢٠) أوجد قيمة كل مما يأتى :

(أ) $5 + 3\omega + 3\omega^2$

(ب) $(1 + \omega + 2\omega^2)^2 + (1 + 2\omega + \omega^2)^2$

(حـ) $\dfrac{\omega^2(1-\omega)(1-\omega^2)}{(2\omega+1)(\omega^2+2)}$

(ء) $\left[\dfrac{1}{1+3\omega^2} - \dfrac{1}{1+3\omega}\right]^2$

(هـ) $\left(1 + \dfrac{1}{\omega} + \text{ت}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\omega^2} + \text{ت}\right)$

الحل

(أ) المقدار $= 5 + 3(\omega + \omega^2) = 5 - 3 = 2$

(ب) المقدار $= ((1+\omega) + 2\omega^2)^2 + ((1+\omega^2) + 2\omega)^2$

$= (-\omega^2 + 2\omega^2)^2 + (-\omega + 2\omega)^2$

$= (\omega^2)^2 + (\omega)^2 = \omega^4 + \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

(حـ) المقدار $= \dfrac{\omega^2(\omega^3 - \omega - \omega^2 + 1)}{2\omega^3 + 4\omega + \omega^2 + 2} = \dfrac{\omega^2(2 - (\omega + \omega^2))}{4 + 3\omega(\omega + \omega^2)}$

$= \dfrac{3\omega^2}{3 + 3\omega} = \dfrac{3\omega^2}{-3\omega^2} = -1$

(ء) المقدار $= \left[\dfrac{1 + 3\omega - 1 - 3\omega^2}{(1+3\omega)(1+3\omega^2)}\right]^2$

$= \left[\dfrac{3(\omega - \omega^2)}{1 + 3(\omega^2 + \omega) + 9\omega^3}\right]^2$

$= \left[\dfrac{\pm 3\sqrt{3}\,\text{ت}}{1 - 3 + 9}\right]^2 = -\dfrac{27}{49}$

(هـ) المقدار $= (1 + \omega^2 + \text{ت})(1 + \omega + \text{ت})$

$= (-\omega + \text{ت})(-\omega^2 + \text{ت})$

$= \omega^3 - (\omega + \omega^2)\text{ت} + \text{ت}^2 = 1 + \text{ت} - 1 = \text{ت}$

(٢١) إذا كان : $\text{س} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,\text{ت}}{2}$ أثبت أن :

$\text{س}^6 + 6\text{س}^5 + 15\text{س}^4 + 20\text{س}^3 + 15\text{س}^2 + 6\text{س} = 0$

الحل

$\because \text{س} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,\text{ت}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{ت}$

$\therefore$ س تمثل أحد الجذور المركبة للواحد الصحيح

عندما : $\text{س} = \omega$

فإن : $\text{س}^6 + 6\text{س}^5 + 15\text{س}^4 + 20\text{س}^3 + 15\text{س}^2 + 6\text{س}$

$= \omega^6 + 6\omega^5 + 15\omega^4 + 20\omega^3 + 15\omega^2 + 6\omega$

$= 1 + 6\omega^2 + 15\omega + 20 + 15\omega^2 + 6\omega$

$= 21 + 21\omega^2 + 21\omega = 21(1 + \omega + \omega^2) = 21 \times 0 = 0$

عندما : $\text{س} = \omega^2$

فإن : $\text{س}^6 + 6\text{س}^5 + 15\text{س}^4 + 20\text{س}^3 + 15\text{س}^2 + 6\text{س}$

$= \omega^{12} + 6\omega^{10} + 15\omega^8 + 20\omega^6 + 15\omega^4 + 6\omega^2$

$= 1 + 6\omega + 15\omega^2 + 20 + 15\omega + 6\omega^2$

$= 21 + 21\omega^2 + 21\omega = 21(1 + \omega + \omega^2) = 21 \times 0 = 0$

(٢٢) إذا كان : $\dfrac{1}{1+\omega}$ ، $\dfrac{1}{1+\omega^2}$ هما جذرا معادلة تربيعية

فأوجد المعادلة

الحل

$\because \frac{1}{1+\omega} = \frac{1}{-\omega^2} = -\omega$ ، $\frac{1}{1+\omega^2} = \frac{1}{-\omega} = -\omega^2$

$\therefore$ مجموع الجذرين $= -\omega - \omega^2 = -(\omega + \omega^2) = 1$

، حاصل ضرب الجذرين $= (-\omega) \times (-\omega^2) = 1$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^2 - \text{س} + 1 = 0$

(٢٣) إذا كان : $\text{ع} = 2(\omega + \text{ت})(\omega^2 + \text{ت})$ أوجد الصور المختلفة ع ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية

الحل

$\because \text{ع} = 2(\omega + \text{ت})(\omega^2 + \text{ت}) = 2(\omega^3 + (\omega + \omega^2)\text{ت} + \text{ت}^2)$

$= 2(1 - \text{ت} - 1) = -2\text{ت}$

$\therefore$ الصورة الجبرية للعدد ع هى : -2ت

، $\because \text{ع} = -2\text{ت} = 2[\text{حتا}(-\frac{1}{2}\pi) + \text{ت حا}(-\frac{1}{2}\pi)] = 2\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\pi\text{ت}}$

$\therefore$ الصورة المثلثية للعدد ع هى : $2[\text{حتا}(-\frac{1}{2}\pi) + \text{ت حا}(-\frac{1}{2}\pi)]$

، الصورة الأسية للعدد ع هى : $2\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\pi\text{ت}}$

، $\text{ع}^{\frac{1}{2}} = [2\,\text{حتا}(-\frac{1}{2}\pi + 2\text{ر}\pi) + \text{ت حا}(-\frac{1}{2}\pi + 2\text{ر}\pi)]^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}\,(\text{حتا}\frac{1}{2}[(-\frac{1}{2}\pi + 2\text{ر}\pi) + \text{ت حا}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\pi + 2\text{ر}\pi)]$

حيث : ر = ٠ ، ١

عندما ر = ٠ فإن : $\text{ع}_1 = \sqrt{2}\,[\text{حتا}(-\frac{1}{4}\pi) + \text{ت حا}(-\frac{1}{4}\pi)]$

عندما ر = ١ فإن : $\text{ع}_2 = \sqrt{2}\,(\text{حتا}\frac{3}{4}\pi + \text{ت حا}\frac{3}{4}\pi)$

(٢٤) أوجد قيم ن التى تجعل :

$$(2 + 5\omega + 2\omega^2)^{\text{ن}} = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^{\text{ن}}$$

الحل

$\because$ الطرف الأيمن $= (2 + 5\omega + 2\omega^2)^{\text{ن}}$

$= (2(1 + \omega^2) + 5\omega)^{\text{ن}}$

$= (-2\omega + 5\omega)^{\text{ن}} = (3\omega)^{\text{ن}} = 3^{\text{ن}}\omega^{\text{ن}}$

، الطرف الأيسر $= (2 + 2\omega + 5\omega^2)^{\text{ن}}$

$= (2(1 + \omega) + 5\omega^2)^{\text{ن}}$

$= (-2\omega^2 + 5\omega^2)^{\text{ن}} = (3\omega^2)^{\text{ن}} = 3^{\text{ن}}\omega^{2\text{ن}}$

$\therefore (2 + 5\omega + 2\omega^2)^{\text{ن}} = (2 + 2\omega + 5\omega^2)^{\text{ن}}$

عندما : $3^{\text{ن}}\omega^{\text{ن}} = 3^{\text{ن}}\omega^{2\text{ن}}$ أى عندما : $\omega^{\text{ن}} = \omega^{2\text{ن}}$

أى عندما : $\omega^{2\text{ن} - \text{ن}} = 1$ أى عندما : $\omega^{\text{ن}} = 1$

أى عندما : ن = { −٦ ، −٣ ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، .... }

أى عندما : ن = ٣ك حيث : ك $\in$ ص

$\therefore$ قيم ن تجعل تحقق العلاقة هى : ٣ك حيث : ك $\in$ ص

(٢٥) أوجد : (أ) $\sum_{\text{ر} = \text{صفر}}^{10} \omega^{\text{ر}}$

(ب) $\sum_{\text{ر} = \text{صفر}}^{10} (1 + \omega^{\text{ر}} + \omega^{2\text{ر}})$

الحل

(أ) المقدار $= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + ... + \omega^{10}$

∵ المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ١ ، أساسها ر = ω ،

، حدها الأخير ل $= \omega^{10} = (\omega^3)^3 \times \omega = 1 \times \omega = \omega$

∴ المقدار = حـن $= \dfrac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1} = \dfrac{\omega \times \omega - 1}{\omega - 1} = \dfrac{\omega^2 - 1}{\omega - 1}$

$= \dfrac{(\omega - 1)(\omega + 1)}{\omega - 1} = \omega + 1$

(ب) المقدار $= (1 + 1 + 1) + (1 + \omega + \omega^2) + (1 + \omega^2 + \omega^4)$

$+ (1 + \omega^3 + \omega^6) + (1 + \omega^4 + \omega^8) + ...$

$+ (1 + \omega^9 + \omega^{18}) + (1 + \omega^{10} + \omega^{20})$

$= 3 + (1 + \omega + \omega^2) + (1 + \omega^2 + \omega)$

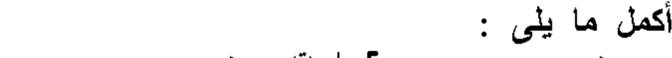
$+ 3 + (1 + \omega + \omega^2) + (1 + \omega^2 + \omega) + ...$

$+ 3 + (1 + \omega + \omega^2)$

$= 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0$

$+ 3 + 0 = 12$

حل تمارين عامة صفحة ٥٩ بالكتاب المدرسى



أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : ع $= \dfrac{2 + \text{ت}}{2 - \text{ت}}$ فإن : | ع | = ...

(٢) الصورة المثلثية للعدد ع الممثل على شكل أرجاند المقابل هى ....

(٣) إذا كان : ع = حا θ − ت حتا θ فإن : سعة ع = ...

(٤) مرافق العدد : ت + ω^2 هو ....

(٥) $1 + 2\omega + 2\omega^2 = ...$

(٦) إذا كان : $ع_1$ ، $ع_2$ ، .... ، $ع_5$ تمثل الجذور السداسية للواحد الصحيح على مستوى أرجاند فإن : ق(∠ $ع_ر$ و $ع_{ر+1}$) = ... حيث : $0 \le$ ر ≤ 5

الحل

(١) ∵ ع $= \dfrac{2 + \text{ت}}{2 - \text{ت}} \times \dfrac{2 + \text{ت}}{2 + \text{ت}} = \dfrac{3 + 4\text{ت}}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}$ ت

∴ | ع | $= \sqrt{\dfrac{9}{25} + \dfrac{16}{25}} = 1$ وحدة طول

(٢) ∵ من الشكل : | ع | = ٢ ، سعة ع = $90^\circ + 10^\circ = 100^\circ$

∴ ع = ٢ (حتا 100° + ت حا 100°)

(٣) ∵ ع = حا θ − ت حتا θ

= حتا ($-90^\circ - (-\theta)$) + ت حا ($-90^\circ - (-\theta)$)

∴ سعة ع = ($-90^\circ - (-\theta)$) = $\theta - 90^\circ$

(٤) ∵ مرافق العدد : ت = − ت ، مرافق العدد : $\omega^2 = \omega$

∴ مرافق العدد : ت + ω^2 هو − ت + ω

(٥) المقدار = ١ + ٢ ($\omega + \omega^2$) = ١ − ٢ = − ١

(٦) ∵ $ع_١$ ، $ع_٢$ ، .... ، $ع_٦$ تمثل الجذور السداسية للواحد لصحيح

∴ ق (∠ $ع_ر$ و $ع_{ر+١}$) = $\frac{١}{٦}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة :

(٧) إذا كانت السعة الأساسية للعدد $ع_١$ هى $\theta_١$ ، و السعة الأساسية للعدد $ع_٢$ هى $\theta_٢$ فإن : السعة الأساسية للعدد $ع_١ ع_٢$ هى ....

(أ) $\theta_١ + \theta_٢$ (ب) $\theta_١ \times \theta_٢$ (حـ) $\theta_١ - \theta_٢$ (ء) $\theta_١ \div \theta_٢$

(٨) أى مما يأتى يمثل الصورة الجبرية للعدد :

٢ (حتا $\frac{٢}{٣}\pi$ + ت حا $\frac{٢}{٣}\pi$) = ...

(أ) − $\sqrt{٣}$ + ت (ب) − ١ + $\sqrt{٣}$ ت

(حـ) − $\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٢}$ ت (ء) − $\sqrt{٣}$ − $\sqrt{٣}$ ت

(٩) إذ كانت النقطة أ ($\sqrt{٣}$ ، − ١) تمثل العدد المركب ع على مستوى أرجاند فإن : مقياس و سعة العدد ع هى ....

(أ) (٢ ، $\frac{١}{٦}\pi$) (ب) (٢ ، $\frac{٥}{٦}\pi$)

(حـ) (٢ ، − $\frac{٥}{٦}\pi$) (ء) (٢ ، − $\frac{١}{٦}\pi$)

(١٠) الجزء الحقيقى للعدد المركب الذى مقياسه $\sqrt{٢}$ و سعته $\frac{٧}{٦}\pi$ هو ....

(أ) − $\sqrt{٣}$ (ب) − $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$ (حـ) − $\frac{\sqrt{٢}}{٦}$ (ء) $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$

(١١) مرافق العدد : ١ + ω هو ....

(أ) ١ − ω (ب) − ω^2 (حـ) ١ + ω^2 (ء) ١ − ω^2

(١٢) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند رؤوس ....

(أ) مثلث متساوى الأضلاع (ب) مربع

(حـ) خماسى منتظم (ء) سداسى منتظم

(١٣) إذا كان : أ عدداً حقيقياً فإن مرافق العدد $\frac{أ^٣ + ت}{أ^٢ + أ ت - ١}$ هو ....

(أ) أ − ت (ب) أ + ت

(حـ) $\frac{أ^٣ - ت}{أ^٢ + أ ت - ١}$ (ء) $\frac{أ^٣ + ت}{أ^٢ - أ ت - ١}$

(١٤) إذا كان : ع = ($\frac{١}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)^ن حيث : ن عدد صحيح موجب و كان : ع = ١ فإن : أصغر قيم ن = ...

(أ) ٩ (ب) ٦ (حـ) ٣ (ء) ١

(١٥) إذا كان : | ع | = | ع − ٢ | فإن : الجزء الحقيقى للعدد ع = ...

(أ) ١ (ب) − ١ (حـ) − ٢ (ء) ٢

(١٦) $هـ^{\theta ت} + هـ^{- \theta ت}$ = ...

(أ) $هـ^{٢ \theta ت}$ (ب) ٢ حتا θ (حـ) ٢ حا θ (ء) $هـ^{-٢ \theta ت}$

(١٧) إذا كان : | ع | = ١٠ فإن : ع $\bar{ع}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٠٠ (حـ) ١ (ء) − ١٠٠

الحل

(٧) السعة الأساسية للعدد ع١ ع٢ هى : θ١ + θ٢

(٨) ٢ (حتا ٢/٣ π + ت حا ٢/٣ π) = ٢ (− ١/٢ + √٣/٢ ت) =

= − ١ + √٣ ت

(٩) | ع | = √(٣ + ١) = ٢ ، سعة ع = ظا^{−١} (−١/√٣) = − ١/٦ π

(١٠) الجزء الحقيقى = √٢ حتا ٧/٦ π = √٢ حتا (− ٥/٦ π)

= √٢ × (− √٣/٢) = − √٦/٢

(١١) ∵ مرافق العدد : ω = ω² ∴ مرافق العدد : ١ + ω هو ١ + ω²

(١٢) الجذور الخماسية للواحد الصحيح تمثل على مستوى أرجاند رؤوس خماسى منتظم

(١٣) ∵ (أ³ + ت) / (أ² + أت − ١) = (أ + ت)(أ² + أت + ت²) / (أ² + أت − ١)

= (أ + ت)(أ² + أت − ١) / (أ² + أت − ١) = أ + ت

∴ مرافق العدد المعطى : هو أ − ت

(١٤) ∵ ع = (١/٢ + √٣/٢ ت)^ن = (حتا ١/٦ π + ت حا ١/٦ π)^ن

= حتا ١/٦ ن π + ت حا ١/٦ ن π ، ∵ ع = ١

∴ حتا ١/٦ ن π + ت حا ١/٦ ن π = ١

∴ حتا ١/٦ ن π = ١ ∴ ١/٦ ن π = ك π حيث : ك ∈ ص

و عندما : حيث : ن ∈ ص+ فإن : حيث : ك ∈ ص+

∴ عندما : ك = ١ فإن : ١/٦ ن π = π

و منها : ن = ٦ و هى أصغر قيم ن المطلوبة

(١٥) بفرض أن : ع = أ + ب ت ∴ | ع | = أ² + ب²

، | ع − ٢ | = أ − ٢ + ب ت

∴ | ع − ٢ | = (أ − ٢)² + ب² = أ² − ٤ أ + ٤ + ب²

، ∵ | ع | = | ع − ٢ | ∴ أ² + ب² = أ² − ٤ أ + ٤ + ب²

و منها : أ = ١ أى أن : الجزء الحقيقى للعدد ع = ١

(١٦) ∵ هـ^{θ ت} = حتا θ + ت حا θ ، هـ^{− θ ت} = حتا θ − ت حا θ

∴ بالجمع ينتج : حتا θ = ١/٢ (هـ^{θ ت} + هـ^{− θ ت})

و منها : هـ^{θ ت} + هـ^{− θ ت} = ٢ حتا θ

(١٧) ∵ | ع | = ١٠ ∴ ع ع̄ = (| ع |)² = ١٠٠

(١٨) عبر عن كل مما يأتى بالصورة س + ص ت :

(أ) (حتا ٣/١١ π + ت حا ٣/١١ π) (حتا ٨/١١ π + ت حا ٨/١١ π)

(ب) ٣ (حتا ١/١٢ π + ت حا ١/١٢ π) × √٢ (حتا ١/٣ π − ت حا ١/٣ π)

(جـ) √٢ (حتا ١/٣ π + ت حا ١/٣ π) / ١/٢ (حتا ١/٤ π + ت حا ١/٤ π)

الحل

(أ) المقدار = [حتا (٣/١١ π + ٨/١١ π) + ت حا (٣/١١ π + ٨/١١ π)]

= (حتا π + ت حا π) = − ١

(ب) المقدار = ٣ [حتا ١/١٢ π + ت حا ١/١٢ π) × √٢ (حتا (− ١/٣ π) − ت حا (− ١/٣ π)]

= ٣ √٢ [حتا (١/١٢ π − ١/٣ π) + ت حا (١/١٢ π − ١/٣ π)]

أحمد الشتورى

$= ٣\sqrt{٢}\left[\text{حتا}\left(-\frac{١}{٤}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{٤}\pi\right)\right]$

$= ٣\sqrt{٢}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right) = ٣ - ٣\text{ت}$

(حـ) المقدار $= ٢\sqrt{٢}\left[\text{حتا}\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٤}\pi\right) + \text{ت حا}\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٤}\pi\right)\right]$

$= ٢\sqrt{٢}\left(\text{حتا}\frac{١}{٤}\pi + \text{ت حا}\frac{١}{٤}\pi\right)$

$= ٢\sqrt{٢}\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\text{ت}\right) = ٢ + ٢\text{ت}$

(١٩) إذا كان : $ع_١$ ، $ع_٢$ عددين مركبين حيث :

$ع_١ = -٩ + ٣\sqrt{٣}\text{ت}$ ، $|ع_٢| = \sqrt{٣}$ ،

سعة $ع_٢ = \frac{٧}{١٢}\pi$ ، أوجد كلاً من الأعداد المركبة الآتية على الصورة : ل (حتا θ + ت حا θ) حيث : $-\pi \le \theta \le \pi$

(أ) $ع_١$　　(ب) $ع_٢$　　(حـ) $ع_١ ع_٢$　　(ء) $\frac{ع_١}{ع_٢}$

الحل

(أ) ∵ $ع_١ = -٩ + ٣\sqrt{٣}\text{ت}$ ∴ س = −٩ ، ص = $٣\sqrt{٣}$

∴ ل $= \sqrt{٨١ + ٢٧} = ٦\sqrt{٣}$ وحدة طول

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ $ع_١$ يقع فى الربع الثانى

∴ $\theta = \pi + \text{ظا}^{-١}\left(-\frac{١}{\sqrt{٣}}\right) = \pi + \left(-\frac{١}{٦}\pi\right) = \frac{٥}{٦}\pi$

∴ $ع_١ = ٦\sqrt{٣}\left(\text{حتا}\frac{٥}{٦}\pi + \text{ت حا}\frac{٥}{٦}\pi\right)$

(ب) ∵ $|ع_٢| = \sqrt{٣}$ ، سعة $ع_٢ = \frac{٧}{١٢}\pi$

∴ $ع_٢ = \sqrt{٣}\left(\text{حتا}\frac{٧}{١٢}\pi + \text{ت حا}\frac{٧}{١٢}\pi\right)$

(حـ) $ع_١ ع_٢ = ٦\sqrt{٣} \times \sqrt{٣}\left[\text{حتا}\left(\frac{٥}{٦}\pi + \frac{٧}{١٢}\pi\right) + \text{ت حا}\left(\frac{٥}{٦}\pi + \frac{٧}{١٢}\pi\right)\right]$

$= ١٨\left(\text{حتا}\frac{١٧}{١٢}\pi + \text{ت حا}\frac{١٧}{١٢}\pi\right)$

$= ١٨\left[\text{حتا}\left(-\frac{٧}{١٢}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{٧}{١٢}\pi\right)\right]$

(ء) $\frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{٦\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}\left[\left(\text{حتا}\left(\frac{٥}{٦}\pi - \frac{٧}{١٢}\pi\right) + \text{ت حا}\left(\frac{٥}{٦}\pi - \frac{٧}{١٢}\pi\right)\right)\right]$

$= ٦\left(\text{حتا}\frac{١}{٤}\pi + \text{ت حا}\frac{١}{٤}\pi\right)$

(٢٠) عبر عن كل من الأعداد الآتية بالصورة الأسية :

(أ) $ع_١ = ٧$　　(ب) $ع_٢ = -٥\text{ت}$

(حـ) $ع_٣ = \frac{١}{٢}\left(\text{حتا } ٦٠^\circ + \text{ت حا } ٦٠^\circ\right)$

(ء) $ع_٤ = \frac{٤}{١ + \sqrt{٣}\text{ت}}$

(هـ) $ع_٥ = -٤\left(\text{حتا}\frac{٧}{٩}\pi + \text{ت حا}\frac{٧}{٩}\pi\right)$

الحل

(أ) $ع_١ = ٧ = ٧\left(\text{حتا } ٠ + \text{ت حا } ٠\right) = ٧\,\text{هـ}^{\text{صفر ت}}$

(ب) $ع_٢ = -٥\text{ت} = ٥\left(\text{حتا}\left(-\frac{١}{٢}\pi\right) + \text{ت حا}\left(-\frac{١}{٢}\pi\right)\right) = ٥\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\pi\text{ت}}$

(حـ) $ع_٣ = \frac{١}{٢}\left(\text{حتا } ٦٠^\circ + \text{ت حا } ٦٠^\circ\right) = \frac{١}{٢}\left(\text{حتا}\frac{١}{٣}\pi + \text{ت حا}\frac{١}{٣}\pi\right)$

$= \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\frac{١}{٣}\pi\text{ت}}$

(ء) $ع_٤ = \frac{٤}{١ + \sqrt{٣}\text{ت}} \times \frac{١ - \sqrt{٣}\text{ت}}{١ - \sqrt{٣}\text{ت}} = \frac{٤(١ - \sqrt{٣}\text{ت})}{١ + ٣} = ١ - \sqrt{٣}\text{ت}$

∴ س = ١ ، ص = $-\sqrt{٣}$

∴ ل $= \sqrt{١ + ٣} = ٢$ وحدة طول

أحمد الشتوى

، ∵ س > ٠ ، ص < ٠ ∴ ع٤ يقع فى الربع الرابع

∴ θ = طا$^{-١}$ (− √٣) = − $\frac{١}{٣}$ π

∴ ع٤ = ٢ [حتا (− $\frac{١}{٣}$ π) + ت حا (− $\frac{١}{٣}$ π)] = ٢ هـ$^{- \frac{١}{٣} \pi ت}$

(هـ) ع٥ = − ٤ (حتا $\frac{٧}{٦}$ π + ت حا $\frac{٧}{٦}$ π)

= − ٤ [حتا (π + $\frac{١}{٦}$ π) + ت حا (π + $\frac{١}{٦}$ π)]

= − ٤ (− حتا $\frac{١}{٦}$ π − ت حا $\frac{١}{٦}$ π)

= ٤ (حتا $\frac{١}{٦}$ π + ت حا $\frac{١}{٦}$ π) = ٤ هـ$^{\frac{١}{٦} \pi ت}$

(٢١) إذا كانت θ ∈] −π ، π [أوجد مقياس و سعة العدد :

ع = ١ + حتا θ + ت حا θ

الحل

ع = ١ + حتا θ + ت حا θ = ١ + ٢ حتا^{٢} $\frac{١}{٢}$ θ − ١ + ٢ ت حا $\frac{١}{٢}$ θ حتا $\frac{١}{٢}$ θ

= ٢ حتا $\frac{١}{٢}$ θ (حتا $\frac{١}{٢}$ θ + ت حا $\frac{١}{٢}$ θ)

∴ | ع | = حتا $\frac{١}{٢}$ θ ، سعة ع = $\frac{١}{٢}$ θ

(٢٢) إذا كان : ع = $\frac{(١ + ت)(٢ − ت)}{(١ − ت)(٣ + ت)}$ أوجد | ع |

الحل

ع = $\frac{٢ − ت + ٢ت + ١}{٣ + ت − ٣ت + ١}$ = $\frac{٣ + ت}{٢(٢ − ت)}$ × $\frac{٢ + ت}{٢ + ت}$ = $\frac{٥(١ + ت)}{١٠}$

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ ت ∴ | ع | = $\sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ وحدة طول

(٢٣) استخدم الأعداد المركبة فى اثبات صحة العلاقة الآتية :

طا$^{-١}$ (√٣) + طا$^{-١}$ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{١}{٢}$ π

الحل

بفرض أن : ع١ ، ع٢ عددان مركبان حيث :

سعة ع١ = طا$^{-١}$ (√٣) = $\frac{١}{٣}$ π

، سعة ع٢ = طا$^{-١}$ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{١}{٦}$ π

، ∵ سعة (ع١ . ع٢) = سعة ع١ + سعة ع٢

= $\frac{١}{٣}$ π + $\frac{١}{٦}$ π = $\frac{١}{٢}$ π

∴ طا$^{-١}$ (√٣) + طا$^{-١}$ ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{١}{٢}$ π

حل اختبار تراكمى صفحة ٦٣ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يلى :

(١) حدد الربع الذى تقع فيه الزاوية θ فى كل مما يأتى :

(أ) حتا $\theta >$ صفر ، حا $\theta >$ صفر

(ب) حتا $\theta <$ صفر ، حا $\theta <$ صفر

(حـ) حتا $\theta >$ صفر ، حا $\theta <$ صفر

الحل

(أ) الأول (ب) الثالث (حـ) الرابع

(٢) أوجد مجموع و حاصل ضرب الجذرين للمعادلة :

$س^2 - ٣ س + ١ = ٠$.

الحل

مجموع الجذرين = ٣ ، حاصل ضرب الجذرين = ١

(٣) أوجد مقياس و سعة كل من الأعداد المركبة الآتية :

(أ) $ع_1 = \sqrt{٣} + ت$ (ب) $ع_2 = -١ + ت$

(حـ) $ع_3 = ٤ ت$ (ء) $ع_4 = -٥$ (هـ) $ع_5 = ٣ - ٤ ت$

الحل

(أ) $\because ع_1 = \sqrt{٣} + ت \quad \therefore س = \sqrt{٣} ، ص = ١$

$\therefore |ع_1| = \sqrt{٣ + ١} = ٢$ وحدة طول

، $\because س > ٠ ، ص > ٠ \quad \therefore ع_1$ يقع فى الربع الأول

$\therefore$ سعة $ع_1 = طا^{-1} \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} \right) = \frac{١}{٦} \pi$

(ب) $\because ع_2 = -١ + ت \quad \therefore س = -١ ، ص = ١$

$\therefore |ع_2| = \sqrt{١ + ١} = \sqrt{٢}$ وحدة طول

، $\because س < ٠ ، ص > ٠ \quad \therefore ع_1$ يقع فى الربع الثانى

$\therefore$ سعة $ع_2 = \pi + طا^{-1} (-١) = \pi + (- \frac{١}{٤} \pi) = \frac{٣}{٤} \pi$

(حـ) $\because ع_3 = ٤ ت = ٤ (حتا \frac{١}{٢} \pi + ت حا \frac{١}{٢} \pi)$

$\therefore |ع_3| = ٤$ وحدة طول ، سعة $ع_3 = \frac{١}{٢} \pi$

(ء) $\because ع_4 = -٥ = ٥ (حتا \pi + ت حا \pi)$

$\therefore |ع_4| = ٥$ وحدة طول ، سعة $ع_4 = \pi$

(هـ) $\because ع_5 = ٣ - ٤ ت \quad \therefore س = ٣ ، ص = -٤$

$\therefore |ع_5| = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ وحدة طول

، $\because س > ٠ ، ص < ٠ \quad \therefore ع_5$ يقع فى الربع الرابع

$\therefore$ سعة $ع_5 = طا^{-1} \left(- \frac{٤}{٣} \right) = -٠,٩٣^{ء}$

(٤) أوجد فى أبسط صورة : $ع = \frac{١ + ٤ ت + ت^2}{٢ - ت - ٢ ت^2 - ت^3}$

ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع فى الصورة المثلثية

الحل

$ع = \frac{١ + ٤ ت - ١}{٢ - ت + ٢ + ت} = \frac{٤ ت}{٤} = ت$

$\therefore ع = حتا \frac{١}{٢} \pi + ت حا \frac{١}{٢} \pi$

$\therefore ع^{\frac{١}{٢}} = حتا \frac{١}{٢} (\frac{١}{٢} \pi + ٢ ر \pi) + ت حا \frac{١}{٢} (\frac{١}{٢} \pi + ٢ ر \pi)$

حيث : $ر = ٠ ، -١$

عندما $r = 0$ فإن : $ع_1 =$ حتا $\frac{1}{4}\pi$ + ت حا $\frac{1}{4}\pi$

عندما $r = -1$ فإن : $ع_2 =$ حتا $(-\frac{3}{4}\pi)$ + ت حا $(-\frac{3}{4}\pi)$

(٥) إذا كان : ع عدداً مركباً أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$٢ع - ٣\bar{ع} = ٥ + ١٠ ت$$

الحل

بفرض أن : ع = س + ص ت ∴ $\bar{ع}$ = س − ص ت

∴ ٢ (س + ص ت) − ٣ (س − ص ت) = ٥ + ١٠ ت

∴ ٢ س + ٢ ص ت − ٣ س + ٣ ص ت = ٥ + ١٠ ت

∴ − س + ٥ ص ت = ٥ + ١٠ ت

∴ − س = ٥ ∴ س = − ٥ ، ٥ ص = ١٠ ∴ ص = ٢

∴ ع = − ٥ + ٢ ت ∴ مجموعة الحل = { − ٥ + ٢ ت }

(٦) إذا كان : ع = ٤ + ٤ $\sqrt{٣}$ ت أوجد الصورة الأسية للعدد ع ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع و مثلها على شكل أرجاند

الحل

∵ ع = ٤ + ٤ $\sqrt{٣}$ ت ∴ س = ٤ ، ص = ٤ $\sqrt{٣}$

∴ | ع | = $\sqrt{١٦ + ٤٨}$ = ٨ وحدة طول

، ∵ $س > 0$ ، $ص > 0$ ∴ ع يقع فى الربع الأول

∴ $\theta =$ ظا$^{-1}(\sqrt{٣}) = \frac{1}{3}\pi$ ∴ ع = ٨ (حتا $\frac{1}{3}\pi$ + ت حا $\frac{1}{3}\pi$)

∴ الصورة الأسية للعدد ع هى : ٨ هـ$^{\frac{1}{3}\pi ت}$

، ع$^{\frac{1}{3}}$ = (٨ (حتا $\frac{1}{3}\pi$ + ت حا $\frac{1}{3}\pi$))$^{\frac{1}{3}}$

= ٢ [حتا $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}\pi$ + ٢ $r\pi$) + ت حا $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}\pi$ + ٢ $r\pi$)]

حيث : $r = 0$ ، 1 ، -1

عندما $r = 0$ فإن :

$ع_1$ = ٢ (حتا $\frac{1}{9}\pi$ + ت حا $\frac{1}{9}\pi$)

عندما $r = -1$ فإن :

$ع_2$ = ٢ [حتا $(-\frac{5}{9}\pi)$ + ت حا $(-\frac{5}{9}\pi)$]

عندما $r = 1$ فإن :

$ع_3$ = ٢ (حتا $\frac{7}{9}\pi$ + ت حا $\frac{7}{9}\pi$)

(٧) أوجد الصور المختلفة للعدد : ع = $\frac{-\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت}$ ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع و مثل الجذرين على شكل أرجاند

الحل

∵ ع = $\frac{-\sqrt{٣} - ت}{\sqrt{٣} - ت} \times \frac{\sqrt{٣} + ت}{\sqrt{٣} + ت} = \frac{-٢ - ٢\sqrt{٣} ت}{٤}$

= $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{٣}$ ت ∴ س = $-\frac{1}{2}$ ، ص = $-\frac{1}{2}\sqrt{٣}$

∴ | ع | = = $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$ = ١ وحدة طول

، ∵ $س < 0$ ، $ص < 0$ ∴ ع يقع فى الربع الثالث

∴ $\theta = -\pi +$ ظا$^{-1}(\sqrt{٣}) = -\pi + \frac{1}{3}\pi = -\frac{2}{3}\pi$

∴ ع = حتا $(-\frac{2}{3}\pi)$ + ت حا $(-\frac{2}{3}\pi)$ = هـ$^{-\frac{2}{3}\pi ت}$

، ع$^{\frac{1}{2}}$ = [حتا $(-\frac{2}{3}\pi)$ + ت حا $(-\frac{2}{3}\pi)$]$^{\frac{1}{2}}$

= حتا $\frac{1}{2}$ ($-\frac{2}{3}\pi$ + ٢ $r\pi$) + ت حا $\frac{1}{2}$ ($-\frac{2}{3}\pi$ + ٢ $r\pi$)

حيث : ر = ٠ ، ١

عندما ر = ٠ فإن :

$ع_١ = \text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi)$

عندما ر = ١ فإن :

$ع_٢ = \text{حتا}\,\frac{٢}{٣}\pi + \text{ت حا}\,\frac{٢}{٣}\pi$

(رسم: دائرة الوحدة عليها $ع_١$ ، $ع_٢$ والأعداد ١ ، −١ — أحمد الشنتورى)

(٨) إذا كان : $ع_١ = \sqrt{٣}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi - \text{ت حا}\,\frac{١}{٣}\pi)$ ،

$ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,\frac{٥}{١٢}\pi + \text{ت حا}\,\frac{٥}{١٢}\pi)$ أوجد $ع_١ ع_٢$ على الصورة الأسية ثم أوجد الصورة المثلثية للعدد ع حيث $ع = (ع_١ ع_٢)^{\frac{١}{٤}}$

الحل

$\because ع_١ = \sqrt{٣}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi - \text{ت حا}\,\frac{١}{٣}\pi)$

$= \sqrt{٣}\,(\text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi))$ ،

$ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,\frac{٥}{١٢}\pi + \text{ت حا}\,\frac{٥}{١٢}\pi)$

$\therefore ع_١ ع_٢ = \sqrt{٦}\,[\text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi + \frac{٥}{١٢}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi + \frac{٥}{١٢}\pi)]$

$= \sqrt{٦}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{١٢}\pi + \text{ت حا}\,\frac{١}{١٢}\pi) = \sqrt{٦}\,\text{هـ}^{\frac{١}{١٢}\pi\,\text{ت}}$

$\therefore ع = (ع_١ ع_٢)^{\frac{١}{٤}} = [\sqrt{٦}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{١٢}\pi + \text{ت حا}\,\frac{١}{١٢}\pi)]^{\frac{١}{٤}}$

$= \sqrt[٨]{٦}\,[\text{حتا}\,\frac{١}{٤}(\frac{١}{١٢}\pi + ٢\text{ر}\pi) + \text{ت حا}\,\frac{١}{٤}(\frac{١}{١٢}\pi + ٢\text{ر}\pi)]$

حيث : ر = ٠ ، −١ ، ١ ، −٢

(٩) ضع العدد المركب : $ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}}$ فى الصورة المثلثية و الأسية ثم أثبت أن : **(أ)** $ع^٦$ عدد حقيقى **(ب)** $\frac{١}{ع} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٢}{٣}\pi\,\text{ت}}$

الحل

$\because ع = \frac{-٤}{١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}} \times \frac{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}}{١ + \sqrt{٣}\,\text{ت}} = \frac{-٤(١ + \sqrt{٣}\,\text{ت})}{١ + ٣}$

$= -١ - \sqrt{٣}\,\text{ت}$ $\therefore$ س = −١ ، ص = $-\sqrt{٣}$

$\therefore |ع| = \sqrt{١ + ٣} = ٢$ وحدة طول

$\because$ س < ٠ ، ص < ٠ $\therefore$ ع يقع فى الربع الثالث

$\therefore \theta = -\pi + \text{طا}^{-١}(\sqrt{٣}) = -\pi + \frac{١}{٣}\pi = -\frac{٢}{٣}\pi$

$\therefore ع = ٢\,[\text{حتا}\,(-\frac{٢}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{٢}{٣}\pi)]$

$\therefore$ الصورة الأسية للعدد ع هى : $٢\,\text{هـ}^{-\frac{٢}{٣}\pi\,\text{ت}}$

(أ) $ع^٦ = [\,٢\,(\text{حتا}\,(-\frac{٢}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{٢}{٣}\pi))\,]^٦$

$= ٦٤\,[\text{حتا}\,٦ \times (-\frac{٢}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,٦ \times (-\frac{٢}{٣}\pi)]$

$= ٦٤\,[\text{حتا}\,(-٤\pi) + \text{ت حا}\,(-٤\pi)]$

$= ٦٤\,(١ + \text{ت} \times ٠) = ٦٤$

$\therefore ع^٦$ عدد حقيقى

(ب) $\frac{١}{ع} = ع^{-١} = (٢\,\text{هـ}^{-\frac{٢}{٣}\pi\,\text{ت}})^{-١} = \frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\frac{٢}{٣}\pi\,\text{ت}}$

(١٠) إذا كان : $ع = \text{هـ}^{\theta\,\text{ت}}$ أوجد المقياس و السعة للعدد : $\frac{١ + ع}{١ - ع}$

الحل

$\because ع = \text{هـ}^{\theta\,\text{ت}} = \text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta$

$$\therefore \frac{1+ع}{1-ع} = \frac{1+\text{حتا}\,\theta + ت\,\text{حا}\,\theta}{1-\text{حتا}\,\theta - ت\,\text{حا}\,\theta}$$

$$= \frac{1+2\,\text{حتا}^2\tfrac{1}{2}\theta - 1 + 2ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta\,\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta}{1-1+2\,\text{حا}^2\tfrac{1}{2}\theta - 2ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta\,\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{2\,\text{حتا}^2\tfrac{1}{2}\theta + 2ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta\,\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta}{2\,\text{حا}^2\tfrac{1}{2}\theta - 2ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta\,\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{2\,\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta\,(\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta)}{2\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta\,(\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta - ت\,\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$= \text{طتا}\tfrac{1}{2}\theta \times \frac{\text{حتا}\tfrac{1}{2}\theta + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\theta}{\text{حتا}(-\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\theta) + ت\,\text{حا}(-\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\theta)}$$

$$= \text{طتا}\tfrac{1}{2}\theta \times [\text{حتا}(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta) + ت\,\text{حا}(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\theta)]$$

$$= \text{طتا}\tfrac{1}{2}\theta \times (\text{حتا}\tfrac{1}{2}\pi + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\pi)$$

∴ مقياس العدد المطلوب $= \text{طتا}\tfrac{1}{2}\theta$ ، سعة العدد المطلوب $= \tfrac{1}{2}\pi$

(١١) إذا كان : $ع = \frac{-1+\sqrt{3}\,ت}{2}$ و كان : $ع_1 = \frac{1+ع}{1-ع}$

أوجد $ع_1$ و جذريه التربيعيين على الصورة المثلثية

الحل

$$\because ع = \frac{-1+\sqrt{3}\,ت}{2} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,ت$$

$$\therefore ع_1 = \frac{1+ع}{1-ع} = \frac{1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}ت}{1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}ت} = \frac{\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}ت}{\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}ت} \times \frac{2}{2}$$

$$\therefore ع_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,ت}{3-\sqrt{3}\,ت} \times \frac{3+\sqrt{3}\,ت}{3+\sqrt{3}\,ت} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,ت = \frac{1}{\sqrt{3}}\,ت$$

$$\therefore ع_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\text{حتا}\tfrac{1}{2}\pi + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\therefore (ع_1)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(\text{حتا}\tfrac{1}{2}\pi + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}\pi)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\left[\text{حتا}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + 2ر\pi) + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + 2ر\pi)\right]$$

∴ الجذر الأول $= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}(\text{حتا}\tfrac{1}{4}\pi + ت\,\text{حا}\tfrac{1}{4}\pi)$

، الجذر الثانى $= \frac{1}{\sqrt[4]{3}}[\text{حتا}(-\tfrac{3}{4}\pi) + ت\,\text{حا}(-\tfrac{3}{4}\pi)]$

(١٢) أثبت أن :

(أ) $(1 - \frac{2}{\omega^2} + \omega^2)(1 + \omega - \frac{5}{\omega}) = 18$

(ب) $\frac{3+5\omega+3\omega^2}{1-2\omega-4\omega^2} + \frac{3+5\omega^2+3\omega}{1-2\omega^2-4\omega} = -\frac{2}{19}$

الحل

(أ) الطرف الأيمن $= (1-2\omega+\omega^2)(1+\omega-5\omega^2)$

$$= ((1+\omega^2)-2\omega)((1+\omega)-5\omega^2)$$

$$= (-\omega-2\omega)(-\omega^2-5\omega^2)$$

$$= (-3\omega)(-6\omega^2) = 18\,\omega^3 = 18 = \text{الطرف الأيسر}$$

(ب) الطرف الأيمن $= \frac{3(\omega+\omega^2)+5\omega}{1-2(\omega+\omega^2)-2\omega^2} + \frac{3(1+\omega^2)+5\omega^2}{1-2(\omega^2+\omega)-2\omega}$

$$= \frac{2\omega}{3-2\omega^2} + \frac{2\omega^2}{3-2\omega}$$

$$= \frac{6\omega-4\omega^2+6\omega^2-4\omega}{9-6\omega^2-6\omega+4}$$

$$= \frac{6(\omega+\omega^2)-4(\omega+\omega^2)}{9-6\omega^2-6\omega+4} = -\frac{2}{19}$$

أحمد الشنتوى

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) $\text{ت} + \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{٣} + \dots + \text{ت}^{١٠٠} = \dots$

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) ١٠٠

الحـــل

المقدار $= (\text{ت} + \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{٣} + \text{ت}^{٤}) + \dots + \text{ت}^{١٠٠}$

$= (\text{ت} - ١ - \text{ت} + ١) + (\text{ت} - ١ - \text{ت} + ١) + \dots$ إلى ٢٥ حداً

$=$ صفر + صفر + ... إلى ٢٥ حداً = صفر

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول $\text{أ} = \text{ت}$ ، أساسها $\text{ر} = \text{ت}$

، حدها الأخير $\text{ل} = \text{ت}^{١٠٠} = (\text{ت}^{٤})^{٢٥} = ١$

$\therefore \text{حـ}_{١٠٠} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} = \frac{١ \times \text{ت} - \text{ت}}{\text{ت} - ١} = \frac{\text{صفر}}{\text{ت} - ١} = \text{صفر}$

السؤال الرابع :

(٢) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $\text{ع} = ٢ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ على الصورة المثلثية

الحـــل

$\because \text{ع} = ٢ - ٢\sqrt{٣}\,\text{ت}$ $\therefore \text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = -٢\sqrt{٣}$

$\therefore \text{ل}^{٢} = (٢)^{٢} + (-٢\sqrt{٣})^{٢} = ٤ + ١٢ = ١٦$ $\therefore \text{ل} = ٤$

$\therefore \text{ظا}\,\theta = \frac{-٢\sqrt{٣}}{٢} = -\sqrt{٣}$ ، $\because \text{س} > ٠$ ، $\text{ص} < ٠$

$\therefore$ ع يقع فى الربع الرابع ، $\therefore \theta = \text{ظا}^{-١}(-\sqrt{٣}) = -\frac{١}{٣}\pi$

$\therefore \text{ع} = ٤\,[\,\text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi)\,]$

، $\text{ع}^{\frac{١}{٢}} = [\,٤\,(\,\text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi)\,)\,]^{\frac{١}{٢}}$

$= ٢\,[\,\text{حتا}\,\frac{١}{٢}(-\frac{١}{٣}\pi + ٢\text{ر}\pi) + \text{ت حا}\,\frac{١}{٢}(-\frac{١}{٣}\pi + ٢\text{ر}\pi)\,]$

حيث : $\text{ر} = ٠ ، ١$

عندما : $\text{ر} = ٠$ $\therefore$ الجذر الأول $= ٢\,[\,\text{حتا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{١}{٦}\pi)\,]$ ،

عندما : $\text{ر} = ١$ $\therefore$ الجذر الثانى $= ٢\,(\,\text{حتا}\,\frac{٥}{٦}\pi + \text{ت حا}\,\frac{٥}{٦}\pi\,)$

الاختبار الثانى

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $\omega + \omega^{٢} + \omega^{٣} + \dots + \omega^{١٠٠} = \dots$

الحـــل

$\because ١ = \omega^{٣} = \omega^{٦} = \omega^{٩} = \dots = \omega^{٩٩}$ ،

$\omega = \omega^{٤} = \omega^{٧} = \dots = \omega^{١٠٠}$ ، $\omega^{٢} = \omega^{٥} = \omega^{٨} = \dots = \omega^{٩٨}$

$\therefore$ المقدار $= ٣٣\,(١ + \omega + \omega^{٢}) + \omega$

$= ٣٣ \times ٠ + ١ \times \omega = \omega$

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول $\text{أ} = \omega$ ، أساسها $\text{ر} = \omega$

، حدها الأخير $\text{ل} = \omega^{١٠٠} = (\omega^{٣})^{٣٣} \times \omega = ١ \times \omega = \omega$

$\therefore \text{حـ}_{١٠٠} = \frac{\text{ل ر} - \text{أ}}{\text{ر} - ١} = \frac{\omega \times \omega - \omega}{\omega - ١} = \frac{\omega(\omega - ١)}{\omega - ١} = \omega$

السؤال الرابع :

(٢) أوجد الصورة الأسية للعدد $\text{ع} = \frac{٢ + ٦\text{ت}}{٣ - \text{ت}}$ ثم أوجد كلاً من : $\text{ع}^{-١}$ ، $\bar{\text{ع}}$ ، $\sqrt{\text{ع}}$ على الصورة المثلثية

الحل

$\text{ع} = \frac{\text{٢} + \text{٦ت}}{\text{٣} - \text{ت}} \times \frac{\text{٣} + \text{ت}}{\text{٣} + \text{ت}} = \frac{\text{٦} + \text{٢٠ت} - \text{٦}}{\text{٩} + \text{١}} = \text{٢ت}$

$= \text{٢}(\text{حتا } \tfrac{1}{2}\pi + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}\pi) = \text{٢ هـ}^{\frac{1}{2}\pi \text{ت}}$

، $\because \text{١} = \text{حتا ٠} + \text{ت حا ٠}$

$\therefore \text{ع}^{-1} = \frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{حتا ٠} + \text{ت حا ٠}}{\text{حتا } \frac{1}{2}\pi + \text{ت حا } \frac{1}{2}\pi}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\text{حتا}(-\tfrac{1}{2}\pi) + \text{ت حا}(-\tfrac{1}{2}\pi)\right]$

، $\overline{\text{ع}} = \text{٢}(\text{حتا } \tfrac{1}{2}\pi - \text{ت حا } \tfrac{1}{2}\pi)$

$= \text{٢}\left[\text{حتا}(\text{٠} - \tfrac{1}{2}\pi) + \text{ت حا}(\text{٠} - \tfrac{1}{2}\pi)\right]$

$= \text{٢}\left[\text{حتا}(-\tfrac{1}{2}\pi) + \text{ت حا}(-\tfrac{1}{2}\pi)\right]$

، $\because \text{ع} = \text{٢ت} = \text{٢}(\text{حتا } \tfrac{1}{2}\pi + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}\pi)$

$\therefore$ ، $\sqrt{\text{ع}} = \text{ع}^{\frac{1}{2}} = \left[\text{٢}(\text{حتا } \tfrac{1}{2}\pi + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}\pi)\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{\text{٢}}\left[\text{حتا } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + \text{٢ر}\pi) + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + \text{٢ر}\pi)\right]$

حيث : ر = ٠ ، −١

عندما : ر = ٠ فإن : $\text{ع}_1 = \sqrt{\text{٢}}(\text{حتا } \tfrac{1}{4}\pi + \text{ت حا } \tfrac{1}{4}\pi)$ ،

عندما : ر = −١ فإن : $\text{ع}_2 = \sqrt{\text{٢}}\left[\text{حتا}(-\tfrac{3}{4}\pi) + \text{ت حا}(-\tfrac{3}{4}\pi)\right]$

السؤال الخامس :

(أ) أثبت أن : إحدى قيم المقدار $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-\text{ت}}$ هى $\sqrt{\text{٢}}\ \text{ت}$

الحل

$\because \sqrt{\text{ت}} = (\text{حتا } \tfrac{1}{2}\pi + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}\pi)^{\frac{1}{2}}$

$= \text{حتا } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + \text{٢ر}\pi) + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi + \text{٢ر}\pi)$

حيث : ر = ٠ ، −١

$\therefore$ عندما : ر = ٠ فإن : $\sqrt{\text{ت}} = \text{حتا } \tfrac{1}{4}\pi + \text{ت حا } \tfrac{1}{4}\pi$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ت}$ (١)

، عندما : ر = −١ فإن : $\sqrt{\text{ت}} = \text{حتا}(-\tfrac{3}{4}\pi) + \text{ت حا}(-\tfrac{3}{4}\pi)$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ت}$ (٢)

، $\because \sqrt{-\text{ت}} = \left[\text{حتا}(-\tfrac{1}{2}\pi) + \text{ت حا}(-\tfrac{1}{2}\pi)\right]^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \sqrt{-\text{ت}} = \text{حتا } \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\pi + \text{٢ر}\pi) + \text{ت حا } \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\pi + \text{٢ر}\pi)$

حيث : ر = ٠ ، ١

$\therefore$ عندما : ر = ٠ فإن : $\sqrt{-\text{ت}} = \text{حتا}(-\tfrac{1}{4}\pi) + \text{ت حا}(-\tfrac{1}{4}\pi)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ت}$ (٣)

، عندما : ر = ١ فإن : $\sqrt{-\text{ت}} = \text{حتا } \tfrac{3}{4}\pi + \text{ت حا } \tfrac{3}{4}\pi$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ت}$ (٤)

، ∵ ت ، − ت مترافقان		∴ جذريهما مترافقان

∴ من (١) ، (٣) ينتج أن :

إحدى قيم المقدار $\sqrt{\text{ت}} - \sqrt{-\text{ت}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ت} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{ت}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}}\ \text{ت} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ \text{ت}$

الاختبار الثالث

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) إذا كان : ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° فإن : سعة العدد ع = ...

الحل

∵ ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° = حتا (− ٩٠° + ٦٠°) + ت حا (− ٩٠° + ٦٠°)

= حتا (− ٣٠°) + ت حا (− ٣٠°)

∴ سعة العدد ع = (− ٣٠°) = (− $\frac{١}{٦}$ π)

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان : | ع$_{١}$ | = | ع$_{٢}$ | = ١ ، سعة (ع$_{١}$ ع$_{٢}^{٣}$) = ٨١° ،

سعة ($\frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$) = ٣٣° أوجد على صورة س + ص ت

(ع$_{١}^{١٥}$ + ع$_{٢}^{١٥}$)

الحل

نفرض أن : سعة ع$_{١}$ = θ$_{١}$ ، سعة ع$_{٢}$ = θ$_{٢}$

∴ θ$_{١}$ + ٣ θ$_{٢}$ = ٨١° ، θ$_{١}$ − θ$_{٢}$ = ٣٣° بالطرح ينتج :

٤ θ$_{٢}$ = ٤٨° ∴ θ$_{٢}$ = ١٢° ، θ$_{١}$ = ٤٥°

∴ ع$_{١}$ = حتا ٤٥° + ت حا ٤٥° ، ع$_{٢}$ = حتا ١٢° + ت حا ١٢°

∴ ع$_{١}^{١٥}$ = (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)^{١٥} = حتا ٦٧٥° + ت حا ٦٧٥°

= حتا (− ٤٥°) + ت حا (− ٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

، ع$_{٢}^{١٥}$ = (حتا ١٢° + ت حا ١٢°)^{١٥} = حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠° = − ١

∴ (ع$_{١}^{١٥}$ + ع$_{٢}^{١٥}$) = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − ١) − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

الاختبار الرابع

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) (٣ + ٧ ω + ٣ ω^{٢}) (٣ − ٧ ω^{٢} + ٣ ω) = ...

الحل

المقدار = (٣ (١ + ω^{٢}) + ٧ ω) (٣ (١ + ω) − ٧ ω^{٢})

= (− ٣ ω + ٧ ω) (− ٣ ω^{٢} − ٧ ω^{٢}) = ٤ ω × (− ١٠ ω^{٢})

= − ٤٠ ω^{٣} = − ٤٠

السؤال الرابع :

(أ) أوجد جذور المعادلة : ع^{٤} + ٤ = صفر على الصورة المثلثية

الحل

ع^{٤} = − ٤ = ٤ (حتا π + ت حا π)

∴ ع = [٤ (حتا π + ت حا π)]$^{\frac{١}{٤}}$ = [($\sqrt{٢}$)^{٤} (حتا π + ت حا π)]$^{\frac{١}{٤}}$

= $\sqrt{٢}$ [حتا $\frac{١}{٢}$ (π + ٢ ر π) + ت حا $\frac{١}{٢}$ (π + ٢ ر π)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، − ١ ، − ٢

عندما : ر = ٠ فإن : ع$_{١}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{١}{٤}$ π + ت حا $\frac{١}{٤}$ π)

عندما : ر = ١ فإن : ع$_{٢}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{٣}{٤}$ π + ت حا $\frac{٣}{٤}$ π)

عندما : ر = − ١ فإن : ع$_{٣}$ = $\sqrt{٢}$ [حتا (− $\frac{١}{٤}$ π) + ت حا (− $\frac{١}{٤}$ π)]

عندما : ر = − ٢ فإن : ع$_{٤}$ = $\sqrt{٢}$ [حتا (− $\frac{٣}{٤}$ π) + ت حا (− $\frac{٣}{٤}$ π)]

أحمد الشنتورى

السؤال الخامس :

(٢) إذا كان : ع = حا ١/٩ π + ت حتا ١/٩ π أوجد (ع̄) على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد (ع̄)^٩

الحل

∵ ع = حا ١/٩ π + ت حتا ١/٩ π

∴ ع̄ = حا ١/٩ π − ت حتا ١/٩ π = حتا (−١/٢ π + ١/٩ π) + ت حا (−١/٢ π + ١/٩ π)

= حتا (−٧/١٨ π) + ت حا (−٧/١٨ π)

∴ (ع̄)^٩ = (حتا (−٧/١٨ π) + ت حا (−٧/١٨ π))^٩

= حتا (−٧/٢ π) + ت حا (−٧/٢ π) = (حتا ١/٢ π + ت حا ١/٢ π)

الجذور التكعيبية للعدد (ع̄)^٩ هى :

[حتا ١/٣ (π + ٢ ر π) + ت حا ١/٣ (π + ٢ ر π)]

حيث : ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما : ر = ٠ فإن : ع١ = حتا ١/٣ π + ت حا ١/٣ π

عندما : ر = ١ فإن : ع٢ = حتا ٥/٣ π + ت حا ٥/٣ π

عندما : ر = −١ فإن : ع٣ = حتا (−١/٣ π) + ت حا (−١/٣ π)

الاختبار الخامس

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) (٢ + ٣/ω) (٢ + ٣/ω²) (٣ − ٢/ω) (٣ − ٢/ω²) = ...

الحل

المقدار = (٢ + ٣ ω²) (٢ + ٣ ω) (٣ − ٢ ω²) (٣ − ٢ ω)

= (٤ + ٦ ω + ٦ ω² + ٩) (٩ − ٦ ω − ٦ ω² + ٤)

= (١٣ + ٦ (ω + ω²)) (١٣ − ٦ (ω + ω²))

= (١٣ − ٦) (١٣ + ٦) = ٧ × ١٩ = ١٣٣

السؤال الرابع :

(٢) إذا كان : ع١ = (٦ + ٤ ت)/(١ + ت) ، ع٢ = ٢٦/(٥ − ت) ، ع = ٤ (ع١ − ع٢) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

ع١ = (٦ + ٤ت)/(١ + ت) × (١ − ت)/(١ − ت) = (٦ − ٦ت + ٤ت + ٤)/٢ = (١٠ − ٢ت)/٢

= ٥ − ت ، ع٢ = ٢٦/(٥ − ت) × (٥ + ت)/(٥ + ت) = ٢٦(٥ + ت)/٢٦ = ٥ + ت

∴ ع = ٤ (ع١ − ع٢) = ٤ (٥ − ت − ٥ − ت) = −٨ ت

= ٨ [حتا (−١/٢ π) + ت حا (−١/٢ π)]

، ع^(١/٣) = ٢ [حتا ١/٣ (−١/٢ π + ٢ ر π) + ت حا ١/٣ (−١/٢ π + ٢ ر π)]

، ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما : ر = ٠ ∴ ع١ = ٢ [حتا (−١/٦ π) + ت حا (−١/٦ π)] = ٢ هـ^(−١/٦ π ت)

عندما : ر = ١ ∴ ع٢ = ٢ (حتا ١/٢ π + ت حا ١/٢ π) = ٢ هـ^(١/٢ π ت)

عندما : ر = −١ ∴ ع٣ = ٢ [حتا (−٥/٦ π) + ت حا (−٥/٦ π)] = ٢ هـ^(−٥/٦ π ت)

الاختبار السادس

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) $\left(١ - \frac{١}{\omega}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٢}}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٤}}\right)\left(١ - \frac{١}{\omega^{٨}}\right)$ ..... إلى ١٠ عوامل = ...

الحل

المقدار = $((١ - \omega^{٢})(١ - \omega))((١ - \omega^{٢})(١ - \omega))$ .... إلى ١٠ عوامل

= $(١ - \omega - \omega^{٢} + ١)(١ - \omega - \omega^{٢} + ١)$ .... إلى ٥ عوامل

= $(٢ - (\omega + \omega^{٢}))(٢ - (\omega + \omega^{٢}))$ .... إلى ٥ عوامل

= $(٢ - (-١))(٢ - (-١))$ .... إلى ٥ عوامل

= ٣×٣ .... إلى ٥ عوامل = ٢٤٣

السؤال الرابع :

(٢) إذا كان : $ع_{١} = \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{٢}\right)^{٤}$ ، $ع_{٢} = حا\ \frac{١}{٣}\pi + ت\ حتا\ \frac{١}{٣}\pi$ ، $ت^{٢} = -١$ ، و كان : $ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية

الحل

$\therefore ع_{١} = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢}ت\right)^{٤} = \left(حتا\ \frac{١}{٦}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٦}\pi\right)^{٤} = حتا\ \frac{٢}{٣}\pi + ت\ حا\ \frac{٢}{٣}\pi$

، $ع_{٢} = حا\ \frac{١}{٣}\pi + ت\ حتا\ \frac{١}{٣}\pi = حتا\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٣}\pi\right) + ت\ حا\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٣}\pi\right)$

$= حتا\ \frac{١}{٦}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٦}\pi$

$\therefore ع = \frac{حتا\ \frac{٢}{٣}\pi + ت\ حا\ \frac{٢}{٣}\pi}{حتا\ \frac{١}{٦}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٦}\pi} = حتا\ \frac{١}{٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\pi$

، $ع^{\frac{١}{٢}} = \left(حتا\ \frac{١}{٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\pi\right)^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ع^{\frac{١}{٢}} = \left[حتا\ \frac{١}{٢}\left(-\frac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi\right) + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\left(-\frac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi\right)\right]$

حيث : ر = ٠ ، −١

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_{١} = \sqrt{٢}\left(حتا\ \frac{١}{٤}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٤}\pi\right)$ ،

عندما : ر = −١ فإن : $ع_{٢} = \sqrt{٢}\left[حتا\left(-\frac{٣}{٤}\pi\right) + ت\ حا\left(-\frac{٣}{٤}\pi\right)\right]$

الاختبار السابع

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) $\left(\frac{٣ + ٥\omega}{٥ + ٣\omega^{٢}} + \frac{٥ + ٣\omega^{٢}}{٣ + ٥\omega}\right)^{٨} = ...$

الحل

المقدار = $\left(\frac{\omega(٣\omega^{٢} + ٥)}{٣\omega^{٢} + ٥} + \frac{\omega^{٢}(٥\omega + ٣)}{٥\omega + ٣}\right)^{٨} = (\omega + \omega^{٢})^{٨} = (-١)^{٨} = ١$

السؤال الثالث :

(٢) إذا كان : $ع_{١} = \left(حا\ \frac{١}{٩}\pi + ت\ حتا\ \frac{١}{٩}\pi\right)^{٥}$ ،

$ع_{٢} = \left(حتا\ \frac{١}{٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\pi\right)^{٤}$ ، و كان : $ع = \frac{ع_{١}}{ع_{٢}}$

أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

$ع_{١} = \left(حا\ \frac{١}{٩}\pi + ت\ حتا\ \frac{١}{٩}\pi\right)^{٥} = حا\ \frac{٥}{٩}\pi + ت\ حتا\ \frac{٥}{٩}\pi$

$= حتا\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{٥}{٩}\pi\right) + ت\ حا\left(\frac{١}{٢}\pi - \frac{٥}{٩}\pi\right)$

$ع_{١} = حتا\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right) + ت\ حا\left(-\frac{١}{١٨}\pi\right)$

، $ع_{٢} = \left(حتا\ \frac{١}{٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\pi\right)^{٤} = حتا\ ٢\pi + ت\ حا\ ٢\pi = حتا\ ٠ + ت\ حا\ ٠$.

$\therefore$ ع $= \dfrac{ع_1}{ع_2} = \dfrac{\text{حتا}\,(-\frac{1}{18}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{18}\pi)}{\text{حتا}\,0 + \text{ت حا}\,0}$

$= \text{حتا}\,(-\frac{1}{18}\pi - 0) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{18}\pi - 0)$

$= \text{حتا}\,(-\frac{1}{18}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{18}\pi)$

، $ع^{\frac{1}{2}} = [\text{حتا}\,(-\frac{1}{18}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{18}\pi)]^{\frac{1}{2}}$

$\therefore ع^{\frac{1}{2}} = [\text{حتا}\,\frac{1}{2}(-\frac{1}{18}\pi + ٢ر\pi) + \text{ت حا}\,\frac{1}{2}(-\frac{1}{18}\pi + ٢ر\pi)]$

حيث : ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_1^{\frac{1}{2}} = \text{حتا}\,(-\frac{1}{36}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{36}\pi) = هـ^{-\frac{1}{36}\pi ت}$

عندما : ر = ١ فإن : $ع_2^{\frac{1}{2}} = \text{حتا}\,\frac{35}{36}\pi + \text{ت حا}\,\frac{35}{36}\pi = هـ^{\frac{35}{36}\pi ت}$

الاختبار الثامن

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(أ) إذا كان : $\dfrac{أ^2 + ب^2}{أ + ب ت} = ٢ + ٣ ت$ فإن : أ × ب = ...

حيث : أ × ب $\in$ ح*

(أ) −٦ (ب) −٥ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحل

$أ^2 + ب^2 = (أ + ب ت)(٢ + ٣ ت) = (٢أ - ٣ب) + (٣أ + ٢ب)ت$

$\therefore أ^2 + ب^2 = ٢أ - ٣ب$ (١) ، $٣أ + ٢ب = ٠$ $\therefore أ = -\frac{2}{3}ب$ (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) ينتج : $\frac{4}{9}ب^2 + ب^2 = -\frac{4}{3}ب - ٣ب$ بالضرب × ٩

$\therefore ٤ب^2 + ٩ب^2 = -١٢ب - ٢٧ب$ $\therefore ١٣ب^2 + ٣٩ب = ٠$

$\therefore ب\,(ب + ٣ب) = ٠$ $\therefore ب = ٠$ مرفوض " ب $\in$ ح* "

أو ب = −٣ بالتعويض فى (٢) ينتج : أ = ٢ $\therefore$ أ × ب = −٦

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان : $ع_1 = ١ - \sqrt{٣}\,ت$ ، $ع_2 = \text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta$

، $ع_3 = (\text{حتا}\,\frac{1}{2}\theta - \text{ت حا}\,\frac{1}{2}\theta)^2$ و كان : $ع = \dfrac{ع_1\,ع_2}{ع_3}$

أوجد المقياس و السعة للعدد ع ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية عند : $\theta = \frac{1}{٦}\pi$

الحل

$\because ع_1 = ١ - \sqrt{٣}\,ت$ $\therefore$ س = ١ ، ص = $-\sqrt{٣}$

$\therefore ل^2 = (١)^2 + (-\sqrt{٣})^2 = ١ + ٣ = ٤$ $\therefore$ ل = ٢

$\therefore \text{ظا}\,\theta = -\sqrt{٣}$ ، $\because$ س > ٠ ، ص < ٠

$\therefore$ ع يقع فى الربع الرابع ، $\therefore \theta = \text{ظا}^{-1}(-\sqrt{٣}) = -\frac{1}{3}\pi$

$\therefore ع_1 = ٢\,(\text{حتا}\,(-\frac{1}{3}\pi) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{3}\pi))$

، $ع_2 = \text{حتا}\,\theta + \text{ت حا}\,\theta$

، $ع_3 = (\text{حتا}\,\frac{1}{2}\theta - \text{ت حا}\,\frac{1}{2}\theta)^2 = \text{حتا}\,\theta - \text{ت حا}\,\theta$

$= \text{حتا}\,(-\theta) + \text{ت حا}\,(-\theta)$

$\therefore ع = ٢\,[\text{حتا}\,(-\frac{1}{3}\pi + \theta - (-\theta)) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{3}\pi + \theta - (-\theta))]$

$\therefore ع = ٢\,[\text{حتا}\,(-\frac{1}{3}\pi + ٢\theta) + \text{ت حا}\,(-\frac{1}{3}\pi + ٢\theta)]$

$\therefore |ع| = ٢$ ، سعة ع $= (-\frac{1}{3}\pi + ٢\theta)$

، عندما : $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ∴ ع = ٢ (حتا ٠ + ت حا ٠)

= حتا $(-\frac{1}{18}\pi)$ + ت حا $(-\frac{1}{18}\pi)$

، ع$^{\frac{1}{2}}$ = [٢ (حتا ٠ + ت حا ٠)]$^{\frac{1}{2}}$

∴ ع$^{\frac{1}{2}}$ = $\sqrt{2}$ [حتا $\frac{1}{2}$(٠ + ٢رπ) + ت حا $\frac{1}{2}$(٠ + ٢رπ)]

حيث : ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ فإن : ع$_1$ = $\sqrt{2}$ (حتا ٠ + ت حا ٠)

عندما : ر = ١ فإن : ع$_2$ = $\sqrt{2}$ (حتا π + ت حا π)

الاختبار التاسع

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(أ) $(1+\omega)^4 + (1+\omega^2)^4 + (\omega+\omega^2)^4 = ...$

الحل

المقدار = $(\omega^2)^4 + (\omega)^4 + (-1)^4 = \omega^8 + \omega^4 + 1$

$= \omega^6 \times \omega^2 + \omega^3 \times \omega + 1 = \omega^2 + \omega + 1 =$ صفر

السؤال الثالث :

(أ) إذا كان : ع$_1$ = ٢ (حا $\frac{1}{3}\pi$ + ت حتا $\frac{1}{3}\pi$) ،

ع$_2$ = $\sqrt{2}$ (حتا $\frac{1}{4}\pi$ − ت حا $\frac{1}{4}\pi$) ، ع$_3$ = ١ + $\sqrt{3}$ ت

أوجد العدد ع = $\frac{ع_1^3 \times ع_2^4}{ع_3^5}$ على الصورة الأسية ثم الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية

الحل

∵ ع$_1$ = ٢ (حا $\frac{1}{3}\pi$ + ت حتا $\frac{1}{3}\pi$)

∴ ع$_1$ = ٢ [حتا ($\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi$) + ت حا ($\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi$)]

= ٢ (حتا $\frac{1}{6}\pi$ + ت حا $\frac{1}{6}\pi$)

∴ (ع$_1$)^3 = [٢ (حتا $\frac{1}{6}\pi$ + ت حا $\frac{1}{6}\pi$)]^3 = ٨ (حتا $\frac{1}{2}\pi$ + ت حا $\frac{1}{2}\pi$)

، ∵ ع$_2$ = $\sqrt{2}$ (حا $\frac{1}{4}\pi$ − ت حتا $\frac{1}{4}\pi$)

∴ ع$_2$ = $\sqrt{2}$ [حتا ($-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi$) + ت حا ($-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi$)]

= $\sqrt{2}$ [حتا ($-\frac{3}{4}\pi$) + ت حا ($-\frac{3}{4}\pi$)]

∴ (ع$_2$)^4 = [$\sqrt{2}$ (حتا ($-\frac{3}{4}\pi$) + ت حا ($-\frac{3}{4}\pi$))]^4

= ٤ (حتا ($-\pi$) + ت حا ($-\pi$))

∵ ع$_3$ = ١ + $\sqrt{3}$ ت ∴ س = ١ ، ص = $\sqrt{3}$

∴ ل^2 = (١)^2 + ($\sqrt{3}$)^2 = ١ + ٣ = ٤ ∴ ل = ٢

∴ طا θ = $\sqrt{3}$ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ ع$_3$ يقع فى الربع الأول ، ∴ θ = طا$^{-1}$ ($\sqrt{3}$) = $\frac{1}{3}\pi$

∴ ع$_3$ = ٢ (حتا $\frac{1}{3}\pi$ + ت حا $\frac{1}{3}\pi$)

∴ (ع$_3$)^5 = [٢ (حتا $\frac{1}{3}\pi$ + ت حا $\frac{1}{3}\pi$)]^5 = ٣٢ (حتا $\frac{5}{3}\pi$ + ت حا $\frac{5}{3}\pi$)

= ٣٢ [حتا ($\frac{5}{3}\pi - 2\pi$) + ت حا ($\frac{5}{3}\pi - 2\pi$)]

= ٣٢ [حتا ($-\frac{1}{3}\pi$) + ت حا ($-\frac{1}{3}\pi$)]

∴ ع = $\frac{8 \times 4}{32}$ (حتا $\frac{\frac{1}{2}\pi - \pi}{-\frac{1}{3}\pi}$ + ت حا $\frac{\frac{1}{2}\pi - \pi}{-\frac{1}{3}\pi}$)

∴ ع = [حتا ($\frac{1}{2}\pi - \pi + \frac{1}{3}\pi$) + ت حا ($\frac{1}{2}\pi - \pi + \frac{1}{3}\pi$)]

$\therefore$ ع = = حتا $(-\frac{1}{6}\pi)$ + ت حا $(-\frac{1}{6}\pi)$ = $هـ^{-\frac{1}{6}\pi ت}$

، $ع^{\frac{1}{2}}$ = [حتا $(-\frac{1}{6}\pi)$ + ت حا $(-\frac{1}{6}\pi)$]$^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ $ع^{\frac{1}{2}}$ = [حتا $\frac{1}{2}(-\frac{1}{6}\pi + ٢ ر \pi)$ + ت حا $\frac{1}{2}(-\frac{1}{6}\pi + ٢ ر \pi)$]

حيث : ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ فإن : الجذر الأول = حتا $-\frac{1}{12}\pi$ + ت حا $-\frac{1}{12}\pi$

عندما : ر = ١ فإن : الجذر الأول = (حتا $\frac{11}{12}\pi$ + ت حا $\frac{11}{12}\pi$)

الاختبار العاشر

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : س = $\frac{-1 - \sqrt{3}\, ت}{2}$ حيث : $ت^2 = -1$ فإن :

القيمة العددية للمقدار : $س^8 + س^4 + 5$ = ...

الحل

س = $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت = ω

$\therefore$ $س^8 + س^4 + 5 = \omega^8 + \omega^4 + 5 = \omega^2 + \omega + 5 = -1 + 5 = 4$

أو : س = ω^2

$\therefore$ $س^8 + س^4 + 5 = \omega^{16} + \omega^8 + 5 = \omega + \omega^2 + 5 = -1 + 5 = 4$

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) $\left(\frac{5 - 3\omega^2}{5\omega - 3} + \frac{2 - 7\omega}{2\omega^2 - 7} \right)^2$ = ...

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) ٣ ت (د) −٣ ت

الحل

المقدار = $\left(\frac{\omega^2(5\omega - 3)}{5\omega - 3} + \frac{\omega(2\omega^2 - 7)}{2\omega^2 - 5} \right)^2 = (\omega^2 - \omega)^2$

= $(\pm \sqrt{3}\, ت)^2 = -3$

السؤال الرابع :

(١) أثبت أن : $\left(\frac{1 + \text{حا ى} + \text{ت حتا ى}}{1 + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}} \right)^{ن}$ =

حتا ن $(\frac{1}{2}\pi - ى)$ + ت حا ن $(\frac{1}{2}\pi - ى)$

الحل

$\because$ ١ = حا^{2}ى + حتا^{2}ى = حا^{2}ى − ت^2 حتا^{2}ى

= (حا ى + ت حتا ى) (حا ى − ت حتا ى)

$\therefore$ $\frac{1 + \text{حا ى} + \text{ت حتا ى}}{1 + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}} = \frac{(\text{حا ى} + \text{ت حتا ى})(\text{حا ى} - \text{ت حتا ى}) + (\text{حا ى} + \text{ت حتا ى})}{1 + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}}$

= $\frac{(\text{حا ى} + \text{ت حتا ى})((\text{حا ى} - \text{ت حتا ى}) + 1)}{1 + \text{حا ى} - \text{ت حتا ى}}$

= حا ى + ت حتا ى = حتا $(\frac{1}{2}\pi - ى)$ + ت حا $(\frac{1}{2}\pi - ى)$

$\therefore$ الطرف الأيمن = حتا ن $(\frac{1}{2}\pi - ى)$ + ت حا ن $(\frac{1}{2}\pi - ى)$

= الطرف الأيسر





المتميز

فى

الرياضيات البحتة

الجبر

الجزء النظرى

و

حلول التمارين

الوحدة الثالثة

ω | م | هـ | س

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الثالثة .... المحددات و المصفوفات

٣ – ١ المحددات

تذكر ما يلى :

[١] تعريف :

إذا كان : أ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢ حيث :

أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$ فإن : محدد المصفوفة أ و يرمز |أ| و يسمى بمحدد الرتبة الثانية و هو العدد المعرف كالتالى :

$$|أ| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{vmatrix} = أ\,ء - ب\,حـ$$

ملاحظة :

قيمة محدد الرتبة الثانية يساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى (أ ء) مطروحاً منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر (ب حـ)

[٢] محدد الرتبة الثالثة :

يسمى محدد المصفوفة على النظم ٣ × ٣ محدد الرتبة الثالثة

و لإيجاد قيمة محدد الرتبة الثالثة $\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix}$ فإن :

$$\begin{vmatrix} أ & ب & حـ \\ ء & هـ & و \\ ز & ح & ط \end{vmatrix} = أ \begin{vmatrix} هـ & و \\ ح & ط \end{vmatrix} - ب \begin{vmatrix} ء & و \\ ز & ط \end{vmatrix} + حـ \begin{vmatrix} ء & هـ \\ ز & ح \end{vmatrix}$$

$$= أ\,(هـ\,ط - ح\,و) - ب\,(ء\,ط - ز\,و) + حـ\,(ء\,ح - ز\,هـ)$$

ملاحظة :

إذا كان : أ مصفوفة مربعة على النظم ١ × ١ ، و كان : أ = (ك) فإن : |أ| = ك

[٣] المحدد الأصغر المناظر لأى عنصر فى مصفوفة :

إذا كانت : أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$$

فإن : المحدد الأصغر للعنصر $أ_{١١}$ و يرمز له بالرمز $|أ_{١١}|$ هو :

$$\begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$$

و حصلنا عيه بحذف الصف و العمود المتقاطعين على العنصر $أ_{١١}$ كما يلى :

$$\begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$$

ملاحظة :

يمكن إيجاد قيمة المحدد (فك المحدد) بإستخدام عناصر أى صف (أو عمود) و محدداتها الصغرى و بإشاراتها المناسبة حيث :

هذه الاشارات كما يلى : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

[٤] محدد المصفوفة المثلثية :

المصفوفة المثلثية هى مصفوفة جميع عناصرها التى تقع تحت (أو فوق) القطر الرئيسى هى أصفار ، و تكون قيمة محدد المصفوفة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

أى أن : $\begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ 0 & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ 0 & 0 & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & 0 & 0 \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & 0 \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{أ}_{11} \times \text{أ}_{22} \times \text{أ}_{33}$

الخواص الأساسية للمحددات :

خاصية (١) :

لا تتغير قيمة المحدد عند تبديل صفوف المحدد بأعمدته المناظرة بنفس الترتيب

أى أن : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{31} \\ \text{أ}_{12} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{32} \\ \text{أ}_{13} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$

و يمكن اثبات ذلك بفك كل من المحددين

ملاحظة :

قيمة محدد المصفوفة المربعة تساوى قيمة محدد مدور هذه المصفوفة

فإذا كانت : أ مصفوفة مربعة فإن : $|\text{أ}| = |\text{أ}^{\text{مد}}|$

خاصية (٢) :

قيمة المحدد لا تتغير بفكه عن طريق عناصر أى صف (عمود)

و يمكن اثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر أى صف (عمود) مرة و باستخدام عناصر أى صف (عمود) مرة أخرى

خاصية (٣) :

قيمة المحدد تنعدم فى الحالتين الآتيتين :

أولاً : إذا كانت جميع عناصر أى صف (عمود) فى محدد تساوى صفر فإن قيمة المحدد = صفر

أى أن : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

و يمكن اثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثانى

فيكون : Δ = صفر

ثانياً : إذا تساوت العناصر المناظرة فى أى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد = صفر

أى أن : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{صفر}$

و ذلك لتساوى العناصر المناظرة فى الصفين الأول و الثانى

و يكتب ذلك اختصاراً : ($\text{ص}_1 = \text{ص}_2$)

و يمكن اثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الثانى

خاصية (٤) :

إذا وجد عامل مشترك فى جميع عناصر صف (عمود) فى محدد فإن هذا العامل يمكن أخذه خارج المحدد

أى أن : $\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{ك}\,\text{أ}_{21} & \text{ك}\,\text{أ}_{22} & \text{ك}\,\text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix} = \text{ك} \begin{vmatrix} \text{أ}_{11} & \text{أ}_{12} & \text{أ}_{13} \\ \text{أ}_{21} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{23} \\ \text{أ}_{31} & \text{أ}_{32} & \text{أ}_{33} \end{vmatrix}$

و ذلك بأخذ ك عامل مشترك من $ص_{٢}$ و يكون :

$$\Delta = \text{ك} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{ك} \times \text{صفر} = \text{صفر}$$

لأن : $(ص_{١} = ص_{٢})$

و يمكن اثبات ذلك بايجاد قيمة المحدد بفكه فى الحالتين

ملاحظات :

(١) ضرب محدد فى عدد حقيقى ك ≠ ٠ .
يعنى : ضرب هذا العدد فى عناصر أى صف (عمود) واحد فقط

(٢) قيمة المحدد تنعدم إذا كانت عناصر أى صف (عمود) مضاعفات لعناصر صف (عمود) آخر فى المحدد

خاصية (٥) :

إذا بدلنا موضعى صفين (عمودين) فإن قيمة المحدد الناتج = – قيمة المحدد الأصلى

أى أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

بتبديل العمودين الأول و الثانى و تكتب احتصاراً : (بتبديل $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$)

و يمكن اثبات ذلك بايجاد قيمة المحدد بفكه فى الحالتين

خاصية (٦) :

إذا كتبت جميع عناصر صف (عمود) كمجموع عنصرين فإنه يمكن كتابة المحدد الأصلى على صورة مجموع محددين

أى أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{ك} + \text{أ}_{١٢} & \text{ك} + \text{أ}_{٢٢} & \text{ك} + \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{ك} & \text{ك} & \text{ك} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

و يمكن اثبات ذلك بايجاد قيمة المحددات

ملاحظة :

لايجاد مجموع محددين لا يختلفان سوى فى عناصر صفين (عمودين) متناظرين نجمع العناصر المتناظرة فى هذين الصفين (العمودين) فى المحدد الناتج و كتابة العناصر المتشابهة كما هى

أى أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{ك} & \text{ك} & \text{ك} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{ك} + \text{أ}_{١٢} & \text{ك} + \text{أ}_{٢٢} & \text{ك} + \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

خاصية (٧) :

إذا أضفنا لعناصر أى صف (عمود) بمحدد مضاعفات عناصر أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير

أى أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} + \text{ك أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢١} + \text{ك أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣١} + \text{ك أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

أضيفت إلى عناصر الصف الأول عناصر الصف الثانى مضروبة × ك (ك ≠ ٠) و يرمز لهذه العملية بالرمز : ($ص_{١}$ + ك $ص_{٢}$)

و يمكن اثبات ذلك بتجزئية عناصر الصف الأول للمحدد بالطرف الأيسر تبعاً للخاصية (٦) إلى مجموع محددين أحدهما يعطى محدد الطرف الأيمن و الآخر قيمته = صفر

ملاحظات :

(١) تستخدم هذه الخاصية فى جعل أحد الصفوف (الأعمدة) يحتوى على أكبر عدد من الأصفر ثم ايجاد قيمة المحدد بفك هذا المحدد باستخدام عناصر هذا الصف (العمود)

(٢) تستخدم هذه الخاصية فى تبسيط عناصر المحدد عندما تكون قيم هذه العناصر كبيرة مما يسهل ايجاد قيمته

خاصية (٨) :

فى أى محدد إذا ضربنا عناصر أى صف (عمود) فى العوامل المرافقة للعناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر ثم جمعنا نواتج الضرب فإن الناتج يكون مساوياً صفراً

أى أن : فى المحدد $\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{21} & أ_{22} & أ_{23} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix}$

عناصر الصف الأول هى : $أ_{11}$ ، $أ_{12}$ ، $أ_{13}$ ، العوامل المرافقة لعناصر الصف الثانى هى :

$$-\begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} \quad ، \quad +\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{13} \\ أ_{31} & أ_{33} \end{vmatrix} \quad ، \quad -\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{31} & أ_{32} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \text{المحدد} = -أ_{11}\begin{vmatrix} أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} + أ_{12}\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{13} \\ أ_{31} & أ_{33} \end{vmatrix} - أ_{13}\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{31} & أ_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

لأن : ($ص_1 = ص_2$)

المحدد على الصورة المثلثية :

إذا كتب المحدد بإحدى الصورتين ، سميت هذه الصورة بالصورة المثلثية السفلى و العليا على الترتيب

$$\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} & أ_{13} \\ 0 & أ_{22} & أ_{23} \\ 0 & 0 & أ_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} أ_{11} & 0 & 0 \\ أ_{21} & أ_{22} & 0 \\ أ_{31} & أ_{32} & أ_{33} \end{vmatrix}$$

و تكون جميع عناصر المحدد الواقعة أعلى القطر الرئيسى (المظلل) كما فى الصورة الأولى أو أسفله كما فى الصورة الثانية كلها أصفار كما تسمى العناصر : $أ_{11}$ ، $أ_{22}$ ، $أ_{33}$ بعناصر القطر الرئسى

خاصية (٩) :

قيمة المحدد على الصورة المثلثية تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

أى أن : قيمة المحدد من الصورة السابقة = $أ_{11} \times أ_{22} \times أ_{33}$

و يمكن اثبات ذلك بفك المحدد باستخدام عناصر العمود الأول فى الصورة الأولى ، و باستخدام عناصر الصف الأول فى الصورة الثانية

حل تمارين (٣ – ١) صفحة ٧٤ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 12$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{س} & \text{ص} \\ \text{و} & \text{ء} & \text{هـ} \\ \text{جـ} & \text{أ} & \text{ب} \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ١٢　　(ب) − ٦　　(جـ) ٦　　(ء) ١٢

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \end{vmatrix} = 15$ فإن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{س} & \text{ص} & \text{ع} \\ \text{ء} & \text{هـ} & \text{و} \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ٣٠　　(ب) − ١٥　　(جـ) صفر　　(ء) ١٥

(٣) $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{أ} & \text{أ} \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{جـ} & \text{جـ} & \text{جـ} \end{vmatrix} = ...$

(أ) صفر　　(ب) أ جـ　　(جـ) ب جـ　　(ء) أ ب جـ

(٤) $\begin{vmatrix} \text{أ ب} & \text{أ} & \frac{1}{\text{جـ}} \\ \text{أ جـ} & \text{جـ} & \frac{1}{\text{ب}} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ} & \frac{1}{\text{أ}} \end{vmatrix} = ...$

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(ء) ٥

(٥) $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{ص} & \text{ص} - \text{ع} & \text{ع} - \text{س} \\ \text{ص} - \text{ع} & \text{ع} - \text{س} & \text{س} - \text{ص} \\ \text{ع} - \text{س} & \text{س} - \text{ص} & \text{ص} - \text{ع} \end{vmatrix} = ...$

(أ) صفر　　(ب) س − ص　　(جـ) ص − ع　　(ء) ع − س

(٦) إذا كان : $\text{ت}^2 = -1$ فإن : $\begin{vmatrix} 1 & \text{ت} & \text{ت} + 1 \\ 0 & 1 & \text{ت} - 1 \\ 0 & \text{ت} & \text{ت} \end{vmatrix} = ...$

(أ) ٢ت − ١　　(ب) ٢ت + ١　　(جـ) ت　　(ء) ١

(٧) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} & 2\text{س} & 3\text{س} \\ 3\text{س} & 2\text{س} & \text{س} \\ \text{س} & -\text{س} & 0 \end{vmatrix} = 96$

فى ح هى : ....

(أ) ٤　　(ب) ٣　　(جـ) ٢　　(ء) − ٢

(٨) فى Δ أ ب جـ يكون : $\begin{vmatrix} \text{أ}' & \text{ب}' & \text{جـ}' \\ 5 & 7 & 8 \\ \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا جـ} \end{vmatrix} = ...$

(أ) ٥ أ′　　(ب) ٧ ب′　　(جـ) ٨ جـ′　　(ء) صفر

(٩) إذا كان : $\text{ن} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ ، $\text{م} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \end{vmatrix}$ فإن : م = ...

(أ) ن　　(ب) ١٠ ن　　(جـ) ٢٠ ن　　(ء) ٣٠ ن

(١٠) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ 1 & 0 & -7 \\ -9 & 7 & 0 \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ٩　　(ب) − ٩　　(جـ) ٤٩　　(ء) صفر

الحل

(١) بتبديل ($ص_١$ ، $ص_٢$) ثم تبديل ($ع_١$ ، $ع_٣$) ثم تبديل ($ع_٢$ ، $ع_٣$)

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = -\begin{vmatrix} ع & س & ص \\ و & ء & هـ \\ حـ & م & ب \end{vmatrix} = -١٢$$

(٢) بتبديل ($ص_٢$ ، $ص_٣$) $\therefore$ الطرف الأيمن $= -\begin{vmatrix} م & ب & حـ \\ س & ص & ع \\ ء & هـ & و \end{vmatrix} = -١٥$

(٣) بأخذ م عامل مشترك من $ص_١$ ، حـ عامل مشترك من $ص_٣$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = م\,حـ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ م & ب & حـ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

" لأن : $ص_١ = ص_٣$ "

(٤) بإجراء : $ص_١ \times حـ$ ، $ص_٢ \times ب$ ، $ص_٣ \times م$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{١}{م\,ب\,حـ} \begin{vmatrix} م\,ب\,حـ & م\,حـ & ١ \\ م\,ب\,حـ & ب\,حـ & ١ \\ م\,ب\,حـ & م\,ب & ١ \end{vmatrix}$$

بأخذ م ب حـ عامل مشترك من $ع_١$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{م\,ب\,حـ}{م\,ب\,حـ} \begin{vmatrix} ١ & م\,حـ & ١ \\ ١ & ب\,حـ & ١ \\ ١ & م\,ب & ١ \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

" لأن : $ع_١ = ع_٣$ "

(٥) بإجراء : $ع_١ + ع_٢ + ع_٣$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ٠ & ص - ع & ع - س \\ ٠ & ع - س & س - ص \\ ٠ & س - ص & ص - ع \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

" لأن : عناصر $ع_١$ كلها أصفار "

(٦) بإجراء : $ع_٣ - ع_٢$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ت + ١ \\ ٠ & ٢ - ت & ت - ١ \\ ٠ & ٠ & ت \end{vmatrix} = ١ \times (٢ - ت) \times ت = ٢ت + ١$$

" لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

(٧) بفك المحدد باستخدام عناصر $ص_٣$ نجد أن :

الطرف الأيمن $=$ س (٢ $س^٢$ − ٦ $س^٢$) + س ($س^٢$ − ٩ $س^٢$)

$= -٤س^٣ - ٨س^٣ = -١٢س^٣$

$\therefore -١٢س^٣ = ٩٨$ ومنها : $س^٣ = -٨$

$\therefore س = -٢$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٢\}$

حل آخر

بإجراء : $ع_٢ + ع_١$ $\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} س & ٣س & ٣س \\ ٣س & ٥س & س \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

بإجراء : $\frac{١}{٣}ص_١ - ص_٢$ $\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} س & ٣س & ٣س \\ -\frac{٨}{٣}س & -٤س & ٠ \\ س & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= ٣س \times -٤س \times س = -١٢س^٣$

$\therefore -١٢س^٣ = ٩٨$ ومنها : $س^٣ = -٨$

$\therefore س = -٢$ $\therefore$ مجموعة الحل $= \{-٢\}$

(٨) $\because \frac{م'}{حا م} = \frac{ب'}{حا ب} = \frac{حـ'}{حا حـ} = ل$ " من قانون الجيب "

$\therefore م' = ل\,حا م$ ، $ب' = ل\,حا ب$ ، $حـ' = ل\,حا حـ$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ك\ حا\ أ & ك\ حا\ ب & ك\ حا\ جـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ حا\ أ & حا\ ب & حا\ جـ \end{vmatrix}$ = ك $\begin{vmatrix} حا\ أ & حا\ ب & حا\ جـ \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ حا\ أ & حا\ ب & حا\ جـ \end{vmatrix}$

= ٠ لأن : $ص_١ = ص_٣$

(٩) بإخراج العوامل المشتركة : ٣ ، ٢ ، ٥ من $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ للمحدد م

∴ م = ٣٠ $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ١ & ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٣٠ ن

(١٠) بفك المحدد باستخدام عناصر $ع_٣$ يكون :

∆ = ٩ (٧ − ٠) + ٧ (٧ − ٩) = ٦٣ − ١٤ = ٤٩

حل آخر

بإجراء : $ص_٢ + \frac{٧}{٩} ص_١$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & -١ & ٩ \\ \frac{١٦}{٩} & -\frac{٧}{٩} & ٠ \\ -٩ & ٧ & ٠ \end{vmatrix}$

بإجراء : $ع_٢ + \frac{٧}{٩} ع_١$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & -\frac{٢}{٩} & ٩ \\ \frac{١٦}{٩} & \frac{٤٩}{٨١} & ٠ \\ -٩ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ الطرف الأيمن = ٩ × $\frac{٤٩}{٨١}$ × − ٩ = ٤٩

(١١) أثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ١ & ص & ص^٢ \\ ١ & ع & ع^٢ \end{vmatrix}$ = (س − ص) (ص − ع) (ع − س)

ثم أوجد قيمة المحدد العددية إذا كان :

س − ص = ٥ ، ص − ع = ٧

الحل

بإجراء : $ص_٣ - ص_١$ ، $ص_٢ - ص_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ٠ & ص - س & ص^٢ - س^٢ \\ ٠ & ع - س & ع^٢ - س^٢ \end{vmatrix}$

بأخذ العوامل المشترك : (ص − س) من $ص_٢$ ، (ع − س) من $ص_٣$

∴ الطرف الأيمن = (ص − س) (ع − س) $\begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ٠ & ١ & س + ص \\ ٠ & ١ & س + ع \end{vmatrix}$

بإجراء : $ص_٣ - ص_٢$

∴ الطرف الأيمن = (ص − س) (ع − س) $\begin{vmatrix} ١ & س & س^٢ \\ ٠ & ١ & س + ص \\ ٠ & ٠ & ع - ص \end{vmatrix}$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = (ص − س) (ع − س) (ع − ص)

= (س − ص) (ص − ع) (ع − س) = الطرف الأيسر

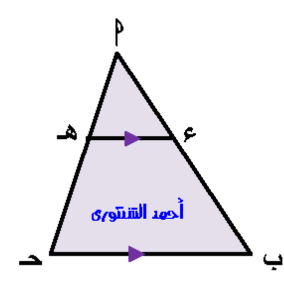
∵ س − ص = ٥ ، ص − ع = ٧ ∴ بالجمع ينتج :

س − ع = ١٢ ∴ ع − س = − ١٢

∴ قيمة المحدد العددية = ٥ × ٧ × − ١٢ = − ٤٢٠

(١٢) في الشكل المقابل : $\overline{ب\ جـ}$ // $\overline{ء\ هـ}$

أثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ء\ هـ & أ\ ء & أ\ هـ \\ ب\ جـ & أ\ ب & أ\ جـ \end{vmatrix}$ = صفر



الحل

∵ $\overline{\text{بحـ}} \parallel \overline{\text{ءهـ}}$ ∴ △ أءهـ ~ △ أبحـ

و ينتج : $\frac{\text{أء}}{\text{أب}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{بحـ}} = \frac{\text{أهـ}}{\text{أحـ}} = \text{ك}$

و منها : أء = ك أب ، ءهـ = ك بحـ ، أهـ = ك أحـ

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \text{ك أحـ} & \text{ك أب} & \text{ك بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{أب} & \text{بحـ} \end{vmatrix}$ ، بإخراج ك عامل مشترك من $ص_٢$

∴ الطرف الأيمن = ك $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \text{أحـ} & \text{أب} & \text{بحـ} \\ \text{أحـ} & \text{أب} & \text{بحـ} \end{vmatrix}$ = صفر " لأن : $ص_٢ = ص_٣$ "

(١٣) فى الشكل المقابل :

أثبت أن : $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ \text{أب + أحـ} & \text{أحـ} & \text{أب} \\ \text{بحـ} & \text{ءحـ} & \text{بء} \end{vmatrix}$ = صفر

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أء}}$ ينصف ∠ ب أ حـ ∴ $\frac{\text{أب}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{بء}}{\text{ءحـ}}$

و منها : $\frac{\text{أب}}{\text{بء}} = \frac{\text{أحـ}}{\text{ءحـ}} = \frac{\text{أب + أحـ}}{\text{بحـ}} = \text{ك}$

∴ أب = ك بء ، أحـ = ك ءحـ ، أب + أحـ = ك بحـ

و بالتعويض فى الطرف الأيمن ، و بإخراج ك عامل مشترك من $ص_٢$

∴ الطرف الأيمن = ك $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ \text{بحـ} & \text{ءحـ} & \text{بء} \\ \text{بحـ} & \text{ءحـ} & \text{بء} \end{vmatrix}$ = صفر " لأن : $ص_٢ = ص_٣$ "

(١٤) أثبت أن : $\begin{vmatrix} 1 & \text{حتا}^2\text{س} & \text{حا}^2\text{س} \\ 1 & \text{حتا}^2\text{ص} & \text{حا}^2\text{ص} \\ 1 & \text{حتا}^2\text{ع} & \text{حا}^2\text{ع} \end{vmatrix}$ = صفر

الحل

بإجراء : $ص_١ + ص_٢$ ، ملاحظة أن :

$\text{حا}^2\text{س} + \text{حتا}^2\text{س} = \text{حا}^2\text{ص} + \text{حتا}^2\text{ص} = \text{حا}^2\text{ع} + \text{حتا}^2\text{ع} = 1$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \text{حا}^2\text{س} \\ 1 & 1 & \text{حا}^2\text{ص} \\ 1 & 1 & \text{حا}^2\text{ع} \end{vmatrix}$ = صفر " لأن : $ع_٢ = ع_٣$ "

باستخدام خواص المحددات حل المعادلات الآتية :

(١٥) $\begin{vmatrix} س & 1 & س \\ 4 & 3 & 2 \\ س & 5 & س \end{vmatrix} = 16$

(١٦) $\begin{vmatrix} 0 & -س & 1 \\ س & 1 & س \\ س+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & س^2 \\ س & -س \end{vmatrix}$

(١٧) $\begin{vmatrix} 1 & -س & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ س & 1 & س+1 \end{vmatrix} = 2س + 1$

(١٨) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & س \\ 2 & س & 1 \\ س & 2 & 1 \end{vmatrix} = س - 1$

الحل

(١٥) بإجراء : $ص_٣ - ص_١$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س & 1 & س \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

، بإجراء : $٢ ع_١ - ع_٣$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س & 1 & س \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

و بتبديل : $ع_١$ ، $ع_٢$ ∴ الطرف الأيمن = $- \begin{vmatrix} ١ & س & س \\ ٣ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ الطرف الأيمن = $-٨س$ " لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ $-٨س = ١٦$ و منها : $س = -٢$ ∴ مجموعة الحل = $\{ -٢ \}$

(١٦) بكتابة محدد الطرف الأيمن كمجموع محددين بتقسيم عناصر $ص_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ س & ١ & س \\ ١ & -١ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & -س & ٠ \\ س & ١ & ٠ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء : $ع_٢ + س\,ع_٢$ لكلا المحددين

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & س^٢+١ & س \\ ١ & س-١ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & س^٢+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء : $ص_٢ - ص_٣$ بالمحدد الأول

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س-١ & س^٢-س+٢ & ٠ \\ ١ & س-١ & س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ س & س^٢+١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

" و لأن : كلا المحددين على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = $س^٣ - س^٢ + ٢س + س^٢ + ١$

، ∵ الطرف الأيسر = $س^٣ + س$

∴ $س^٣ - س^٢ + ٢س + س^٢ + ١ = س^٣ + س$

و منها : $٢س + ١ = س$ ∴ $س + ١ = ٠$

∴ $س = -١$ ∴ مجموعة الحل = $\{ -١ \}$

(١٧) بإجراء : $ع_٢ + ع_١$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢-س & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ س+١ & س+٢ & س \end{vmatrix}$

، بإجراء : $ص_٣ - س\,ص_١$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢-س & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ س-١ & س-س^٢-٢ & ٠ \end{vmatrix}$

، بتبديل : $ص_٣$ ، $ص_٢$ ثم بديل : $ع_١ + ع_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢-س & ١ \\ س-١ & س^٢-س+٢ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = س^٢ - س + ٢$

" لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ $س^٢ - س + ٢ = ٢س + ١$ ∴ $س^٢ - ٣س + ٢ = ٠$

و منها : $س = \dfrac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \dfrac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{ \dfrac{٣ + \sqrt{٥}}{٢} ، \dfrac{٣ - \sqrt{٥}}{٢} \right\}$

(١٨) بإجراء : $ع_١ + ع_٢ + ع_٣$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س+٣ & ١ & ٢ \\ س+٣ & س & ٢ \\ س+٣ & ٢ & س \end{vmatrix}$

، بإخراج ($س + ٣$) عامل مشترك من $ع_١$

∴ الطرف الأيمن = $(س + ٣) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ١ & س & ٢ \\ ١ & ٢ & س \end{vmatrix}$

، بإجراء : $ص_٢ - ص_١$ ، $ص_٣ - ص_١$

∴ الطرف الأيمن = (س + ٣) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & س - ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & س - ٢ \end{vmatrix}$

، بتبديل : $ع_٢$ ، $ع_٣$ ثم تبديل : $ص_٢ - ص_٣$

∴ الطرف الأيمن = (س + ٣) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & س - ٢ & ١ \\ ٠ & ٠ & س - ١ \end{vmatrix}$

∴ الطرف الأيمن = (س + ٣) (س − ٢) (س − ١)

" لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ (س + ٣) (س − ٢) (س − ١) = س − ١

∴ (س + ٣) (س − ٢) (س − ١) − (س − ١) = ٠

∴ (س − ١) [(س + ٣) (س − ٢) − ١] = ٠

∴ (س − ١) [$س^٢$ + س − ٦ − ١] = ٠

∴ (س − ١) [$س^٢$ + س − ٧] = ٠ و منها : س = ١ أ،

$س = \frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤ \times ١ \times (-٧)}}{٢ \times ١} = \frac{-١ \pm \sqrt{٢٨}}{٢}$

∴ مجموعة الحل = $\left\{ ١ ، \frac{-١ + \sqrt{٢٨}}{٢} ، \frac{-١ - \sqrt{٢٨}}{٢} \right\}$

باستخدام خواص المحددات أثبت أن :

(١٩) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ أ & ب & جـ \\ أ^٢ & ب^٢ & جـ^٢ \end{vmatrix}$ = (ب − أ) (جـ − أ) (جـ − ب)

(٢٠) $\begin{vmatrix} أ - ب - جـ & ٢أ & ٢أ \\ ٢ب & ب - جـ - أ & ٢ب \\ ٢جـ & ٢جـ & جـ - أ - ب \end{vmatrix}$ = $(أ + ب + جـ)^٣$

(٢١) $\begin{vmatrix} ب جـ & جـ^٢ & ب^٢ \\ جـ^٢ & جـ أ & أ^٢ \\ ب^٢ & أ^٢ & أ ب \end{vmatrix}$ = أ ب جـ $\begin{vmatrix} أ & جـ & ب \\ جـ & ب & أ \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix}$

(٢٢) $\begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$ = ٤ س ص ع

الحل

(١٩) بإجراء : $ع_٢ - ع_١$ ، $ع_٣ - ع_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ب - أ & جـ - أ \\ أ^٢ & ب^٢ - أ^٢ & جـ^٢ - أ^٢ \end{vmatrix}$

، بإخراج العوامل المشتركة (ب − أ) ، (جـ − أ) من $ع_٢$ ، $ع_٣$ على الترتيب

∴ الطرف الأيمن = (ب − أ) (جـ − أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ١ \\ أ^٢ & ب + أ & جـ + أ \end{vmatrix}$

، بإجراء $ع_٣ - ع_٢$

∴ الطرف الأيمن = (ب − أ) (جـ − أ) $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ أ & ١ & ٠ \\ أ^٢ & ب + أ & جـ - ب \end{vmatrix}$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = (ب − أ) (جـ − أ) (جـ − ب) = الطرف الأيسر

(٢٠) بإجراء : $ص_١ + ص_٢ + ص_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} أ + ب + جـ & أ + ب + جـ & أ + ب + جـ \\ ٢ب & ب - جـ - أ & ٢ب \\ ٢جـ & ٢جـ & جـ - أ - ب \end{vmatrix}$

، بإخراج (أ + ب + جـ) عامل مشترك من $ص_1$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (أ + ب + جـ)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2ب & ب - جـ - أ & 2ب \\ 2جـ & 2جـ & جـ - أ - ب \end{vmatrix}$$

، بإجراء : $ع_2 - ع_1$ ، $ع_3 - ع_1$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (أ + ب + جـ)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2ب & -أ - ب - جـ & 0 \\ 2جـ & 0 & -أ - ب - جـ \end{vmatrix}$$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (أ + ب + جـ)\left(-[أ + ب + جـ]\right)^2$$

$$= (أ + ب + جـ)^3 = \text{الطرف الأيسر}$$

(٢١) بإجراء : $ص_1 \times أ$ ، $ص_2 \times ب$ ، $ص_3 \times جـ$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{1}{أ ب جـ}\begin{vmatrix} أ ب جـ & أ جـ^2 & أ ب^2 \\ ب جـ^2 & ب جـ أ & ب أ^2 \\ جـ ب^2 & جـ أ^2 & جـ أ ب \end{vmatrix}$$

، بإخراج العوامل المشتركة (ب جـ) ، (أ جـ) ، (أ ب) من $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ على الترتيب

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{ب جـ \times أ جـ \times أ ب}{أ ب جـ}\begin{vmatrix} أ & جـ & ب \\ جـ & ب & أ \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix}$$

$$= أ ب جـ \begin{vmatrix} أ & جـ & ب \\ جـ & ب & أ \\ ب & أ & جـ \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٢٢) بكتابة محدد الطرف الأيمن كمجموع محددين بتقسيم عناصر $ع_1$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ص & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ 0 & ع & س + ص \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$$

، بإجراء : $ص_2 - ص_1$ فى المحدد الأول ، $ص_3 - ص_1$ فى المحدد الثانى

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ص & س & س \\ 0 & ع & ص - س \\ 0 & ع & س + ص \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ 0 & ع - س & ص \end{vmatrix}$$

، بإجراء : $ص_3 - ص_2$ فى كلا المحددين

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ص & س & س \\ 0 & ع & ص - س \\ 0 & 0 & 2س \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ع & س & س \\ 0 & ع + س & ص \\ 0 & -2س & 0 \end{vmatrix}$$

، بتبديل : $ع_2$ ، $ع_3$ فى المحدد الثانى يصبح كلا المحددين على الصورة المثلثية

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ص & س & س \\ 0 & ع & ص - س \\ 0 & 0 & 2س \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ع & س & س \\ 0 & ص & ع + س \\ 0 & 0 & -2س \end{vmatrix}$$

$$= 2 س ص ع - (-2 س ص ع) = 4 س ص ع$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

(٢٣) بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ س & ص & س \\ س & س & -ص \end{vmatrix} = س^2 - ص^2$

الحل

، بإجراء : $ع_2 - ع_1$ ، $ع_3 - ع_1$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ س & ص - س & 0 \\ س & 0 & -ص - س \end{vmatrix}$$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (ص - س)\left[-(ص + س)\right]$$

$$= -(ص^2 - س^2) = س^2 - ص^2 = \text{الطرف الأيسر}$$

بدون فك المحدد أوجد قيمة :

(٢٤) $\begin{vmatrix} ٥ & -١ & ١٠ \\ ٤ & ٢ & ٨ \\ -٥ & ٢ & -١٠ \end{vmatrix}$ **(٢٥)** $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ -٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$

الحل

(٢٤) بإخراج العامل المشترك ٢ من $ص_٢$ ، إجراء $ص_٣ + ص_١$

∴ الطرف الأيمن $= ٢ \begin{vmatrix} ٥ & -١ & ١٠ \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix}$ ، بإخراج العامل المشترك ٢ من $ع_٣$

∴ الطرف الأيمن $= ٤ \begin{vmatrix} ٥ & -١ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ \end{vmatrix} =$ صفر " لأن : $ع_١ = ع_٣$ "

(٢٥) بإخراج العامل المشترك (-٢) من $ص_٣$

∴ الطرف الأيمن $= -٢ \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & -١ \\ ٢ & -٣ & -١ \end{vmatrix} =$ صفر " لأن : $ص_٢ = ص_٣$ "

باستخدام خواص المحددات أثبت أن :

(٢٦) $\begin{vmatrix} (س+ص)^٢ & س^٢+ص^٢ & ٣س\,ص \\ (ع+ل)^٢ & ع^٢+ل^٢ & ٣ع\,ل \\ (م+ل)^٢ & م^٢+ل^٢ & ٣م\,ل \end{vmatrix} =$ صفر

(٢٧) $\begin{vmatrix} ٠ & ل & -م \\ -ل & ٠ & -ن \\ م & ن & ٠ \end{vmatrix} =$ صفر

(٢٨) $\begin{vmatrix} ١ & م\,ن & س\,ص+ع\,ل \\ ١ & س\,ص & م\,ن+ع\,ل \\ ١ & ع\,ل & س\,ص+م\,ن \end{vmatrix} =$ صفر

الحل

(٢٦) بإخراج العامل المشترك $\frac{٣}{٢}$ من $ع_٣$ ثم بإجراء : $ع_٢ + ع_٣$

∴ الطرف الأيمن $= \frac{٣}{٢} \begin{vmatrix} (س+ص)^٢ & س^٢+٢س\,ص+ص^٢ & ٢س\,ص \\ (ع+ل)^٢ & ع^٢+٢ع\,ل+ل^٢ & ٢ع\,ل \\ (م+ل)^٢ & م^٢+٢م\,ل+ل^٢ & ٢م\,ل \end{vmatrix}$

= صفر = الطرف الأيسر " لأن : $ع_١ = ع_٢$ "

(٢٧) بفرض أن : الطرف الأيمن $= \Delta$

، بإخراج (-١) عامل مشترك من $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$

$\therefore \Delta = (-١)^٣ \begin{vmatrix} ٠ & -ل & م \\ ل & ٠ & ن \\ -م & -ن & ٠ \end{vmatrix} = (-١) \begin{vmatrix} ٠ & -ل & م \\ ل & ٠ & ن \\ -م & -ن & ٠ \end{vmatrix}$

، ∵ المحدد الناتج هو مدور المحدد الأصلى Δ

∴ قيمته $= \Delta$ $\quad$ $\therefore \Delta = (-١) \times \Delta$

$\therefore \Delta + \Delta = ٠ \quad \therefore ٢\Delta = ٠ \quad \therefore \Delta = ٠ =$ الطرف الأيسر

(٢٨) بإجراء : $ع_٣ + ع_٢$

∴ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ١ & م\,ن & س\,ص+ع\,ل+م\,ن \\ ١ & س\,ص & س\,ص+ع\,ل+م\,ن \\ ١ & ع\,ل & س\,ص+ع\,ل+م\,ن \end{vmatrix}$

، بإخراج (س ص + ع ل + م ن) عامل مشترك من $ع_٣$

أحمد الشنتورى

∴ الطرف الأيمن = $(س ص + ع ل + م ن)\begin{vmatrix} 1 & م ن & 1 \\ 1 & س ص & 1 \\ 1 & ع ل & 1 \end{vmatrix}$

= صفر = الطرف الأيسر " لأن : $ع_1 = ع_3$ "

بدون فك المحدد أثبت أن :

(٢٩) $\begin{vmatrix} س & أ & أ \\ أ & س & أ \\ أ & أ & س \end{vmatrix} = (س + 2أ)(س - أ)^2$

(٣٠) $\begin{vmatrix} 1 & س & ص \\ س & 1+س^2 & س ص \\ ص & س ص & 1+ص^2 \end{vmatrix} = 1$

(٣١) $\begin{vmatrix} س & -ص & -ع \\ ص & 1 & 0 \\ ع^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = س + ص^2 + ع^3$

الحل

(٢٩) بإجراء : $ع_1 + ع_2 + ع_3$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س+2أ & أ & أ \\ س+2أ & س & أ \\ س+2أ & أ & س \end{vmatrix}$

، بإخراج $(س + 2أ)$ عامل مشترك من $ع_1$

∴ الطرف الأيمن = $(س + 2أ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ \\ 1 & س & أ \\ 1 & أ & س \end{vmatrix}$

بإجراء : $ص_2 - ص_1$ ، $ص_3 - ص_1$

∴ الطرف الأيمن = $(س + 2أ)\begin{vmatrix} 1 & أ & أ \\ 0 & س-أ & 0 \\ 0 & 0 & س-أ \end{vmatrix}$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = $(س + 2أ)(س - أ)^2$ = الطرف الأيسر

(٣٠) بإجراء : $ص_2 - س ص_1$ ، $ص_3 - ص ص_1$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 & س & ص \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ " و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = 1 = الطرف الأيسر

(٣١) بإجراء : $ع_1 + ص ع_2 + ع ع_3$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س+ص^2+ع^3 & 0 & 0 \\ ص & 1 & 0 \\ ع^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = $س + ص^2 + ع^3$ = الطرف الأيسر

(٣٢) **باستخدام خواص المحددات أثبت أن :**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -5 & -1 & -7 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 4 \end{vmatrix} = صفر$

الحل

بتدوير المحدد الأول ، بإخراج العامل المشترك (٢) من $ع_١$ ، $ع_٣$ للمحدد الثانى

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٤ & -١ & ٥ \\ ٣ & -٧ & ٢ \end{vmatrix} + \frac{١}{٤} \times ٤ \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ ٤ & -١ & ٥ \\ ٣ & -٧ & ٢ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٢ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٥ & ٥ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$$

$= \text{صفر} = \text{الطرف الأيسر}$ " لأن : $ع_٢ = ع_٣$ "

(٣٣) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{جـ})(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})$$

الحل

بإجراء : $ع_١ + ع_٢ + ع_٣$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{أ}+\text{ب}+\text{جـ} & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

بإخراج $(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ})$ عامل مشترك من $ع_١$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ ١ & \text{أ} & \text{جـ} \\ ١ & \text{جـ} & \text{أ} \end{vmatrix}$$

بإجراء : $ع_٢ - ع_١$ ، $ع_٣ - ع_١$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{جـ} \\ ٠ & \text{أ} - \text{ب} & ٠ \\ ٠ & \text{جـ} - \text{ب} & \text{أ} - \text{جـ} \end{vmatrix}$$

، بتبديل : $ع_٢$ ، $ع_٣$ ثم تبديل $ص_٢$ ، $ص_٣$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{جـ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{أ} - \text{جـ} & \text{جـ} - \text{ب} \\ ٠ & ٠ & \text{أ} - \text{ب} \end{vmatrix}$$

" و لأن : المحدد على الصورة المثلثية "

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} - \text{جـ})(\text{أ} + \text{ب} + \text{جـ}) = \text{الطرف الأيسر}$$

(٣٤) باستخدام خواص المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ب جـ} & \text{أ ب} & \text{أ} \\ \text{أ جـ} & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix} = (\text{أ} + \text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & ١ \\ \text{أ} & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ}^٢ & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

الحل

بإجراء : $ص_١ + ص_٢$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{جـ}(\text{أ}+\text{ب}) & \text{ب}(\text{أ}+\text{ب}) & \text{أ}+\text{ب} \\ \text{أ جـ} & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ} & ١ \end{vmatrix}$$

بإخراج $(\text{أ} + \text{ب})$ عامل مشترك من $ع_١$ ، بضرب $ص_٣ \times \text{جـ}$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{١}{\text{جـ}} (\text{أ} + \text{ب}) \begin{vmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & ١ \\ \text{أ جـ} & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{ب جـ} & \text{جـ}^٢ & \text{جـ} \end{vmatrix}$$

بإخراج (جـ) عامل مشترك من $ع_١$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = (\text{أ} + \text{ب}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & ١ \\ \text{أ} & \text{ب}^٢ & \text{ب} \\ \text{ب} & \text{جـ}^٢ & \text{جـ} \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٣٥) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$1 + حـ^2 + ب^2 + أ^2 = \begin{vmatrix} أحـ & أب & أ^2+1 \\ بحـ & ب^2+1 & أب \\ حـ^2+1 & بحـ & أحـ \end{vmatrix}$$

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الأول)

$$\begin{vmatrix} أحـ & أب & 1 \\ بحـ & ب^2+1 & 0 \\ حـ^2+1 & بحـ & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أحـ & أب & أ^2 \\ بحـ & ب^2+1 & أب \\ حـ^2+1 & بحـ & أحـ \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيمن}$$

بأخذ أ مشتركاً من الصف الأول ، و العمود الأول بالمحدد الأول

، و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثانى)

$$\begin{vmatrix} أحـ & 0 & 1 \\ بحـ & 1 & 0 \\ حـ^2+1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} أحـ & أب & 1 \\ بحـ & ب^2 & 0 \\ حـ^2+1 & بحـ & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} حـ & ب & 1 \\ بحـ & ب^2+1 & ب \\ حـ^2+1 & بحـ & حـ \end{vmatrix} أ^2 = \text{الطرف الأيمن}$$

بإجراء : ($ع_2$ – ب $ع_1$) فى $ع_2$ ، ($ع_3$ – حـ $ع_1$) فى $ع_3$ على المحدد الأول ،

بأخذ ب مشتركاً من الصف الثانى ، و العمود الثانى بالمحدد الثانى

المحدد الثالث على الصورة المثلثية ∴ قيمته = $حـ^2 + 1$

$$1 + حـ^2 + \begin{vmatrix} أحـ & أ & 1 \\ حـ & 1 & 0 \\ حـ^2+1 & حـ & 0 \end{vmatrix} ب^2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & ب \\ 1 & 0 & حـ \end{vmatrix} أ^2 = \text{الطرف الأيمن}$$

المحدد الأول على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ١ ،

و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

، بإجراء (حـ $ع_2$ – $ع_3$) فى $ع_3$ على المحدد الثانى

$$1 + حـ^2 + \begin{vmatrix} 0 & أ & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & حـ & 0 \end{vmatrix} ب^2 + 1 \times أ^2 = \text{الطرف الأيمن}$$

، بتبديل عناصر ($ع_2$ – $ع_3$) ثم عناصر ($ص_2$ – $ص_3$) على المحدد الأول

$$1 + حـ^2 + \begin{vmatrix} أ & 0 & 1 \\ حـ & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} ب^2 + أ^2 = \text{الطرف الأيمن}$$

المحدد على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ١ ،

$$1 + حـ^2 + 1 \times ب^2 + أ^2 = \text{الطرف الأيمن}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = 1 + حـ^2 + ب^2 + أ^2 =$$

(٣٦) بدون فك المحددات أثبت أن :

$$\left(1 + \frac{1}{حـ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{أ} \right) أبحـ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+أ \\ 1 & 1+ب & 1 \\ 1+حـ & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر $ع_1$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & 1+ب & 0 \\ 1+حـ & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+ب & 1 \\ 1+حـ & 1 & 1 \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيمن} \therefore$$

بكتابة كلا المحددين كمجموع محددين (عناصر $ع_2$)

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1+حـ & 1 & 1 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & ب & 1 \\ 1+حـ & 0 & 1 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} 1 & 1 & أ \\ 1 & 1 & 0 \\ 1+حـ & 1 & 0 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} 1 & 0 & أ \\ 1 & ب & 0 \\ 1+حـ & 0 & 0 \end{vmatrix}$

قيمة المحدد الأول = ٠ لأن : $ع_1 = ع_2$ ، بإجراء : $ص_2 - ص_1$ ، $ص_3 - ص_1$ بالمحدد الثانى ، بإجراء : $ع_3 - ع_2$ بالمحدد الثالث ، قيمة المحدد الرابع = أ ب (١ + حـ) لأنه على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن = ٠ + $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & ب & 0 \\ حـ & 0 & 0 \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} 0 & 1 & أ \\ 0 & 1 & 0 \\ حـ & 1 & 0 \end{vmatrix}$ + أ ب (١ + حـ)

قيمة المحدد الأول = (ب حـ) لأنه على الصورة المثلثية ، بتبديل : $ع_1$ ، $ع_2$ ثم تبديل : $ص_2$ ، $ص_3$ بالمحدد الثانى

∴ الطرف الأيمن = ب حـ + $\begin{vmatrix} 1 & 0 & أ \\ 1 & حـ & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ + أ ب (١ + حـ)

قيمة المحدد = (أ حـ) لأنه على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن = ب حـ + أ حـ + أ ب (١ + حـ)

= ب حـ + أ حـ + أ ب + أ ب حـ

= أ ب حـ ($\frac{1}{أ} + \frac{1}{ب} + \frac{1}{حـ} + 1$) = الطرف الأيسر

(٣٧) إذا كان : $\begin{vmatrix} أ & أ^2 & أ^3-1 \\ ب & ب^2 & ب^3-1 \\ حـ & حـ^2 & حـ^3-1 \end{vmatrix}$ = صفر

حيث : أ ≠ ب ≠ حـ ، أثبت أن : أ ب حـ = ١

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر $ع_1$)

∴ $\begin{vmatrix} أ & أ^2 & أ^3 \\ ب & ب^2 & ب^3 \\ حـ & حـ^2 & حـ^3 \end{vmatrix}$ − $\begin{vmatrix} أ & أ^2 & 1 \\ ب & ب^2 & 1 \\ حـ & حـ^2 & 1 \end{vmatrix}$ = ٠

، بإخراج العوامل المشتركة (أ) ، (ب) ، (حـ) من $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ على الترتيب بالمحدد الأول ، وبتبديل : $ع_1$ ، $ع_2$ ثم $ع_2$ ، $ع_3$ بالمحدد الثانى

∴ أ ب حـ $\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & حـ & حـ^2 \end{vmatrix}$ − $\begin{vmatrix} 1 & أ & أ^2 \\ 1 & ب & ب^2 \\ 1 & حـ & حـ^2 \end{vmatrix}$ = ٠

، ∵ أ ≠ ب ≠ حـ   ∴ قيمة المحدد الناتج ≠ ٠

∴ أ ب حـ − ١ = ٠   ∴ أ ب حـ = ١

(٣٨) بدون فك المحدد أثبت أن :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ حـ & ب & أ \\ أب & حـأ & بحـ \end{vmatrix}$ = $\begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ حـ^2 & حـ & 1 \end{vmatrix}$

الحل

بضرب $ص_1 \times أ$ ، $ص_2 \times ب$ ، $ص_3 \times حـ$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{1}{أ\,ب\,حـ}\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ حـ^2 & ب^2 & أ^2 \\ أ\,ب\,حـ & أ\,ب\,حـ & أ\,ب\,حـ \end{vmatrix}$$

بإخراج (أ ب حـ) عامل مشترك من $ص_3$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{أ\,ب\,حـ}{أ\,ب\,حـ}\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ حـ^2 & ب^2 & أ^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ حـ^2 & ب^2 & أ^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ و بتدوير المحدد

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} 1 & أ^2 & أ \\ 1 & ب^2 & ب \\ 1 & حـ^2 & حـ \end{vmatrix}$$ و بتبديل : $ع_1$ ، $ع_2$ ثم $ع_2$ ، $ع_3$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} أ^2 & أ & 1 \\ ب^2 & ب & 1 \\ حـ^2 & حـ & 1 \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

(٣٩) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} حـ\,أ & أ\,ب & ب\,حـ \\ حـ\,ب & حـ\,أ & أ\,ب \\ أ\,ب & حـ\,ب & حـ\,أ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ^2 & أ^2 & ب\,حـ \\ ب^2 & حـ\,أ & ب^2 \\ أ\,ب & حـ^2 & حـ^2 \end{vmatrix}$$

الحل

بضرب $ع_1 \times أ$ ، $ع_2 \times ب$ ، $ع_3 \times حـ$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{1}{أ\,ب\,حـ}\begin{vmatrix} أ^2\,حـ & أ^2\,ب & أ\,ب\,حـ \\ ب^2\,حـ & حـ\,أ\,ب & أ\,ب^2 \\ أ\,ب\,حـ & حـ^2\,ب & أ\,حـ^2 \end{vmatrix}$$

، بإخراج العوامل المشتركة (أ) ، (ب) ، (حـ) من $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \frac{أ\,ب\,حـ}{أ\,ب\,حـ}\begin{vmatrix} حـ\,أ & أ\,ب & ب\,حـ \\ ب\,حـ & أ\,حـ & أ\,ب \\ أ\,ب & ب\,حـ & حـ\,أ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} حـ\,أ & أ\,ب & ب\,حـ \\ ب\,حـ & أ\,حـ & أ\,ب \\ أ\,ب & ب\,حـ & حـ\,أ \end{vmatrix}$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

٣ – ٢ المصفوفات

تذكر ما يلى :

[١] تعريف المصفوفة :

المصفوفة هى : مجموعة من العناصر موضوعة فى جدول مرتبة م صفاً ، ن عموداً و محاطة بقوسين على الصورة (   ) و يرمز لها بأحد الحروف الهجائية ، و يكتب نظم المصفوفة على الصورة : م × ن ، **فمثلاً** :

المصفوفة : أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من النظم ٢ × ٢ ،

المصفوفة : س = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة من النظم ١ × ٣ ،

[٢] يعبر عن العنصر داخل المصفوفة أ على الصورة ($\text{أ}_{\text{ص ع}}$) حيث :
ص ، ع هما الصف و العمود الذى يقع فيه العنصر على الترتيب

[٣] مصفوفة الوحدة (I) :

هى المصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسى = ١
و باقى العناصر = أصفار مثل :

$I_{٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، $I_{٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

[٤] تساوى مصفوفتين :

تتساوى مصفوفتان أ ، ب إذا كانت من نفس النظم و كان كل عنصر فى المصفوفة أ مساوياً لنظيره فى المصفوفة ب
أى أن : $\text{أ}_{\text{ص ع}} = \text{ب}_{\text{ص ع}}$ لكل ص ، ع

[٥] مدور المصفوفة :

لأى مصفوفة أ من النظم : م × ن إذا بدلنا الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف بنفس الترتيب فإننا نحصل على مدور المصفوفة أ و يرمز لها بالرمز ($\text{أ}^{\text{مد}}$) و تكون من النظم ن × م أى أن :

إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{١٣} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٢٣} \\ \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٣٣} \end{pmatrix}$ فإن : $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{pmatrix}$

[٦] ضرب المصفوفات :

عند ضرب المصفوفة س من النظم : م × ن ، المصفوفة ص من النظم : ن × ل فإن : الناتج هو : س ص = ع
حيث : ع مصفوفة من النظم : م × ل
و أى عنصر من عناصر ع ينتج من مجموع حواصل ضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى " اليمنى " س فى عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية " اليسرى " ص

[٧] المعكوس الضربى للمصفوفة المربعة من النظم ٢ × ٢ :

(١) إذا كانت : أ ، ب مصفوفتان مربعتان كل منهما من النظم ٢ × ٢ ، و كان : أ ب = ب أ = I
فإن : المصفوفة ب تسمى معكوساً ضربياً للمصفوفة أ
و كذلك تسمى المصفوفة أ معكوساً ضربياً للمصفوفة ب

(٢) إذا كان : للمصفوفة أ معكوساً ضربياً فإنه يرمز لها بالرمز $\text{أ}^{-١}$
حيث : $\text{أ}\,\text{أ}^{-١} = \text{أ}^{-١}\,\text{أ} = I$

(٣) يكون للمصفوفة أ معكوس ضربى إذا كان محدد أ = $\Delta \neq ٠$.

أحمد الشتوى

، و تسمى بالمصفوفة غير المنفردة (غير الشاذة)

(٤) المصفوفة أ لا يكون لها معكوساً ضربياً إذا كان :

محدد أ = $\Delta = ٠$ ، و تسمى بالمصفوفة المنفردة (الشاذة)

(٥) المعكوس الضربى للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ حـ & ء \end{pmatrix}$

حيث : محدد أ = $\Delta \neq ٠$. هو : $أ^{-١} = \frac{١}{\Delta}\begin{pmatrix} ء & -ب \\ -حـ & أ \end{pmatrix}$

(٦) خطوات ايجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ المربعة من النظم ٢ × ٢ :

١) تبديل وضعى العنصرين الواقعين على القطر الرئيسى للمصفوفة أ

٢) تغيير كلاً من إشارتى العنصرين الواقعين على القطر الآخر للمصفوفة أ

٣) ضرب المصفوفة الناتجة من ١) ، ٢) بالعدد $\frac{١}{\Delta}$

لنحصل على : $أ^{-١}$

العوامل المرافقة :

إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ مصفوفة من النظم ٣ × ٣ ،

و محددها $|أ|$ فإن : العامل المرافق للعنصر $أ_{صع}$ هو قيمة المحدد الأصغر المقابل للعنصر $أ_{صع}$ و الناتج من حذف الصف و العمود و اللذان يقع فى تقاطعهما للعنصر $أ_{صع}$ مضروباً × $(-١)^{ص+ع}$ حيث :

$\overline{أ_{١١}}$ هو : العامل المرافق للعنصر $أ_{١١}$ ..... و هكذا

، تحدد إشارة العامل المرافق لكل عنصر باستخدام قاعدة الإشارات التالية : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

و تكون العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ هى :

$\overline{أ_{١١}} = \begin{vmatrix} أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\overline{أ_{١٢}} = -\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\overline{أ_{١٣}} = \begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{٢٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$ ،

$\overline{أ_{٢١}} = -\begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\overline{أ_{٢٢}} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٣} \end{vmatrix}$ ، $\overline{أ_{٢٣}} = -\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} \end{vmatrix}$ ،

$\overline{أ_{٣١}} = \begin{vmatrix} أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$ ، $\overline{أ_{٣٢}} = -\begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٣} \end{vmatrix}$ ، $\overline{أ_{١٣}} = \begin{vmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} \end{vmatrix}$

و تكون مصفوفة العوامل المرافقة (م) هى :

$$م = \begin{pmatrix} \overline{أ_{١١}} & \overline{أ_{١٢}} & \overline{أ_{١٣}} \\ \overline{أ_{٢١}} & \overline{أ_{٢٢}} & \overline{أ_{٢٣}} \\ \overline{أ_{٣١}} & \overline{أ_{٣٢}} & \overline{أ_{٣٣}} \end{pmatrix}$$

المصفوفة الملحقة :

المصفوفة الملحقة للمصفوفة أ هى المصفوفة الناتجة من مدور مصفوفة العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة أ و يرمز لها بالرمز $(أ)^{مل}$ أى أن :

إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{١٢} & أ_{١٣} \\ أ_{٢١} & أ_{٢٢} & أ_{٢٣} \\ أ_{٣١} & أ_{٣٢} & أ_{٣٣} \end{pmatrix}$ فإن : $أ^{مل} = \begin{pmatrix} \overline{أ_{١١}} & \overline{أ_{٢١}} & \overline{أ_{٣١}} \\ \overline{أ_{١٢}} & \overline{أ_{٢٢}} & \overline{أ_{٣٢}} \\ \overline{أ_{١٣}} & \overline{أ_{٢٣}} & \overline{أ_{٣٣}} \end{pmatrix}$

المعكوس الضربى للمصفوفة المربعة من النظم ٣ × ٣ :

إذا كان : $|أ| \neq ٠$. فإنه يوجد معكوس ضربى للمصفوفة أ و يرمز له

بالرمز : $أ^{-١}$ و هو مصفوفة مربعة أيضاً حيث : $أ\,أ^{-١} = أ^{-١}\,أ = I$

، I مصفوفة الوحدة على نفس النظم

خطوات ايجاد المعكوس الضربى للمصفوفة أ المربعة من النظم ٣ × ٣ :

١) نوجد محدد المصفوفة أ مع ملاحظة : $|أ| \neq ٠$.

٢) نكون مصفوفة العوامل المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة أ

٣) نوجد المصفوفة الملحقة $(أ)^{مل}$ " مدور مصفوفة العوامل المرافقة "

٤) نوجد المعكوس الضربى للمصفوفة أ من العلاقة :

$$أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times (أ)^{مل}$$

بعض خواص المعكوس الضربى للمصفوفة :

إذا كانت : أ ، ب مصفوفتان غير منفردتان فإن :

(١) $|أ| = |أ^{-}|$

(٢) $(أ\,ب)^{-١} = ب^{-١}\,أ^{-١}$

(٣) $(أ^{-١})^{-١} = أ$ (معكوس معكوس المصفوفة = المصفوفة أ)

(٤) $(أ^{-١})^{مد} = (أ^{مد})^{-١}$ (مدور المعكوس = معكوس المدور)

(٥) $(أ^{-١})^{٢} = (أ^{٢})^{-١}$ (مربع المعكوس = معكوس المربع)

(٦) $(I)^{-١} = I$ (معكوس مصفوفة الوحدة = مصفوفة الوحدة)

حل تمارين (٣ – ٢) صفحة ٨٤ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) المصفوفة المنفردة من بين المصفوفات التالية هى ....

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} -٢ & ٣ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ (حـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & -٣ \end{pmatrix}$

(٢) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & س \\ ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ منفردة هى ....

(أ) – ٣ (ب) $-\frac{١}{٢}$ (حـ) $\frac{١}{٢}$ (ء) ٢

(٣) جميع المصفوفات الآتية لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة ....

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ -٣ & ١ \end{pmatrix}$ (حـ) $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت : أ مصفوفة غير منفردة فإن : $(أ\,ب)^{-١}$ تساوى ....

(أ) – أ ب (ب) $أ^{-١}\,ب^{-١}$ (حـ) $ب^{-١}\,أ^{-١}$ (ء) $(ب\,أ)^{-١}$

الحل

(١) ∵ $|ب| = (-١٢) - (-١٢) = (-١٢) + ١٢ = ٠$

∴ المصفوفة ب منفردة

" لاحظ : أن محدد المصفوفات الأخرى ≠ ٠ (أوجد ذلك بنفسك) "

(٢) بفرض أن : المصفوفة منفردة ∴ $\Delta = ٠$

∴ ٢ س + ٤ = ٠ و منها : س = – ٢

(٣) ∵ $|حـ| = ١٢ - ١٢ = ٠$ ∴ المصفوفة حـ منفردة أى لها معكوس ضربى

(٤) $(أ\,ب)^{-١} = ب^{-١}\,أ^{-١}$

" لاحظ : أنها خاصية من خواص المعكوس الضربى للمصفوفة "

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٥) أوجد قيمة س التى تجعل كلاً من المصفوفات الآتية منفردة :

(أ) $\begin{pmatrix} \text{س} - ٣ & ٢ \\ ٧ & \text{س} + ٢ \end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix} ٣ & -١ & ٣ \\ ٢\text{س} & ٣\text{س} & \text{س} + ١ \\ ٤ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} \text{س} + ٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \\ ٧ & \text{س} + ١ & ١ \end{pmatrix}$

الحل

(أ) بفرض أن : المصفوفة منفردة $\therefore \Delta = ٠$

$\therefore (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢) - ١٤ = ٠$

$\therefore \text{س}^٢ - \text{س} - ٦ - ١٤ = ٠ \qquad \therefore \text{س}^٢ - \text{س} - ٢٠ = ٠$

$\therefore (\text{س} - ٥)(\text{س} + ٤) = ٠ \qquad \therefore \text{س} = ٥$ أو $\text{س} = -٤$

(ب) بفرض أن : المصفوفة منفردة $\therefore \Delta = ٠$

$\because ٣(١٢\text{س} - ٢\text{س} - ٢) + ١(٨\text{س} - ٤\text{س} - ٤)$ ،

$+ ٣(٤\text{س} - ١٢\text{س}) = ٣٠\text{س} - ٦ + ٤\text{س} - ٤ - ٢٤\text{س}$

$= ١٠\text{س} - ١٠ \quad \therefore ١٠\text{س} - ١٠ = ٠ \qquad \therefore \text{س} = ١$

(جـ) بفرض أن : المصفوفة منفردة $\therefore \Delta = ٠$

$\because (\text{س} + ٢)(٤ - ٥\text{س} - ٥) - ٢(٣ - ٣٥)$ ،

$+ ١(٣\text{س} + ٣ - ٢٨) = -٥\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٦٩$

$\therefore -٥\text{س}^٢ - ٨\text{س} + ٦٩ = ٠ \qquad \therefore ٥\text{س}^٢ + ٨\text{س} - ٦٩ = ٠$

$\therefore (\text{س} - ٣)(٥\text{س} + ٢٣) = ٠$

$\therefore \text{س} = ٣$ أو $\text{س} = -\frac{٢٣}{٥}$

(٦) أوجد المعكوس الضربى لكل من المصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (جـ) $\begin{pmatrix} \text{حا}\,\theta & -\text{حتا}\,\theta \\ \text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta \end{pmatrix}$

(ء) $\begin{pmatrix} \text{قا}\,\theta & \text{ظا}^٢\theta \\ ١ & \text{قا}\,\theta \end{pmatrix}$ (هـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (و) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

(ز) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ -٥ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (ح) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

الحل

(أ) $\because |\text{أ}| = ٢ \qquad \therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{٢}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix}$

(ب) $\because |\text{ب}| = ٩ \qquad \therefore \text{ب}^{-١} = \frac{١}{٩}\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٣}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{٣}\,I$

(جـ) $\because |\text{جـ}| = \text{حا}^٢\theta + \text{حتا}^٢\theta = ١ \qquad \therefore \text{جـ}^{-١} = \begin{pmatrix} \text{حا}\,\theta & \text{حتا}\,\theta \\ -\text{حتا}\,\theta & \text{حا}\,\theta \end{pmatrix}$

(ء) $\because |\text{ء}| = \text{قا}^٢\theta - \text{ظا}^٢\theta = ١ \qquad \therefore \text{ء}^{-١} = \begin{pmatrix} \text{قا}\,\theta & -\text{ظا}^٢\theta \\ -١ & \text{قا}\,\theta \end{pmatrix}$

(هـ) $\because |\text{هـ}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٢٧$ " على الصورة المثلثية "

$\overline{\text{هـ}}_{١١} = ٩$ ، $\overline{\text{هـ}}_{٢١} = ٠$ ، $\overline{\text{هـ}}_{٣١} = ٠$ ، $\overline{\text{هـ}}_{١٢} = ٠$ ، $\overline{\text{هـ}}_{٢٢} = ٩$ ،

$\overline{\text{هـ}}_{٣٢} = ٠$ ، $\overline{\text{هـ}}_{١٣} = ٠$ ، $\overline{\text{هـ}}_{٢٣} = ٠$ ، $\overline{\text{هـ}}_{٣٣} = ٩$

$\therefore$ م $= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ $\therefore$ هـ$^{مل} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\therefore$ هـ$^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\, I$

(و) $\because$ | و | $= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ " على الصورة المثلثية "

، $\overline{و}_{11} = 1$ ، $\overline{و}_{21} = 0$ ، $\overline{و}_{31} = -3$ ، $\overline{و}_{12} = -1$ ، $\overline{و}_{22} = 0$ ،
$\overline{و}_{32} = 0$ ، $\overline{و}_{13} = 0$ ، $\overline{و}_{23} = 0$ ، $\overline{و}_{33} = 1$

$\therefore$ م $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\therefore$ و$^{مل} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore$ و$^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ز) كما سبق حيث : | ز | $= 1$ ، ز$^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ح) كما سبق حيث : | ع | $= -18$ ، ع$^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(٧) إذا كان : أ $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، ب $= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

فحقق أن : (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ أ$^{-1}$

الحل

$\because$ | أ | $= 2$ ، | ب | $= 1$ $\therefore$ أ$^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ، ب$^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore$ ب$^{-1}$ أ$^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ (١)

، $\because$ أ ب $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ $\therefore$ | أ ب | $= 2$

$\therefore$ (أ ب)$^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : (أ ب)$^{-1}$ = ب$^{-1}$ أ$^{-1}$

(٨) إذا كان : أ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ فحقق أن : (أ^{مد})$^{-1}$ = (أ$^{-1}$)^{مد}

الحل

$\because$ أ$^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\therefore$ | أ^{مد} | $= 6$

، (أ^{مد})$^{مل} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\therefore$ (أ^{مد})$^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (١)

، $\because$ | أ | $= 6$ ، أ$^{مل} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\therefore \text{م}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} ٤ & ٦ & ٦ \\ ١ & -٣ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $(\text{م}^{-1})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٦ \\ ٠ & -٣ & ٦ \\ -٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $(\text{م}^{\text{مد}})^{-1} = (\text{م}^{-1})^{\text{مد}}$

(٩) إذا كان : $\text{م} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ فحقق أن : $(\text{م}^{٢})^{-1} = (\text{م}^{-1})^{٢}$

الحل

$\because \text{م}^{٢} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & -٣ \\ ٥ & -١ & ٠ \\ -٢ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & -١٢ & ١٧ \\ -١٥ & ٩ & -٣ \\ ٤ & ٤ & -٥ \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{م}^{٢}| = ٩٠٠$ ، $(\text{م}^{٢})^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٦٠ & ١٤٤ & ٩٦ \\ ١٩٥ & ٤٦٨ & ٨٧ \\ ١٥٠ & ١٢ & ٣٣ \end{pmatrix}$

$\therefore (\text{م}^{٢})^{-1} = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} ٦٠ & ١٤٤ & ٩٦ \\ ١٩٥ & ٤٦٨ & ٨٧ \\ ١٥٠ & ١٢ & ٣٣ \end{pmatrix}$ (١) ، $\because |\text{م}| = ٣٠$

، $\text{م}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} ٢٠ & ٨ & ٢ \\ ١٥ & ٦ & ٩ \\ -٥ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ $\therefore \text{م}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} ٢٠ & ٨ & ٢ \\ ١٥ & ٦ & ٩ \\ -٥ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$

، $(\text{م}^{-1})^{٢} = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} ٢٠ & ٨ & ٢ \\ ١٥ & ٦ & ٩ \\ -٥ & ٤ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢٠ & ٨ & ٢ \\ ١٥ & ٦ & ٩ \\ -٥ & ٤ & ١ \end{pmatrix} = \frac{1}{900}\begin{pmatrix} ٦٠ & ١٤٤ & ٩٦ \\ ١٩٥ & ٤٦٨ & ٨٧ \\ ١٥٠ & ١٢ & ٣٣ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : $(\text{م}^{٢})^{-1} = (\text{م}^{-1})^{٢}$

(١٠) إذا كان : $\text{م} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}$ فإثبت أن : $\text{م}^{٢} - ٧\text{م} - ٨\,I = \square$

حيث : $\square$ مصفوفة صفرية على نفس نظم ثم استخدم ذلك في ايجاد المعكوس الضربى للمصفوفة م

الحل

$\because \text{م}^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٢٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix}$

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{pmatrix} ١٤ & ٢٩ \\ ٣٦ & ٧٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٤ & ٢١ \\ ٢٨ & ٧٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٨ \\ ٨ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$

= الطرف الأيسر

$\because \text{م}^{٢} - ٧\text{م} - ٨\,I = \square$ ، $\therefore \text{م}^{٢} - ٧\text{م} = ٨\,I$

$\therefore \text{م}\,(\text{م} - ٧\,I) = ٨\,I$ ، بالقسمة ÷ ٨ ينتج :

$\frac{1}{8}\,\text{م}\,(\text{م} - ٧\,I) = I$ ، بالضرب من اليمين × م^{-1} ينتج :

$\frac{1}{8}\,\text{م}^{-1}\,\text{م}\,(\text{م} - ٧\,I) = I\,\text{م}^{-1}$ $\qquad$ $\frac{1}{8}\,I\,(\text{م} - ٧\,I) = \text{م}^{-1}$

أى أن : $\text{م}^{-1} = \frac{1}{8}\,(\text{م} - ٧\,I) = \frac{1}{8}\left[\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & ٧ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}\right]$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ -٣ & ١٠ \end{pmatrix}$

٣ – ٣ حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

تذكر ما يلى :

حل معادلتين آنيتين باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة :

إذا كان لدينا نظام من معادلتين خطيتين كالتالى :

$$\text{أ}_١\,\text{س} + \text{ب}_١\,\text{ص} = \text{ك}_١ \quad ، \quad \text{أ}_٢\,\text{س} + \text{ب}_٢\,\text{ص} = \text{ك}_٢$$

فإنه يمكن كتابتهما على الصورة :

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ك}_١ \\ \text{ك}_٢ \end{pmatrix}$$

فإذا فرضنا أن :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ج} = \begin{pmatrix} \text{ك}_١ \\ \text{ك}_٢ \end{pmatrix}$$

فإن : المعادلتين يمكن كتابتهما على صورة معادلة مصفوفية واحدة كما يلى : $\text{أ س} = \text{ج}$ حيث : أ هى مصفوفة المعاملات ، س هى مصفوفة المجاهيل ، ج هى مصفوفة الثوابت

و إذا كان : محدد أ $\neq ٠$ أى : $\text{أ}_١\,\text{ب}_٢ - \text{أ}_٢\,\text{ب}_١ \neq ٠$

فيكون من الممكن إيجاد حل المعادلة : $\text{أ س} = \text{ج}$ كما يلى :

$$\text{أ}^{-١}(\text{أ} \times \text{س}) = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$$

" بضرب طرفى المعادلة من اليمين فى $\text{أ}^{-١}$ "

$$\therefore (\text{أ}^{-١} \times \text{أ})\,\text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج} \qquad \therefore I\,\text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$$

$\therefore \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ج}$　　لأن : I عنصر محايد

و بهذا يتضح أنه يمكننا إيجاد المجهولين س ، ص بدلالة الثوابت $\text{أ}_١$ ، $\text{ب}_١$ ، $\text{ك}_١$ ، $\text{أ}_٢$ ، $\text{ب}_٢$ ، $\text{ك}_٢$

أنظمة المعادلات الخطية :

يمكن حل عدد (ن) من المعادلات الخطية التى تحتوى على (ن) من المتغيرات و التى لها حل وحيد باستخدام ضرب المصفوفات عندما تكون ن = ٢ أو ن = ٣

و باعتبار أن نظام المعادلات هو :

$$\text{أ}_١\,\text{س} + \text{ب}_١\,\text{ص} + \text{حـ}_١\,\text{ع} = \text{ء}_١$$

$$\text{أ}_٢\,\text{س} + \text{ب}_٢\,\text{ص} + \text{حـ}_٢\,\text{ع} = \text{ء}_٢$$

$$\text{أ}_٣\,\text{س} + \text{ب}_٣\,\text{ص} + \text{حـ}_٣\,\text{ع} = \text{ء}_٣$$

فنحصل على : $\text{أ س} = \text{ب}$

حيث :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_١ & \text{ب}_١ & \text{حـ}_١ \\ \text{أ}_٢ & \text{ب}_٢ & \text{حـ}_٢ \\ \text{أ}_٣ & \text{ب}_٣ & \text{حـ}_٣ \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} \text{ء}_١ \\ \text{ء}_٢ \\ \text{ء}_٣ \end{pmatrix}$$

مصفوفة :　　المعاملات　　المتغيرات　　الثوابت

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة :

يمكن حل المعادلة : $\text{أ س} = \text{ب}$ حيث : أ مصفوفة مربعة و غير منفردة أى أن : $|\text{أ}| \neq ٠$ ، عدد المعادلات الخطية = عدد المجاهيل

كما يلى : $\text{أ}^{-١}(\text{أ} \times \text{س}) = \text{أ}^{-١}\,\text{ب}$

" بضرب طرفى المعادلة من اليمين فى $\text{أ}^{-١}$ "

$$\therefore (\text{أ}^{-١} \times \text{أ})\,\text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب} \qquad \therefore I\,\text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب}$$

$\therefore \text{س} = \text{أ}^{-١}\,\text{ب}$　　لأن : I عنصر محايد

أحمد الشتوى

ملاحظة :

حل المعادلة المصفوفية : أ س = ب هو حاصل ضرب المعكوس الضربى لمصفوفة المعاملات فى مصفوفة الثوابت

مرتبة المصفوفة :

مرتبة المصفوفة غير الصفرية هى أعلى درجة لمحدد أو محدد أصغر للمصفوفة قيمته لا تساوى صفر

فإذا كانت : المصفوفة (أ) غير صفرية على النظم م × ن حيث :

م ≤ ن فإن : مرتبة المصفوفة (أ) يرمز لها بالرمز : ر (أ)

حيث : ١ ≤ ر (أ) ≤ ن

ملاحظات :

(١) إذا كان : م ≤ ن فإن : ١ ≤ ر (أ) ≤ م

(٢) مرتبة المصفوفة الصفرية = صفر

(٣) مرتبة مصفوفة الصف (أو العمود) غير الصفرية = ١

(٤) إذا كانت : I مصفوفة الوحدة على النظم م ≤ م فإن :

ر (I) = م لأن : | I | = ١

(٥) مرتبة المصفوفة (أ) = مرتبة (أ^مد)

(٥) إذا أضيف (أو حذف) صف (عمود) صفرى على المصفوفة فإن : رتبتها لا تتغير

(٦) إذا أضيف (أو حذف) صف (عمود) عبارة عن تجميع لعدة صفوف (أعمدة) فإن : رتبتها لا تتغير

(٧) كيفية ايجاد مرتبة المصفوفة :

[أ] لايجاد ر (أ) حيث : أ على النظم ٣ × ٣ مثلاً ، نوجد | أ |

١) فإذا كان : | أ | ≠ ٠ فإن : ر (أ) = ٣

٢) فإذا كان : | أ | = ٠ فإن : ر (أ) < ٣

لذا نوجد جميع المحددات من الرتبة (٢) فإذا كان :

أ} قيمة أحد هذه المحددات ≠ ٠ فإن : ر (أ) = ٢

ب} قيمة جميع هذه المحددات = ٠

فإن : ر (أ) < ٢ أى أن : ر (أ) = ١

[ب] لايجاد ر (أ) حيث : أ على النظم ٢ × ٣ مثلاً

نوجد جميع المحددات من الرتبة (٢) " لأن : أعلى درجة محدد يمكن تكوينه منها هو (٢) " فإذا كان :

١) قيمة أحد هذه المحددات ≠ ٠ فإن : ر (أ) = ٢

٢) قيمة جميع هذه المحددات = ٠

فإن : ر (أ) < ٢ أى أن : ر (أ) = ١

ملاحظة :

الخطوات السابقة هى نفس الخطوات لايجاد مرتبة أى مصفوفة بعد تغير نظم المصفوفة

المصفوفة الموسعة :

إذا كان لدينا م من المعادلات الخطية فى ن من المجاهيل فإنها تكتب على الصورة : أ س = ب فإنه يمكن تعريف المصفوفة الموسعة

أ* حيث : أ* = (أ | ب) و هى على النظم م × (ن + ١)

أحمد الشنتورى

فإذا كانت : $\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} = \text{ك}_1$ ، $\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} = \text{ك}_2$

فإن : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{cc|c} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ك}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ك}_2 \end{array}\right)$

نظام المعادلات الخطية المتجانسة و غير المتجانسة :

يقال أن نظام المعادلات الخطية متجانسة إذا كان :
كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت يساوى صفر

أى أن : $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ أما إذا كان : أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوى صفر فإن : نظام المعادلات يسمى معادلات خطية غير متجانسة
أما إذا كان أحد عناصر مصفوفة الثوابت لا يساوى صفر فإن نظام المعادلات الخطية تسمى معادلات خطية غير متجانسة

إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية :

أولاً : المعادلات غير المتجانسة

تسمى المعادلة : $\text{أ}_1\text{س}_1 + \text{أ}_2\text{س}_2 + ... + \text{أ}_\text{ن}\text{س}_\text{ن} = \text{ج}$

معادلة خطية غير متجانسة حيث : $\text{ج} \neq 0$.

و تسمى المجموعة : $\text{أ س} = \text{جـ}$ غير متجانسة

حيث : $\text{جـ} \neq \square$

و يكون لمجموعة المعادلات المكونة من ن معادلة غير متجانسة فى ن مجهولاً :

(١) حل وحيد إذا كان : $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) = \text{ن}$

(٢) عدد غير محدود من الحلول (عدد لا نهائى)

إذا كان : $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) = \text{ك}$ حيث : $\text{ك} < \text{ن}$

(٣) ليس لها حل على الاطلاق إذا كان : $\text{ر}(\text{أ}) \neq \text{ر}(\text{أ}^*)$

ملخص إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية غير المتجانسة فى ثلاثة مجاهيل :

نفرض أن مجموعة المعادلات هو :

$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{حـ}_1\text{ع} = \text{ك}_1$

$\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{حـ}_2\text{ع} = \text{ك}_2$

$\text{أ}_3\text{س} + \text{ب}_3\text{ص} + \text{حـ}_3\text{ع} = \text{ك}_3$ أى أن : $\text{أ س} = \text{ج}$

حيث : $\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} \text{ك}_1 \\ \text{ك}_2 \\ \text{ك}_3 \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 & \text{ك}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 & \text{ك}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 & \text{ك}_3 \end{array}\right)$

الجدول التالى يلخص إمكانية حل نظام هذه المعادلات :

ر (أ*)	ر (أ)	إمكانية الحل
٣	٣	يوجد حل وحيد
٣	٢	لا يوجد حل على الإطلاق
٣	١	لا يوجد حل على الإطلاق
٢	٢	يوجد عدد لا نهائى من الحلول
٢	١	لا يوجد حل على الإطلاق
١	١	يوجد عدد لا نهائى من الحلول

أحمد الشنتورى

ثانياً : المعادلات المتجانسة

تسمى المعادلة : $\text{أ}_1\text{س}_1 + \text{أ}_2\text{س}_2 + \dots + \text{أ}_\text{ن}\text{س}_\text{ن} = ٠$ معادلة خطية متجانسة

و تسمى المجموعة : أ س = $\boxed{}$ متجانسة

و تتميز المعادلات الخطية المتجانسة عن المعادلات غير المتجانسة بأنه دائماً مرتبة مصفوفة المعاملات أ هى نفسها مرتبة المصفوفة الموسعة

أى أن : $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*)$

و يكون لمجموعة المعادلات المكونة من ن معادلة متجانسة فى ن مجهولاً :

(١) حل وحيد إذا كان : $\text{ر}(\text{أ}) = \text{ر}(\text{أ}^*) = \text{ن}$

هو : $\text{س}_1 = \text{س}_2 = \dots = \text{س}_\text{ن} = ٠$

و يسمى بالحل الصفرى (البديهى لكونه شديد الوضوح)

(٢) عدد غير محدود من الحلول (عدد لا نهائى) بخلاف الحل الصفرى

إذا كان : $\text{ر}(\text{أ}) < \text{ن}$ ، $|\text{أ}| = ٠$

و يمكن استنتاج صورة الحل العام فى هذه الحالة كما يلى :

نفرض أن مجموعة المعادلات هو :

$\text{أ}_1\text{س} + \text{ب}_1\text{ص} + \text{حـ}_1\text{ع} = ٠$

$\text{أ}_2\text{س} + \text{ب}_2\text{ص} + \text{حـ}_2\text{ع} = ٠$

$\text{أ}_3\text{س} + \text{ب}_3\text{ص} + \text{حـ}_3\text{ع} = ٠$

، و أن : $\text{ر}(\text{أ}) = ٢$

∴ $\text{ر}(\text{أ}) < ٣$ " عدد المجاهيل "

∴ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول

و لايجاد صورة الحل نضع : س = ل " مثلاً "

و بالتعويض فى معادلتين من الثلاثة و حلهما معاً نحصل على قيمة كل من : ص ، ع بدلالة ل

و تكون صورة الحل العام هى قيمة : س ، ص ، ع

أى : للنظام عدد لا نهائى من الحلول على الصورة : (س ، ص ، ع) بدلالة ل

حل تمارين (٣ – ٣) صفحة ٩٥ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) من بين الأنظمة الخطية الآتية مجموعة المعادلات المتجانسة هى ....

(أ) ٢س + ص = ٣ ، س + ٢ص = ٢

(ب) س − ص = ٠ ، س + ٢ص = ١٣

(حـ) ٣س + ص = ١ ، ٢س + ص = ٠

(ء) س − ٢ص = ٠ ، ٣س + ص = ٠

(٢) إذا كان : $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ \\ ٤ \end{pmatrix}$ فإن : $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \dots$

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$ (حـ) $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

(٣) إذا كانت : $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & ١٦ \end{pmatrix}$ فإن : $\text{ر}(\text{أ}) = \dots$

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) ٣

(٤) مرتبة المصفوفة I_3 = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (حـ) ١ (ء) صفر

(٥) مرتبة المصفوفة $\boxed{}$ من النظم ٣ × ٣ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) ٣

(٦) إذا كان : $أ = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix}$ و كان : $ر(أ) = ٢$

فإن : ك = ...

(أ) -٢　(ب) صفر　(جـ) ٢　(د) ٦

(٧) إذا كان : م عدد المعادلات الخطية ، ن عدد المجاهيل فإن : المصفوفة الموسعة تكون على النظم ....

(أ) $م \times ن$　(ب) $م \times (ن + ١)$

(جـ) $(م + ١) \times ن$　(د) $(م + ١)(ن + ١)$

(٨) مرتبة المصفوفة الموسعة للنظام : $٢س - ٣ص = ٥$ ، $٦س - ٩ص = ١٥$ هى ....

(أ) صفر　(ب) ١　(جـ) ٢　(د) ٣

(٩) عدد حلول النظام : $٢س + ٥ص = ٠$ ، $٣س - ع = ٠$ ، $٢ص - ٣ع = ٠$ هو ....

(أ) الحل الصفرى فقط　(ب) صفر

(جـ) عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى

(د) عدد لا نهائى من الحلول بينها الحل الصفرى

(١٠) يوجد للنظام : $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & ٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \\ ٤ & -٢ & -٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \square$ ....

(أ) الحل البديهى فقط

(ب) عدد لا نهائى من الحلول بينها الحل الصفرى

(جـ) عدد نهائى من الحلول عدا الحل الصفرى

(د) لا يوجد حل على الإطلاق

الحل

(١) ∵ كل عنصر من عناصر مصفوفة الثوابت للنظام : $س - ٢ص = ٠$ ، $٣س + ص = ٠$ يساوى صفر ∴ مجموعة هذه المعادلات متجانسة

(٢) بفرض أن : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = ٥$ ، $أ^{-١} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$$∴ \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{٥}\begin{pmatrix} ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

(٣) ∵ أ مصفوفة على النظم ٢×٣

∴ أعلى درجة محدد يمكن تكوينه منها هو ٢ ، $١ \le ر(أ) \le ٢$

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ٤ & ١٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٨ & ١٦ \end{vmatrix} =$ صفر

∴ $ر(أ) < ٢$　　∴ $ر(أ) = ١$

(٤) ٣　　(٥) صفر

(٦) ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ك & ٠ & ١ \\ ٣ & ٢ & -١ \end{vmatrix} = -ك(٢ - ٦) - ١(٢ + ٦) = ٤ك - ٨$

، ∵ $ر(أ) = ٢$　　∴ $|أ| =$ صفر

∴ $٤ك - ٨ = ٠$　　و منها : $ك = ٢$

(٧) $م \times (ن + ١)$

(٨) $أ^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & -٣ & ٥ \\ ٦ & -٩ & ١٥ \end{array}\right)$ ، كما فى (٣) يكون : $ر(أ^{*}) = ١$

(٩) ∵ $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ & ٠ \\ ٣ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣×٣

∴ $١ \le ر(أ) \le ٣$

، $\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(0+2) - 5(-9-0) = 49 \neq 0$

$\therefore$ ر(أ) $= 3$ ، $\because$ مجموعة المعادلات متجانسة

، ر(أ) $= 3 =$ عدد المجاهيل $\therefore$ عدد حلول النظام هو الحل الصفرى فقط

(١٠) $\because \text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم 3×3

، $\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ لأن : $\text{ع}_2 = \text{ع}_3$

حيث : أخذت العوامل المشتركة ٢ ، ٣ من ع_2 ، ع_3 على الترتيب)

، $\because \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ $\therefore$ ر(أ) $= 2$

، $\because$ مجموعة المعادلات متجانسة ، ر(أ) $= 2 < 3$ (عدد المجاهيل)

$\therefore$ عدد حلول النظام هو عدد لا نهائى من الحلول بينها الحل الصفرى

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) حل المعادلات المصفوفية الأتية :

(أ) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$　　**(ب)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{أ} \\ \text{ب} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

(حـ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{حـ} \\ \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ء) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ب} \\ \text{حـ} \\ \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(هـ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(و) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

الحل

(أ) بفرض أن : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$　　$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

، $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= 8$ ، ص $= -12$

(ب) كما فى (أ) حيث : |ج| $= 7$ ، ج = مصفوفة المعاملات

و ينتج : أ $= 2$ ، ب $= 1$

(حـ) كما فى (أ) حيث : |أ| $= -2$ ، أ = مصفوفة المعاملات

و ينتج : حـ $= 5$ ، ء $= 2$

(ء) بفرض أن : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0+1) + 2(0-1) = -1 \neq 0$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى :

$\overline{\text{أ}_{11}} = 0 + 1 = 1$ ، $\overline{\text{أ}_{21}} = -(1+0) = -1$ ، $\overline{\text{أ}_{31}} = 0 - 1 = -1$ ،

$\overline{\text{أ}_{12}} = -(0-2) = 2$ ، $\overline{\text{أ}_{22}} = 0 - 2 = -2$ ، $\overline{\text{أ}_{32}} = -(1-0) = -1$ ،

$\overline{\text{أ}_{13}} = 0 - 2 = -2$ ، $\overline{\text{أ}_{23}} = -(-1-0) = 1$ ، $\overline{\text{أ}_{31}} = -3 + 2 = -1$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مد}} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{ب} \\ \text{حـ} \\ \text{ء} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

∴ ب = ٧ ، حـ = ٠ ، ء = −١

(هـ) كما فى (ء) حيث : |أ| = ٩ ، أ = مصفوفة المعاملات

و ينتج : س = ١ ، ص = −١ ، ع = ٢

(و) كما فى (ء) حيث : |أ| = ٦ ، أ = مصفوفة المعاملات

و ينتج : س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣

(١٢) أكتب المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الآتية ، ثم حل هذا النظام باستخدام طريقة معكوس المصفوفة (إن أمكن)

(أ) ٢س + ص + ع = ٠ ، ٣س + ٢ص + ٣ع = ١٢

، ٤س + ص + ٢ع = −١

(ب) س + ٣ص + ٢ع = ٠ ، س + ع = −١

، س + ٢ص = ٣

(حـ) ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، س + ص = −١

، ص + ٢ع = ٣

(ء) ٤س + ٣ص − ٥ع = ٦ ،

٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ ، س − ص + ع = ٢

الحل

(أ) $\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$ و لحل النظام نكتب المعادلة المصفوفية :

أ س~ = ب حيث : $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{س~} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

، $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(4-3) - 1(6-12) + 1(3-8) = 3$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى :

$\overline{\text{أ}_{11}} = 4 - 3 = 1$ ، $\overline{\text{أ}_{21}} = -(6-12) = 6$ ، $\overline{\text{أ}_{31}} = 3 - 8 = -5$ ،

$\overline{\text{أ}_{12}} = -(2-1) = -1$ ، $\overline{\text{أ}_{22}} = 4 - 4 = 0$ ، $\overline{\text{أ}_{32}} = -(2-4) = 2$ ،

$\overline{\text{أ}_{13}} = 3 - 2 = 1$ ، $\overline{\text{أ}_{23}} = -(6-3) = -3$ ، $\overline{\text{أ}_{31}} = 4 - 3 = 1$

∴ $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ 1 \\ \frac{23}{7} \end{pmatrix}$

∴ س = $-\frac{13}{2}$ ، ص = ١ ، ع = $\frac{23}{7}$

∴ مجموعة الحل = { $-\frac{13}{2}$ ، ١ ، $\frac{23}{7}$ }

(ب) كما فى (أ) حيث : $\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$ ، |أ| = ٥ ،

س = ١ ، ص = ١ ، ع = −٢

(جـ) كما فى (أ) حيث : أ* = $\left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & ١ & ٣ & ٠ \\ ١ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & ٢ & ٣ \end{array}\right)$ ، |أ| = ٥ ،

مجموعة الحل = { −٢ ، ١ ، ١ }

(ب) كما فى (أ) حيث : أ* = $\left(\begin{array}{ccc|c} ٤ & ٣ & -٥ & ٦ \\ ٣ & ٢ & ٤ & ١٢ \\ ١ & -١ & ١ & ٢ \end{array}\right)$ ، |أ| = ٥٢ ،

مجموعة الحل = { ٢ ، ١ ، ١ }

(١٣) بين أن للأنظمة الآتية حلاً صفرياً

(أ) ٢س + ٧ص + ٣ع = ٠ ، ٣س + ص − ٢ع = ٠ ، ٤س − ٣ص − ع = ٠

(ب) س − ٢ص + ٢ع = ٠ ، ٣س + ٤ع = ٠ ، ٦ع − ص = ٠

(جـ) س + ٢ص − ع = ٠ ، ٢س + ٣ص − ع = ٠ ، ٣س − ٤ص + ٢ع = ٠

الحل

(أ) ∵ مصفوفة المعاملات أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٣ \\ ٣ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & -١ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٧ & ٣ \\ ٣ & ١ & -٢ \\ ٤ & -٣ & -١ \end{vmatrix}$ = −٨٨ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣

، ∵ مجموعة المعادلات متجانسة ، ر(أ) = ٣ = عدد المجاهيل

∴ النظام له حل وحيد و هو الحل الصفرى

(ب) كما فى (أ) حيث : |أ| = ٣٤ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣

(جـ) كما فى (أ) حيث : |أ| = ٥ ≠ ٠ ∴ ر(أ) = ٣

(١٤) بين أن للأنظمة الآتية عدداً لا نهائياً من الحلول و أكتب صورة الحل

(أ) س + ٢ص + ٣ع = ٠ ، ٢س + ٣ص + ٥ع = ٠ ، ٣س − ص + ٢ع = ٠

(ب) ٢س − ص + ٣ع = ٠ ، ٤س − ٢ص + ٦ع = ٠ ، س + ٢ع = ٠

(جـ) ٣س − ٥ص − ٢ع = ٠ ، ٢س + ص + ٣ع = ٠ ، −س + ٣ص + ٢ع = ٠

الحل

(أ) ∵ مصفوفة المعاملات أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٠ ، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix}$ = −١ ≠ ٠

∴ ر(أ) = ر(أ*) = ٢ < ٣ (عدد المجاهيل)

، ∵ المعادلات متجانسة ∴ للنظام عدد لا نهائى من الحلول

، و لايجاد صورة الحل العام : نضع : س = ل

، و بالتعويض فى المعادلة الأولى ينتج : ل + ٢ص + ٣ع = ٠ (١)

، و بالتعويض فى المعادلة الثانية ينتج : ٢ل + ٣ص + ٥ع = ٠ (٢)

، بضرب (١) × −٣ ، (٢) × ٢ و جمعهما ينتج : ع = −ل

، و بالتعويض فى (١) ينتج : ص = ل

∴ للنظام عدد لا نهائى من الحلول على الصورة : (ل ، ل ، −ل)

(ب) كما فى (أ) حيث : ر(أ) = ر(أ*) = ٢ < ٣ (عدد المجاهيل)

، نضع : ع = ل ينتج : س = − ٢ ل ، ص = ل

∴ للنظام عدد لا نهائى من الحلول على الصورة : (− ٢ ل ، ل ، ل)

(حـ) كما فى (أ) حيث : ر(أ) = ر(أ*) = ٢ < ٣ (عدد المجاهيل)

، نضع : س = ل ينتج : ص = ل ، ع = − ل

∴ للنظام عدد لا نهائى من الحلول على الصورة : (ل ، ل ، − ل)

حل تمارين عامة صفحة ٩٩ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) $\begin{vmatrix} ٢٦ & ٢٥ & ٢٤ \\ ٢٩ & ٢٨ & ٢٧ \\ ٣٢ & ٣١ & ٣٠ \end{vmatrix} = ...$

(أ) صفر (ب) ١٢ (حـ) ٢٤ (ء) ٥٦

(٢) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٠ & ٥ & ٢ \\ ٠ & س & ٤ \\ ٥ & ٧ & س \end{vmatrix} =$ صفر هى ....

(أ) { ٢ } (ب) { ٥ } (حـ) { ٧ } (ء) { ١٠ }

(٣) $\begin{vmatrix} أ+حـ & ب+حـ & أ+ب \\ ب & أ & حـ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ...$

(أ) − ١ (ب) صفر (حـ) أ + ب + حـ (ء) أ ب حـ

(٤) فى الشكل المقابل : $\overline{ء هـ}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن : $\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ ء هـ & أ ء & أ هـ \\ ب حـ & أ ب & أ حـ \end{vmatrix} = ...$

(أ) ٧ (ب) ٦ (حـ) ٥ (ء) صفر

(٥) قيمة س التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & س - ١ \\ س + ١ & ٤ \end{pmatrix}$ منفردة هى ....

(أ) − ٣ (ب) ٣ (حـ) ± ٣ (ء) ٩

(٦) جميع المصفوفات الآتية ليس لها معكوس ضربى ما عدا المصفوفة :

(أ) $\begin{pmatrix} -٦ & ٣ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ (حـ) $\begin{pmatrix} -٨ & ٤ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ٥ & ١٠ \end{pmatrix}$

(٧) إذا كانت المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & ٤ & -٢ \\ -٩ & -٦ & ٣ \end{pmatrix}$ فإن : ر(أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (ء) ٣

الحل

(١) بإجراء : $ع_٢ - ع_١$ ، $ع_٣ - ع_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٢٤ \\ ٢ & ١ & ٢٧ \\ ٢ & ١ & ٣٠ \end{vmatrix} =$ صفر لأن : $ع_٣ = ٢ ع_٢$

(٢) بفك المحدد باستخدام $ع_٣$ ينتج : ٥ (٢ س − ٢٠) = ٠

∴ ٢ س − ٢٠ = ٠ و منها : س = ١٠ ∴ مجموعة الحل = { ١٠ }

(٣) بإجراء : $ع_٢ - ع_١$ ، $ع_٣ - ع_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} أ+ب & حـ - أ & حـ - ب \\ حـ & أ - حـ & ب - حـ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$ ، بإخراج العوامل المشتركة

(حـ − أ) ، (حـ − ب) من $ع_٢$ ، $ع_٣$ على الترتيب

∴ الطرف الأيمن = $(حـ - أ)(حـ - ب) \begin{vmatrix} أ+ب & ١ & ١ \\ حـ & -١ & -١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠$

(٤) ∵ $\overline{ءهـ} \parallel \overline{بحـ}$ ∴ △ أءهـ ~ △ أبحـ

و ينتج : $\frac{أء}{أب} = \frac{ءهـ}{بحـ} = \frac{أهـ}{أحـ} = ك$

و منها : أء = ك أب ، ءهـ = ك بحـ ، أهـ = ك أحـ

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ ك بحـ & ك أب & ك أحـ \\ بحـ & أب & أحـ \end{vmatrix}$ ، بإخراج ك عامل مشترك من $ص_٢$

∴ الطرف الأيمن = ك $\begin{vmatrix} ٥ & ٦ & ٧ \\ بحـ & أب & أحـ \\ بحـ & أب & أحـ \end{vmatrix}$ = صفر لأن : $ص_٢ = ص_٣$

(٥) ∵ المصفوفة منفردة ∴ محددها = ٠

∴ $\begin{vmatrix} س - ١ & ٢ \\ ٤ & س + ١ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $س^٢ - ١ - ٨ = ٠$

∴ $س^٢ - ٩ = ٠$ و منها : $س = \pm ٣$

(٦) بإيجاد محدد كل مصفوفة نجد أن : $| ء | = - ٤٠ \neq ٠$

و باقى المصفوفات محددها = ٠ . " أحسب أو لاحظ بنفسك "

∴ المصفوفة ء غير منفردة أى لها معكوس ضربى

∴ جميع المصفوفات ليس لها معكوس ضربى ماعدا المصفوفة ء

(٧) $| أ | = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ ٣ & -٦ & -٩ \end{vmatrix} = (- ٦) \begin{vmatrix} ١ & -٢ & -٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \\ ١ & -٢ & -٣ \end{vmatrix} = ٠$

بإخراج : العوامل المشتركة (− ٢) ، (٣) من $ص_٢$ ، $ص_٣$ على الترتيب

∴ $ص_١ = ص_٢ = ص_٣$ ∴ جميع المحددات من الدرجة الثانية = ٠ أيضاً

∴ ر (أ) = ١

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

بدون فك أى من المحددات الآتية أثبت أن :

(٨) $\begin{vmatrix} ١ & ب & حـ \\ ب & ١ + ب^٢ & ب حـ \\ حـ & ب حـ & ١ + حـ^٢ \end{vmatrix} = ١$

(٩) $\begin{vmatrix} ١ & ب حـ & أ ب + أ حـ \\ ١ & أ حـ & أ ب + ب حـ \\ ١ & أ ب & ب حـ + أ حـ \end{vmatrix} = صفر$

(١٠) $\begin{vmatrix} س + ص + ٢ & س & ص \\ ١ & ٢ س + ص + ١ & ص \\ ١ & س & س + ٢ ص + ١ \end{vmatrix} = ٢ (س + ص + ١)^٣$

(١١) $\begin{vmatrix} ١ & ١ & س \\ - ٢ س + ٢ س^٢ & ١ + ٢ س^٢ & ٢ س^٣ \\ - ٣ + ٢ س^٢ & ٣ س^٢ & ١ + ٣ س^٣ \end{vmatrix} = ١ + ٥ س + س^٣$

(١٢) $\begin{vmatrix} س + أ & س + أ & ٢ أ \\ أ & س & أ \\ ٠ & أ - س & س - أ \end{vmatrix} = (س + ٢ أ) (س - أ)^٢$

(١٣) $\begin{vmatrix} ١ & أ & ب حـ \\ ١ & ب & حـ أ \\ ١ & حـ & أ ب \end{vmatrix} = (أ - ب) (ب - حـ) (حـ - أ)$

الحل

(٨) بإجراء : $\text{ص}_٢ - \text{ب}\,\text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{حـ}\,\text{ص}_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب} & \text{حـ} \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} = ١ =$ الطرف الأيسر
" المحدد على الصورة المثلثية "

(٩) بإجراء : $\text{ع}_٣ + \text{ع}_٢$ ∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & \text{ب حـ} & \text{ٲب} + \text{ب حـ} + \text{ٲحـ} \\ ١ & \text{حـ ٲ} & \text{ٲب} + \text{ب حـ} + \text{ٲحـ} \\ ١ & \text{ٲ ب} & \text{ٲب} + \text{ب حـ} + \text{ٲحـ} \end{vmatrix}$

بإخراج : (ٲب + ب حـ + ٲ حـ) عامل مشترك من $\text{ع}_٣$

∴ الطرف الأيمن = $(\text{ٲب} + \text{ب حـ} + \text{ٲحـ}) \begin{vmatrix} ١ & \text{ب حـ} & ١ \\ ١ & \text{حـ ٲ} & ١ \\ ١ & \text{ٲ ب} & ١ \end{vmatrix} = ٠ =$ الطرف الأيسر

لأن : $\text{ع}_١ = \text{ع}_٣$

(١٠) بإجراء : $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢(\text{س} + \text{ص} + ١) & \text{س} & \text{ص} \\ ٢(\text{س} + \text{ص} + ١) & ٢\text{س} + \text{ص} + ١ & \text{ص} \\ ٢(\text{س} + \text{ص} + ١) & \text{س} & \text{س} + ٢\text{ص} + ١ \end{vmatrix}$

بإخراج : ٢ (س + ص + ١) عامل مشترك من $\text{ع}_١$

∴ الطرف الأيمن = $٢(\text{س} + \text{ص} + ١) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ ١ & ٢\text{س} + \text{ص} + ١ & \text{ص} \\ ١ & \text{س} & \text{س} + ٢\text{ص} + ١ \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$

∴ الطرف الأيمن = $٢(\text{س} + \text{ص} + ١) \begin{vmatrix} ١ & \text{س} & \text{ص} \\ ٠ & \text{س} + \text{ص} + ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س} + \text{ص} + ١ \end{vmatrix}$
" المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = $٢(\text{س} + \text{ص} + ١)^٣ =$ الطرف الأيسر

(١١) بإجراء : $\text{ع}_٢ - \text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٣ - \text{س}\,\text{ع}_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -٢\text{س} + ٢\text{س}^٢ & ١ + ٢\text{س} & ٢\text{س}^٢ \\ -٣ + ٢\text{س}^٢ & ٣ + \text{س}^٢ & ١ + ٣\text{س} + \text{س}^٣ \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ع}_٣ - \text{س}\,\text{ع}_٢$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -٢\text{س} + ٢\text{س}^٢ & ١ + ٢\text{س} & -\text{س} \\ -٣ + ٢\text{س}^٢ & ٣ + \text{س}^٢ & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ص}_٢ + \text{س}\,\text{ص}_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ -٢\text{س} + ٢\text{س}^٢ & ١ + ٥\text{س} + \text{س}^٣ & ٠ \\ -٣ + ٢\text{س}^٢ & ٣ + \text{س}^٢ & ١ \end{vmatrix}$

" المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = $١ + ٥\text{س} + \text{س}^٣ =$ الطرف الأيسر

(١٢) بإجراء : $\text{ص}_١ + \text{ص}_٢ + \text{ص}_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س} + ٢\text{ٲ} & \text{س} + ٢\text{ٲ} & \text{س} + ٢\text{ٲ} \\ \text{ٲ} & \text{س} & \text{ٲ} \\ ٠ & \text{ٲ} - \text{س} & \text{س} - \text{ٲ} \end{vmatrix}$

بإخراج : (س + ٢ ٲ) عامل مشترك من $\text{ص}_١$

∴ الطرف الأيمن = $(\text{س} + ٢\text{ٲ}) \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ \text{ٲ} & \text{س} & \text{ٲ} \\ ٠ & \text{ٲ} - \text{س} & \text{س} - \text{ٲ} \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ع}_٢ - \text{ع}_١$ ، $\text{ع}_٣ - \text{ع}_١$

∴ الطرف الأيمن = (س + ٢ أ) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٠} & \text{٠} \\ \text{أ} & \text{س} - \text{أ} & \text{٠} \\ \text{٠} & \text{أ} - \text{س} & \text{س} - \text{أ} \end{vmatrix}$ " المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = (س + ٢ أ) $(\text{س} - \text{أ})^2$ = الطرف الأيسر

(١٣) بإجراء : $\text{ص}_2 - \text{ص}_1$ ، $\text{ص}_3 - \text{ص}_1$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{ب حـ} \\ \text{٠} & \text{ب} - \text{أ} & \text{حـ}(\text{أ} - \text{ب}) \\ \text{٠} & \text{حـ} - \text{أ} & \text{ب}(\text{أ} - \text{حـ}) \end{vmatrix}$

بإخراج : (أ − ب) (حـ − أ) عوامل مشتركة من ع_2 ، ع_3 على الترتيب

∴ الطرف الأيمن = (أ − ب) (حـ − أ) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{ب حـ} \\ \text{٠} & -\text{١} & \text{حـ} \\ \text{٠} & \text{١} & -\text{ب} \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ص}_3 + \text{ص}_2$

∴ الطرف الأيمن = (أ − ب) (حـ − أ) $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{أ} & \text{ب حـ} \\ \text{٠} & -\text{١} & \text{حـ} \\ \text{٠} & \text{٠} & \text{حـ} - \text{ب} \end{vmatrix}$ " المحدد على الصورة المثلثية "

∴ الطرف الأيمن = (أ − ب) (حـ − أ) (ب − حـ) = الطرف الأيسر

(١٤) إذا كان (س − ١) أحد عوامل المحدد $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{س} + \text{١} \\ -\text{١} & \text{١} & \text{س} + \text{ك} \end{vmatrix}$ أوجد قيمة ك

الحل

∵ (س − ١) أحد عوامل المحدد ∴ عندما : س = ١ فإن : $\triangle$ = ٠

∴ $\begin{vmatrix} \text{٠} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & \text{١} & \text{٢} \\ -\text{١} & \text{١} & \text{١} + \text{ك} \end{vmatrix}$ = ٠ ، بفك المحدد باستخدام عناصر ص_1

∴ − ١ (١ + ك + ٢) + ١ (١ + ١) = ٠

∴ − ١ − ك − ٢ + ٢ = ٠ و منها : ك = − ١

(١٥) أوجد قيمة ك بحيث تكون س عاملاً للمحدد $\begin{vmatrix} \text{س} + \text{١} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{س} & \text{٢} & \text{١} \end{vmatrix}$

الحل

∵ س أحد عوامل المحدد ∴ عندما : س = ٠ فإن : $\triangle$ = ٠

∴ $\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{ك} & \text{٢} & \text{٣} \\ \text{٠} & \text{٢} & \text{١} \end{vmatrix}$ = ٠ ، بفك المحدد باستخدام عناصر ع_1

∴ ١ (٢ − ٦) − ك (٣ − ٢) = ٠

∴ − ٤ − ك = ٠ و منها : ك = − ٤

ثالثاً : أبحث إمكانية حل كل من المعادلات الآتية و أوجد الحل إن وجد :

(١٦) س + ٢ ص + ع = ٣ ، ٤ س − ٢ ص − ع = ٦ ، س + ص + ٣ ع = ١٠

(١٧) س + ص + ع = ١ ، ٢ س − ص + ٣ ع = − ٥ ، ٣ س + ٢ ص + ٣ ع = صفر

(١٨) س + ٢ ص − ٣ ع = ٠ ، ع − س − ٢ ص = ٠ ، ٢ س + ٤ ص − ٦ ع = ٠

(١٩) $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{١} & -\text{١} & \text{٠} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{١} \\ \text{٠} \\ \text{٣} \end{pmatrix}$

(٢٠) $\begin{pmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١} & -\text{٣} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{٢} & \text{١} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{٢} \\ \text{٦} \\ \text{٣} \end{pmatrix}$

(٢١) $\begin{pmatrix} \text{٢} & -\text{٤} & -\text{٦} \\ -\text{١} & \text{٢} & \text{٣} \\ -\text{٣} & \text{٦} & \text{٩} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{١} \\ \text{٠} \\ -\text{١} \end{pmatrix}$

الحل

(١٦) ∵ المعادلة المصفوفية هى : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

حيث : مصفوفة المعاملات $أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

و هى على النظم ٣ × ٣ ، و غير صفرية

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-3+1) - 2(12+1) + 1(4+1) = -23 \neq 0$

∴ $ر(أ) = 3$

، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 10 \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤ و غير صفرية

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه منها هى : ٣ ، حيث أن :

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 2(-10-18) - 1(-10-6) + 3(-3+1) = -26 \neq 0$

∴ $ر(أ^*) = 3$ ∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = 3$ (عدد المجاهيل)

، ∵ المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد و لايجاد الحل نوجد العوامل المرافقة لعناصر أ هى :

$أ_{11} = -3+1 = -2$ ، $أ_{12} = -(12+1) = -13$ ، $أ_{13} = 4+1 = 5$ ،

$أ_{21} = -(6-1) = -5$ ، $أ_{22} = 3-1 = 2$ ، $أ_{23} = -(1-2) = 1$ ،

$أ_{31} = -2+1 = -1$ ، $أ_{32} = -(-1-4) = 5$ ، $أ_{33} = -1-8 = -9$

∴ $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -13 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ ، $أ^{-1} = -\frac{1}{23} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -13 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = -\frac{1}{23} \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -13 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = –١ ، ع = ٣ ∴ مجموعة الحل = { ٢ ، –١ ، ٣ }

(١٧) كما فى (١٦) حيث : أ مصفوفة المعاملات ، $|أ| = 1 \neq 0$.

، $ر(أ^*) = 3$ ∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = 3$ (عدد المجاهيل)

، $أ^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ، ∵ المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد ، مجموعة الحل = { –٤ ، ٣ ، ٢ }

(١٨) ∵ مصفوفة المعاملات $أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ٣

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 0$ ، ∵ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = 2 < 3$ (عدد المجاهيل)

، ∵ المعادلات متجانسة ∴ للنظام عدد لا نهائى من الحلول

، و لايجاد صورة الحل العام : نضع : ص = ل

، و بالتعويض فى المعادلة الأولى ينتج : $س + 2ل - 3ع = 0$ (١)

، و بالتعويض فى المعادلة الثانية ينتج : $ع - س - 2ل = 0$ (٢)

، بجمع (١) ، (٢) ينتج : $ع = 0$.

، و بالتعويض فى (١) ينتج : $س = -2ل$

∴ للنظام عدد لا نهائى من الحلول على الصورة : (– ٢ ل ، ل ، ٠)

(١٩) كما فى **(١٦)** حيث : أ مصفوفة المعاملات ، $|أ| = -١ \neq ٠$.

، $ر(أ^*) = ٣$ ∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = ٣$ (عدد المجاهيل)

، $أ^{-1} = -١ \begin{pmatrix} -١ & -١ & ٢ \\ ٠ & -١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -٥ \end{pmatrix}$ ، ∵ المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد ، مجموعة الحل = { ١ ، – ٢ ، ٢ }

(٢٠) كما فى **(١٦)** حيث : أ مصفوفة المعاملات ، $|أ| = ٨ \neq ٠$.

، $ر(أ^*) = ٣$ ∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = ٣$ (عدد المجاهيل)

، $أ^{-1} = \frac{١}{٨} \begin{pmatrix} ٤ & ١ & -٥ \\ ٠ & -٢ & ٢ \\ -٤ & ١ & ١١ \end{pmatrix}$ ، ∵ المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد ، مجموعة الحل = { ١ ، – ٢ ، ٢ }

(٢١) ∵ أ مصفوفة المعاملات على النظم ٣ × ٣

، $|أ| = \begin{vmatrix} -٩ & -٤ & ٢ \\ ٣ & ٢ & -١ \\ ٩ & ٦ & -٣ \end{vmatrix} = ٠$ ، ∵ $\begin{vmatrix} -٩ & -٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = ٦ \neq ٠$.

∴ $ر(أ) = ٢$

، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{c|ccc} ١ & -٩ & -٤ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٢ & -١ \\ -١ & ٩ & ٦ & -٣ \end{array}\right)$ على النظم ٣ × ٤ و غير صفرية

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه منها هى : ٣ ، حيث أن :

$\begin{vmatrix} ١ & -٩ & -٤ \\ ٠ & ٣ & ٢ \\ -١ & ٩ & ٦ \end{vmatrix} = -٦ \neq ٠$ ، $ر(أ^*) = ٣$

∴ $ر(أ) \neq ر(أ^*)$

، ∵ المعادلات متجانسة ∴ المعادلات ليس لها حل على الإطلاق

حل اختبار تراكمى صفحة ١٠٢ بالكتاب المدرسى

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : $\begin{vmatrix} حـ & ب & أ \\ و & هـ & ء \\ ع & ص & س \end{vmatrix} = ٢$ فإن : $\begin{vmatrix} حـ & ب & ٥أ \\ و & هـ & ٥ء \\ ٥ع & ٥ص & ٣٥س \end{vmatrix} = ...$

(أ) ٧٠٠   (ب) ١٠   (حـ) ٣٥   (ء) ٧٠

(٢) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ١٧ & -٦٧ \end{pmatrix}$ و كان :

أ × ع = ب   فإن : ع = ...

(أ) $\begin{pmatrix} ١ & -٨ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} ٤ & -١١ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$ (حـ) $\begin{pmatrix} ٤ & -١٧ \\ -١ & ٦ \end{pmatrix}$ (ء) $\begin{pmatrix} ٦ & -٩ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

(٣) تكون المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ٢ \\ ٨ & أ \end{pmatrix}$ منفردة إذا كان : أ = ...

(أ) – ٤   (ب) ٤   (حـ) ± ٤   (ء) ١٦

(٤) إذا كان : $أ^{-1} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ و كان : $أ \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

فإن : ص = ...

(أ) ٥   (ب) ٦   (حـ) ٧   (ء) ٨

(٥) $\begin{vmatrix} حـ & ٥ & أ+ب \\ أ & ٥ & ب+حـ \\ ب & ٥ & أ+حـ \end{vmatrix} = ...$

(أ) ٥   (ب) ٤   (حـ) ٣   (ء) صفر

(٦) إذا كان للمعادلات : س + ٢ ص + ٣ ع = ٥ ، ٢ س − ٣ ص + ك ع = ١٣ ، ٥ س + ك ص + ٢ ع = ٣
حل وحيد فإن : ك ∈ ....

(أ) ح (ب) ح − { −١ }
(جـ) ح − { ١٣ } (د) ح − { −١ ، ١٣ }

(٧) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{pmatrix}$ فإن : ر (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

(٨) إذا كان : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{pmatrix}$ فإن : ر ($أ^{مد}$) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

الحل

(١) بإخراج العوامل المشتركة : ٥ ، ٧ من $ع_١$ ، $ص_٣$ على الترتيب

$$\Delta = ٥ \times ٧ \begin{vmatrix} أ & ب & جـ \\ ء & هـ & و \\ س & ص & ع \end{vmatrix} = ٥ \times ٧ \times ٢ = ٧٠$$

(٢) ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = ٦ - ٢٥ = -١٩$

∴ $أ^{-١} = -\frac{١}{١٩}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

∴ $ع = أ^{-١} ب = -\frac{١}{١٩}\begin{pmatrix} ٣ & -٥ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -٤ & ٣ \\ -٦٧ & ١٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٧ & ٤ \\ ٦ & -١ \end{pmatrix}$

(٣) ∵ المصفوفة منفردة ∴ محددها = صفر

∴ $\begin{vmatrix} ٢ & أ \\ أ & ٨ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ $أ^٢ - ١٦ = ٠$ و منها : $أ = \pm ٤$

(٤) $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٧ \end{pmatrix}$ ∴ ص = ٧

(٥) بإجراء : $ع_١ + ع_٣$ ∴ $\Delta = \begin{vmatrix} أ+ب+جـ & ٥ & جـ \\ أ+ب+جـ & ٥ & أ \\ أ+ب+جـ & ٥ & ب \end{vmatrix}$

بإخراج : العوامل المشتركة (أ+ب+جـ) ، (٥) من $ع_١$ ، $ع_٢$ على الترتيب

∴ $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & جـ \\ ١ & ١ & أ \\ ١ & ١ & ب \end{vmatrix} =$ صفر لأن : $ع_١ = ع_٢$

(٦) ∵ للمعادلات حل وحيد ∴ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٣ (عدد المجاهيل)

حيث : أ مصفوفة المعاملات ، $|أ| \neq ٠$

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & -٣ & ك \\ ٣ & ك & ٢ \end{vmatrix} \neq ٠$

∴ $١(-٦ - ك^٢) - ٢(٤ - ٣ك) + ٣(٢ك + ٩) \neq ٠$

∴ $-٦ - ك^٢ - ٨ + ٦ك + ٦ك + ٢٧ \neq ٠$

∴ $-ك^٢ + ١٢ك + ١٣ \neq ٠$ و منها $ك^٢ - ١٢ك - ١٣ \neq ٠$

∴ $(ك - ١٣)(ك + ١) \neq ٠$ ∴ $ك \neq ١٣$ أ، $ك \neq -١$

∴ ك ∈ ح − { −١ ، ١٣ }

(٧) ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ -٢ & -٣ & ١ \\ ٦ & ٩ & -٣ \end{vmatrix} = ٦ \begin{vmatrix} -١ & -١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ -٣ & -٣ & -٣ \end{vmatrix} =$ صفر

بإخراج : العوامل المشتركة (– ٢) ، (– ٣) من $ع_١$ ، $ع_٢$ على الترتيب

∴ $ع_١ = ع_٢ = ع_٣$ ∴ جميع المحددات من الدرجة الثانية = ٠ . أيضاً

∴ $ر(أ) = ١$

(٨) ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= ١(٠+٤) - ١(-١-٤) + ٣(٢-٠) = ١٥ = ٠$

∴ $ر(أ^{مد}) = ر(أ) = ٣$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

(٩) بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} ٣س & ٣س & ٣س \\ ١ & ب & أ \\ أ+ب & أ+١ & ب+١ \end{vmatrix} =$ صفر

الحل

بإجراء : $ع_٢ - ع_١$ ، $ع_٣ - ع_١$

∴ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ٣س & ٠ & ٠ \\ ١ & ب-١ & أ-١ \\ أ+ب & ١-ب & ١-أ \end{vmatrix}$

، بإخراج العوامل المشتركة (ب – ١) ، (أ – ١) من $ع_٢$ ، $ع_٣$ على الترتيب

∴ الطرف الأيمن $= (ب-١)(أ-١) \begin{vmatrix} ٣س & ٠ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \\ أ+ب & -١ & -١ \end{vmatrix}$

، ∵ $ع_٢ = ع_٣$ ∴ الطرف الأيمن = صفر = الطرف الأيسر

(١٠) أحسب مرتبة المصفوفة : $أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٥ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{pmatrix}$

الحل

∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٥ \\ ٤ & ٥ & -١ \end{vmatrix} = ٢(-٤+٢٥) + ١(١+٢٠) + ٣(-٥-١٦) = ٠$

، المصفوفة أ على النظم ٣ × ٣ و غير صفرية ∴ $ر(أ) < ٣$

، ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ -١ & ٤ \end{vmatrix} = ٨ - ١ = ٧ \neq ٠$ ∴ $ر(أ) < ٢$

(١١) بدون فك المحدد أثبت أن : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١+ص & ١ & ١ \\ ١ & ١+ص & ١ \end{vmatrix} = ص^٢$

الحل

بإجراء : $ص_٢ - ص_١$ ، $ص_٣ - ص_١$ ، بتبديل : $ع_١$ ، $ع_٢$ ثم تبديل $ع_٢$ ، $ع_٣$

∴ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ص & ٠ & ٠ \\ ٠ & ص & ٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٠ & ص & ٠ \\ ٠ & ٠ & ص \end{vmatrix} = ص^٢$

(١٢) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفات حل المعادلات الآتية :

$٢س - ٢ص - ع = ٣$ ، $٣س + ص = ٥$ ،

$س + ص + ٢ع = ٩$

الحل

نكتب المعادلة المصفوفية : أ س~ = ب

حيث : أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، س~ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \\ ٩ \end{pmatrix}$

، |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٢ & -١ \\ ٣ & ١ & ٠ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٢ (٢ − ٠) − ٢ (٦ − ٠) + ١ (٣ − ١) = −١٠

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى :

أ١١ = ٢ − ٠ = ٢ ، أ١٢ = −(٦ − ٠) = −٦ ، أ١٣ = ٣ − ١ = ٢ ،

أ٢١ = −(٤ + ١) = −٥ ، أ٢٢ = ٤ + ١ = ٥ ، أ٢٣ = −(٢ − ٢) = ٠ ،

أ٣١ = ٠ + ١ = ١ ، أ٣٢ = −(٠ + ٣) = −٣ ، أ٣٣ = ٢ − ٦ = −٤

∴ أ^مل = $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ -٦ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{pmatrix}$ ، أ^{-١} = $-\frac{١}{١٠}$ $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ -٦ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ = $-\frac{١}{١٠}$ $\begin{pmatrix} ٢ & -٥ & ١ \\ -٦ & ٥ & -٣ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \\ ٩ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٣ ، ٣ }

(١٣) باستخدام خواص المحددات أثبت أن :

$\begin{vmatrix} أ + س & س & س \\ س & ب + س & س \\ س & س & حـ + س \end{vmatrix}$ = أ ب حـ + س (أ ب + ب حـ + أ حـ)

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر ع١)

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س & س & س \\ س & ب + س & س \\ س & س & حـ + س \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} أ & س & س \\ ٠ & ب + س & س \\ ٠ & س & حـ + س \end{vmatrix}$

بإجراء : ص٢ − ص١ ، ص٣ − ص١

، بكتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر ع٢)

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س & س & س \\ ٠ & ب & ٠ \\ ٠ & ٠ & حـ \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} أ & ٠ & س \\ ٠ & ب & س \\ ٠ & ٠ & حـ + س \end{vmatrix}$ + $\begin{vmatrix} أ & س & س \\ ٠ & س & س \\ ٠ & س & حـ + س \end{vmatrix}$

كلا المحددين الأول و الثانى على الصورة المثلثية ،

بإجراء : ص٣ − ص٢ بالمحدد الثالث

∴ الطرف الأيمن = س ب حـ + أ ب (حـ + س) + $\begin{vmatrix} أ & س & س \\ ٠ & س & س \\ ٠ & ٠ & حـ \end{vmatrix}$

، المحدد على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن = س ب حـ + أ ب (حـ + س) + أ حـ س

= س ب حـ + أ ب حـ + أ ب س + أ حـ س

= أ ب حـ + س (أ ب + ب حـ + أ حـ) = الطرف الأيسر

(١٤) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية :

س − ص + ع = ٢ ، ٢ س + ٣ ص − ع = ٥ ،

٣ س − ٥ ص + ٢ ع = −١

الحل

∵ مصفوفة المعاملات أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٣ ، و غير صفرية

∴ $|أ| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-5) + 1(4+3) + 1(-10-9) = -13 \neq 0$ ∴ $ر(أ) = 3$

، ∵ $أ^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right)$ على النظم 3×4 و غير صفرية

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه منها هى : ٣ ، حيث أن :

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1(1-10) - 1(-3+25) + 2(6-5) = -11 \neq 0$

∴ $ر(أ^*) = 3$ ∴ $ر(أ) = ر(أ^*) = 3$ (عدد المجاهيل)

، ∵ المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

(١٥) إذا كان : $\begin{vmatrix} س & ص & ع+2 \\ س & ص+2 & ع \\ س+2 & ص & ع \end{vmatrix} = -4$

أوجد قيمة : س + ص + ع

الحل

بإجراء : $ع_1 + ع_2 + ع_3$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س+ص+ع+2 & ص & ع+2 \\ س+ص+ع+2 & ص+2 & ع \\ س+ص+ع+2 & ص & ع \end{vmatrix}$

بإخراج (س + ص + ع + ٢) عامل مشترك من $ع_1$

∴ الطرف الأيمن = (س + ص + ع + ٢) $\begin{vmatrix} 1 & ص & ع+2 \\ 1 & ص+2 & ع \\ 1 & ص & ع \end{vmatrix}$

بإجراء : $ص_2 - ص_1$ ، $ص_3 - ص_1$

∴ الطرف الأيمن = (س + ص + ع + ٢) $\begin{vmatrix} 1 & ص & ع+2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

، و لأن : المحدد على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن = (س + ص + ع + ٢) × (−٤)

∴ (س + ص + ع + ٢) × (−٤) = −٤

∴ س + ص + ع + ٢ = ١ ∴ س + ص + ع = −١

(١٦) بين أياً من المصفوفات الآتية منفردة و أيها غير منفردة :

(أ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ (ب) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ (د) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

الحل

(أ) ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17 \neq 0$ ∴ المصفوفة غير منفردة

(ب) ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 32 = 0$ ∴ المصفوفة منفردة

(حـ) ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٠ & -٤ \end{vmatrix} = ١(-٤ - ٠) - ١(٠ + ٢) + ٣(٠ - ٢) = -١٢$

∴ $\Delta = -١٢ \neq ٠$ ∴ المصفوفة غير منفردة

(ء) ∵ $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٣ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$ (لأن : $ع_١ = ع_٢$) ∴ المصفوفة منفردة

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} س & ١ & ٢ \\ ٠ & س & ٣ \\ ٠ & ٠ & س \end{vmatrix} - ٨ = ٠$ فى ح هى ....

الحل

∵ المحدد على الصورة القطرية ∴ $\Delta = س^٣$

∴ المعادلة هى : $س^٣ - ٨ = ٠$ ∴ $س^٣ = ٨$ ∴ $س = ٢$

∴ مجموعة الحل = { ٢ }

السؤال الرابع :

(أ) أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٥ & ٢١ \end{pmatrix}$

الحل

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٥ & ٢١ \end{vmatrix} = ١(-٦٣ - ٥) + ١(٤٢ - ١) + ٢(١٠ + ٣) = -١$

العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ}_{١١} = -٦٣ - ٥ = -٦٨$ ،

$\overline{أ}_{٢١} = -(٤٢ - ١) = -٤١$ ، $\overline{أ}_{٣١} = ١٠ + ٣ = ١٣$ ،

$\overline{أ}_{١٢} = -(٢١ - ١٠) = ٣١$ ، $\overline{أ}_{٢٢} = ٢١ - ٢ = ١٩$ ، $\overline{أ}_{٣٢} = -(٥ + ١) = -٦$ ،

$\overline{أ}_{١٣} = ١ + ٤ = ٥$ ، $\overline{أ}_{٢٣} = -(١ - ٤) = ٣$ ، $\overline{أ}_{٣١} = -٣ + ٢ = -١$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٦٨ & -٤١ & ١٣ \\ ٣١ & ١٩ & -٦ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{-١} \begin{pmatrix} -٦٨ & ٣١ & ٥ \\ -٤١ & ١٩ & ٣ \\ ١٣ & -٦ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦٨ & -٣١ & -٥ \\ ٤١ & -١٩ & -٣ \\ -١٣ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$

السؤال الخامس :

(أ) حل المعادلات الآتية : س + ٣ ص + ٢ ع = ١٣ ، ٢ س − ص + ع = ٣ ، ٣ س + ص − ع = ٢ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١٣ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{vmatrix} = ١(١ - ١) - ٣(-٢ - ٣) + ٢(٢ + ٣) = ٢٥$

العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١} = ١ - ١ = ٠$ ،

$أ_{٢١} = -(-٢ - ٣) = ٥$ ، $أ_{٣١} = ٢ + ٣ = ٥$ ،

$أ_{١٢} = -(-٣ - ٢) = ٥$ ، $أ_{٢٢} = -١ - ٦ = -٧$ ، $أ_{٣٢} = -(١ - ٩) = -٨$ ،

$أ_{١٣} = ٣ + ٢ = ٥$ ، $أ_{٢٣} = -(١ - ٤) = ٣$ ، $أ_{٣٣} = -١ - ٦ = -٧$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٨ \\ ٥ & ٣ & -٧ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix}$ ∴ س = $أ^{-١}$ ب

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١٣ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٢٥ \\ ٥٠ \\ ٧٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ، مجموعة الحل = { (١ ، ٢ ، ٣) }

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ك
عدد لا نهائى من الحلول فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

الحل

∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^* = \left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٢ & \text{ك} \end{array}\right)$ ، أ^* على النظم ٢ × ٣

، و المعادلتان غير متجانستين ، و لهما عدد لا نهائى من الحلول

، و عدد المجاهيل = ٢ ∴ ر (أ) = ر (أ^*) = ١

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من أ^* هى ٢ ، و قيمته = ٠ .

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & \text{ك} \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ك − ٢ = ٠ ومنها : ك = ٢

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) إذا كان : أَ ، بَ ، جـَ هى أطوال أضلاع مثلث فإن قيمة

$$\begin{vmatrix} \text{أَ} & \text{بَ} & \text{جـَ} \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا جـ} \end{vmatrix} = ...$$

الحل

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{حا جـ}} = \text{ك}$

∴ أَ = ك حا أ ، بَ = ك حا ب ، جـَ = ك حا جـ

∴ $\begin{vmatrix} \text{أَ} & \text{بَ} & \text{جـَ} \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا جـ} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ك حا أ} & \text{ك حا ب} & \text{ك حا جـ} \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا جـ} \end{vmatrix}$

$= \text{ك} \begin{vmatrix} \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا جـ} \\ ٥ & ٧ & ٨ \\ \text{حا أ} & \text{حا ب} & \text{حا جـ} \end{vmatrix} = ٠$ لأن : $\text{ص}_١ = \text{ص}_٣$

السؤال الرابع :

(١) أحسب رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ و من ثم أثبت أن :
مجموعة حل المعادلات ٢ س − ص − ٣ ع = ٠ ،
س + ٢ ص + ع = ١ ، ٣ س − ٥ ص + ٢ ع = ١٣ لها
حل وحيد و أوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٢ (٤ + ٥) + ١ (٢ - ٣) - ٣ (-٥ - ٦) = ٥٠ \neq ٠$

∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س~ = ب حيث :

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & -٣ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & -٥ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{س}\sim = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١٣ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ_{11}} = 4 + 5 = 9$ ،

$\overline{أ_{21}} = -(2 - 3) = 1$ ، $\overline{أ_{31}} = -5 - 6 = -11$ ،

$\overline{أ_{12}} = -(-2 - 15) = 17$ ، $\overline{أ_{22}} = 4 + 9 = 13$ ، $\overline{أ_{32}} = -(-10 + 3) = 7$ ،

$\overline{أ_{13}} = -1 + 6 = 5$ ، $\overline{أ_{23}} = -(2 + 3) = -5$ ، $\overline{أ_{33}} = 4 + 1 = 5$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ $= \begin{pmatrix} 9 & 1 & -11 \\ 17 & 13 & 7 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ∴ $س = أ^{-1} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 100 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴ $س = 2$ ، $ص = -1$ ، $ع = 1$ ، مجموعة الحل = $\{(2 ، -1 ، 1)\}$

الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٢) إذا كان : س عدد مركب فإن : عدد حلول المعادلة

$$\begin{vmatrix} س^3 + 1 & س - 1 \\ س + 1 & س^3 - 1 \end{vmatrix} = 0$$ يساوى ....

(أ) ٦ (ب) ٥ (حـ) ٤ (ء) ٣

الحل

∵ $\Delta = (س^3 + 1)(س^3 - 1) - (س + 1)(س - 1)$

$= س^6 - 1 - (س^2 - 1) = س^6 - 1 - س^2 + 1 = س^6 - س^2$

$= س^2(س^4 - 1) = س^2(س + 1)(س - 1)(س^2 + 1)$

∴ المعادلة هى : $س^2(س + 1)(س - 1)(س^2 + 1) = 0$

، ∵ س عدد مركب ∴ عدد حلول : $س^2 + 1 = 0$ هو : ٢

، ∵ عدد حلول : $س^2(س + 1)(س - 1) = 0$ هو : ٣

∴ عدد حلول المعادلة هو : ٥

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) رتبة المصفوفة أ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = ...$

الحل

∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$

لأن : $\text{ص}_١ = \text{ص}_٢$ ∴ ر (أ) < ٣

السؤال الثالث :

(٢) أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى
و أكتب الصورة العامة لهذا الحل : ٢س − ص + ٣ع = ٠
، ٤س + ٥ص − ع = ٠ ، ٢س + ٣ص − ع = ٠

الحل

∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ٢(-٥+٣) + ١(-٤+٢) - ٣(١٢-١٠) = ٠$

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ + ٤ = ١٤ \neq ٠$ ∴ ر (أ) < ٢

، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، ر (أ) < عدد المجاهيل

، المعادلات متجانسة ∴ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول غير الحل الصفرى

لإيجاد الصورة العامة للحل نتبع الخطوات التالية :

١) نكتب المصفوفة الموسعة (أ*) للمصفوفة أ " لاحظ الحدود المطلقة = ٠ "

٢) نجرى تحويلات أولية على صفوف أ* (كما فى المحددات) لنوجد مصفوفة مكافئة لها على صورة مصفوفة مثلثية أو تحتوى على أكبر عدد من الأصفار

٣) نقرأ المعادلات من خلال الصفوف ثم نوجد الحل " لاحظ : لا معنى لـ $\text{أ}^{-١}$ "

$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ & -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ & -١ & ٠ \end{array}\right)$ بإجراء : $\text{ص}_٢ - ٢\text{ص}_١$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$

$\text{أ}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٧ & -٧ & ٠ \\ ٠ & ٤ & -٤ & ٠ \end{array}\right)$ ∴ من الصف الثانى : ٧ص − ٧ع = ٠

∴ ص = ع ، بفرض أن : ص = ل ∴ ع = ل

، ∵ من الصف الأول : ٢س − ص + ٣ع = ٠ ∴ ٢س − ل + ٣ل = ٠

و منها : ٢س = − ٢ل ∴ س = − ل

∴ الصورة العامة للحل هى : (− ل ، ل ، ل)

السؤال الخامس :

(١) أثبت أن : $\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

الحل

بضرب $\text{ع}_١ \times \text{أ}$ ، $\text{ع}_٢ \times \text{ب}$ ، $\text{ع}_٣ \times \text{جـ}$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{١}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ} \end{vmatrix}$

بأخذ أ ب جـ مشترك من عناصر $\text{ص}_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\text{أ ب جـ}}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = الطرف الأيسر

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \log_{2} 3 & 3 & 9 \\ 0 & \log_{3} 5 & 7 \\ 0 & 0 & \log_{5} \text{س} \end{vmatrix} = 4$ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (حـ) ٦٤ (ء) ١٢٨

الحل

∵ المحدد على الصورة القطرية ∴ $\Delta = \log_{2} 3 \times \log_{3} 5 \times \log_{5} \text{س}$

∴ $\log_{2} 3 \times \log_{3} 5 \times \log_{5} \text{س} = 4$ ∴ $\frac{\log_{e} 3}{\log_{e} 2} \times \frac{\log_{e} 5}{\log_{e} 3} \times \frac{\log_{e} \text{س}}{\log_{e} 5} = 4$

∴ $\frac{\log_{e} \text{س}}{\log_{e} 2} = 4$ ∴ $\log_{2} \text{س} = 4$ ∴ $\text{س} = (2)^{4} = 16$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) رتبة المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∵ أ على النظم ٣ × ٢ ∴ رتبة أعلى درجة محدد يمكن تكوينه منها هو ٢

∴ نوجد : $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 18 = -12 \neq 0$

∴ $ر(\text{أ}) = 2$

السؤال الخامس :

(أ) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية و أكتب الحل إن وجد :

$\text{س} + \text{ص} = 2 \quad ، \quad 2\text{س} + 3\text{ص} = 5$

الحل

∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ ، أ^{*} على النظم ٢ × ٣

، ∵ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$ ∴ $ر(\text{أ}) = 2$

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من أ^{*} هى ٢

و قيمة جميع هذه المحددات ≠ ٠ ∴ $ر(\text{أ}^{*}) = 2$

∴ $ر(\text{أ}) = ر(\text{أ}^{*}) = 2 =$ عدد المجاهيل ∴ للمجموعة حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س~ = ب حيث :

$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ، $\tilde{\text{س}} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\text{أ}|} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ∴ س = ١ ، ص = ١

حل آخر

نجرى تحويلات أولية على صفوف أ^{*} (كما فى المحددات)

$\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$ بإجراء : $\text{ص}_{2} - 2\text{ص}_{1}$ ∴ $\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

∴ من الصف الثانى : ص = ١

، من الصف الأول : س + ص = ٢ ∴ س = ١

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) إذا كان للمعادلتين : س + ص = ٢ ، ٢ س + ك ص = ٤
أكثر من حل فإن : ك = ...

(أ) − ٢ (ب) − ١ (حـ) ١ (ء) ٢

الحل

∵ $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ك \end{pmatrix}$ ، $أ^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ك & ٤ \end{array}\right)$ ، $أ^{*}$ على النظم ٢ × ٣

، و المعادلتان غير متجانستين ، و لهما أكثر من حل

، و عدد المجاهيل = ٢ ∴ ر (أ) = ر ($أ^{*}$) = ١

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٢ ، و قيمته = ٠ .

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ك \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ك − ٢ = ٠ ومنها : ك = ٢

(١) حل المعادلات الآتية : ٢ س + ص − ٢ ع = ١٠ ،
س + ٢ ص + ٢ ع = ١ ، ٥ س + ٤ ص + ٣ ع = ٦
باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$

∴ |أ| = ٢ (٦ − ٨) − ١ (٣ − ١٠) − ٢ (٤ − ١٠) = ١٥

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س~ = ب حيث :

$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $س\sim = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١ \\ ٦ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١}$ = ٦ − ٨ = − ٢ ،

$أ_{١٢}$ = − (٣ − ١٠) = ٧ ، $أ_{١٣}$ = ٤ − ١٠ = − ٦ ،

$أ_{٢١}$ = − (٣ + ٨) = − ١١ ، $أ_{٢٢}$ = ٦ + ١٠ = ١٦ ، $أ_{٢٣}$ = − (٨ − ٥) = − ٣ ،

$أ_{٣١}$ = ٢ + ٤ = ٦ ، $أ_{٣٢}$ = − (٤ + ٢) = − ٦ ، $أ_{٣٣}$ = ٤ − ١ = ٣

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٧ & -٦ \\ -١١ & ١٦ & -٣ \\ ٦ & -٦ & ٣ \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٢ & -١١ & ٦ \\ ٧ & ١٦ & -٦ \\ -٦ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} -٢ & -١١ & ٦ \\ ٧ & ١٦ & -٦ \\ -٦ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ $س\sim = أ^{-١} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} -٢ & -١١ & ٦ \\ ٧ & ١٦ & -٦ \\ -٦ & -٣ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١ \\ ٦ \end{pmatrix} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥٠ \\ -٤٥ \end{pmatrix}$

∴ س = $\frac{١}{٣}$ ، ص = $\frac{١٠}{٣}$ ، ع = − ٣ ،

مجموعة الحل = { ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، − ٣) }

السؤال الخامس :

(أ) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}^2+1 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \text{أ ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ \text{أ حـ} & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + 1$$

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الأول)

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} \text{أ}^2 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ \text{أ ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ \text{أ حـ} & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ 0 & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ 0 & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

بإخذ أ مشتركاً من الصف الأول ، و العمود الأول بالمحدد الأول

، و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثانى)

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{ب} & \text{حـ} \\ \text{ب} & \text{ب}^2+1 & \text{ب حـ} \\ \text{حـ} & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \text{أ ب} & \text{أ حـ} \\ 0 & \text{ب}^2 & \text{ب حـ} \\ 0 & \text{ب حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \text{أ حـ} \\ 0 & 1 & \text{ب حـ} \\ 0 & 0 & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix}$$

بإجراء : ($\text{ع}_2 - \text{ب ع}_1$) فى ع_2 ، ($\text{ع}_3 - \text{حـ ع}_1$) فى ع_3 على المحدد الأول ،

بإخذ ب مشتركاً من الصف الثانى ، و العمود الثانى بالمحدد الثانى

المحدد الثالث على الصورة المثلثية ∴ قيمته = $\text{حـ}^2 + 1$

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{أ}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{ب} & 1 & 0 \\ \text{حـ} & 0 & 1 \end{vmatrix} + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & \text{أ حـ} \\ 0 & 1 & \text{حـ} \\ 0 & \text{حـ} & \text{حـ}^2+1 \end{vmatrix} + \text{حـ}^2 + 1$$

المحدد الأول على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ١ ،

و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

، بإجراء ($\text{حـ ع}_2 - \text{ع}_3$) فى ع_3 على المحدد الثانى

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{أ}^2 \times 1 + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & \text{أ} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{حـ} & 1 \end{vmatrix} + \text{حـ}^2 + 1$$

، بتبديل عناصر ($\text{ع}_2 - \text{ع}_3$) ثم عناصر ($\text{ص}_3 - \text{ص}_2$) على المحدد الأول

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \text{أ} \\ 0 & 1 & \text{حـ} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \text{حـ}^2 + 1$$

المحدد على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ١ ،

$$\text{الطرف الأيمن} = \text{أ}^2 + \text{ب}^2 \times 1 + \text{حـ}^2 + 1$$

$$= \text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2 + 1 = \text{الطرف الأيسر}$$

الاختبار السادس

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ -١ & -١ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∵ $|أ| = \begin{vmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ -١ & -١ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ " على الصورة المثلثية "

∴ $|أ| = ١ \neq ٠$ 　　∴ رتبة المصفوفة = ٣

السؤال الرابع :

(١) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية : ٤ س + ٣ ص − ٥ ع = ٦ ، ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ ، ٥ س − ٢ ص − ٧ ع = ١

الحل

$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix}$ 　 $|أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{vmatrix}$

∴ $|أ| = ٤(-١٤ + ٨) - ٣(-٢١ - ٢٠) - ٥(-٦ - ١٠) = ١٧٩$

∴ $|أ| \neq ٠$ 　∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

، المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب 　حيث :

$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix}$ ، $س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ}_{١١} = -١٤ + ٨ = -٦$ ،

$\overline{أ}_{٢١} = -(-٢١ - ٢٠) = ٤١$ ، $\overline{أ}_{٣١} = -٦ - ١٠ = -١٦$ ،

$\overline{أ}_{١٢} = -(-٢١ - ١٠) = ٣١$ ، $\overline{أ}_{٢٢} = -٢٨ + ٢٥ = -٣$ ، $\overline{أ}_{٣٢} = -(-٨ - ١٥) = ٢٣$ ،

$\overline{أ}_{١٣} = ١٢ + ١٠ = ٢٢$ ، $\overline{أ}_{٢٣} = -(١٦ + ١٥) = -٣١$ ، $\overline{أ}_{٣١} = ٨ - ٩ = -١$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٦ & ٤١ & -١٦ \\ ٣١ & -٣ & ٢٣ \\ ٢٢ & -٣١ & -١ \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$ 　∴ $س = أ^{-١} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ٣٥٨ \\ ١٧٩ \\ ١٧٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١ 　، مجموعة الحل = { (٢ ، ١ ، ١) }

السؤال الخامس :

(١) بدون فك المحدد أثبت أن :

$\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ ب & أ & س \end{vmatrix} = (س + أ + ب) (س - أ) (س - ب)$

الحل

بإجراء : ع١ + ع٢ + ع٣ فى ع١

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{أ} & \text{ب} \\ \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{س} & \text{ب} \\ \text{س}+\text{أ}+\text{ب} & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

بإخراج (س + أ + ب) مشترك من ع١

∴ الطرف الأيمن = (س + أ + ب) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ١ & \text{س} & \text{ب} \\ ١ & \text{أ} & \text{س} \end{vmatrix}$

بإجراء : ص٢ − ص١ فى ص٢ ، ص٣ − ص١ فى ص٣

∴ الطرف الأيمن = (س + أ + ب) $\begin{vmatrix} ١ & \text{أ} & \text{ب} \\ ٠ & \text{س}-\text{أ} & ٠ \\ ٠ & ٠ & \text{س}-\text{ب} \end{vmatrix}$

= (س + أ + ب) (س − أ) (س − ب) = الطرف الأيسر

الاختبار السابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) إذا كان للمعادلات : ٣ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٦ س − ٥ ص + ٢ ع = ٠ ، ٩ س − ٦ ص + ك ع = ٠ حلول غير الحل الصفرى فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

الحل

$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & -٥ & ٢ \\ ٩ & -٦ & \text{ك} \end{pmatrix}$ ، $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ٦ & -٥ & ٢ \\ ٩ & -٦ & \text{ك} \end{vmatrix}$

∵ المعادلات متجانسة و لها حلول غير الحل الصفرى ، عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) < ٣ ∴ |أ| = ٠

∴ ٣ (−٥ ك + ١٢) + ٢ (٦ ك − ١٨) + ١ (−٣٦ + ٤٥) = ٠

∴ −١٥ ك + ٣٦ + ١٢ ك − ٣٦ − ٣٦ + ٤٥ = ٠

∴ ٣ ك = ٩ ∴ ك = ٣

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) رتبة المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∴ $|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & -٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١ (٤ − ٣) − ١ (٤ + ١) + ٣ (−٣ − ١) = −١٦ ≠ ٠

∴ ر (أ) = ٣

السؤال الرابع :

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{أ}+\text{ب}+٢ \\ \text{ب} & ٢\text{أ}+\text{ب}+١ & ١ \\ \text{أ}+٢\text{ب}+١ & \text{أ} & ١ \end{vmatrix} = ٢(\text{أ}+\text{ب}+١)^{٣}$$

الحل

بإجراء : $\text{ع}_١ + \text{ع}_٢ + \text{ع}_٣$ فى $\text{ع}_١$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & ٢(\text{أ}+\text{ب}+١) \\ \text{ب} & ٢\text{أ}+\text{ب}+١ & ٢(\text{أ}+\text{ب}+١) \\ \text{أ}+٢\text{ب}+١ & \text{أ} & ٢(\text{أ}+\text{ب}+١) \end{vmatrix}$

بإخراج : ٢ (أ + ب + ١) مشترك من $\text{ع}_١$

∴ الطرف الأيمن = ٢ (أ + ب + ١) $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & ١ \\ \text{ب} & ٢\text{أ}+\text{ب}+١ & ١ \\ \text{أ}+٢\text{ب}+١ & \text{أ} & ١ \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ص}_٢ - \text{ص}_١$ فى $\text{ص}_٢$ ، $\text{ص}_٣ - \text{ص}_١$ فى $\text{ص}_٣$

∴ الطرف الأيمن = ٢ (أ + ب + ١) $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & ١ \\ ٠ & \text{أ}+\text{ب}+١ & ٠ \\ \text{أ}+\text{ب}+١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

المحدد على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن = ٢ (أ + ب + ١) (أ + ب + ١) (أ + ب + ١)

= $٢(\text{أ}+\text{ب}+١)^{٣}$ = الطرف الأيسر

السؤال الخامس :

(أ) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} \text{ع} & ٢\text{ص} & ٠ \\ -\text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & -\text{ص} & \text{س} \end{pmatrix}$ و كان : $\text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{-١}$

أوجد قيم كل من : س ، ص ، ع

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} \text{ع} & ٢\text{ص} & ٠ \\ -\text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & -\text{ص} & \text{س} \end{pmatrix}$ ∴ $\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \text{س} & \text{س} & ٠ \\ -\text{ص} & \text{ص} & ٢\text{ص} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \end{pmatrix}$

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} \text{ع} & ٢\text{ص} & ٠ \\ -\text{ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & -\text{ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ٠ − ٢ص (س ع + س ع) + ع (− س ص − س ص)

∴ |أ| = − ٤ س ص ع − ٢ س ص ع = − ٦ س ص ع

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{\text{أ}}_{١١}$ = ص ع − ص ع = ٠ ،

$\overline{\text{أ}}_{٢١}$ = − (س ع + س ع) = −٢ س ع ،

$\overline{\text{أ}}_{٣١}$ = − س ص − س ص = − ٢ س ص ،

$\overline{\text{أ}}_{١٢}$ = − (٢ ص ع − ص ع) = − ٣ ص ع ، $\overline{\text{أ}}_{٢٢}$ = ٠ − س ع = − س ع ،

$\overline{\text{أ}}_{٣٢}$ = − (٠ − ٢ ص ع) = ٢ ص ع ،

$\overline{\text{أ}}_{١٣}$ = − ٢ ص ع − ص ع = − ٣ ص ع ، $\overline{\text{أ}}_{٢٣}$ = − (٠ − س ع) = س ع ،

$\overline{\text{أ}}_{٣١}$ = ٠ − ٢ س ص = − ٢ س ص

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٢\text{س ص} & -٢\text{س ع} & ٠ \\ ٢\text{ص ع} & -\text{س ع} & -٣\text{ص ع} \\ -٢\text{س ص} & \text{س ع} & -٣\text{ص ع} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{أ}^{-١} = \frac{١}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{١}{-٦\,\text{س ص ع}} \begin{pmatrix} ٠ & -٣\text{ص ع} & -٣\text{ص ع} \\ -٢\text{س ع} & -\text{س ع} & \text{س ع} \\ -٢\text{س ص} & ٢\text{ص ع} & -٢\text{س ص} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢\text{س}} & \frac{١}{٢\text{س}} \\ \frac{١}{٣\text{ص}} & \frac{١}{٦\text{ص}} & \frac{-١}{٦\text{ص}} \\ \frac{١}{٣\text{ع}} & \frac{-١}{٣\text{ع}} & \frac{١}{٣\text{ع}} \end{pmatrix}$ ، $\because \text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{-١}$

$\therefore \begin{pmatrix} ٠ & \text{س} & \text{س} \\ ٢\text{ص} & \text{ص} & -\text{ص} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & \frac{١}{٢\text{س}} & \frac{١}{٢\text{س}} \\ \frac{١}{٣\text{ص}} & \frac{١}{٦\text{ص}} & \frac{-١}{٦\text{ص}} \\ \frac{١}{٣\text{ع}} & \frac{-١}{٣\text{ع}} & \frac{١}{٣\text{ع}} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \frac{١}{٢\text{س}}$　$\therefore \text{س}^٢ = \frac{١}{٢}$　$\therefore \text{س} = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore \text{ص} = \frac{١}{٦\text{ص}}$　$\therefore \text{ص}^٢ = \frac{١}{٦}$　$\therefore \text{ص} = \pm \frac{١}{\sqrt{٦}}$

$\therefore \text{ع} = \frac{١}{٣\text{ع}}$　$\therefore \text{ع}^٢ = \frac{١}{٣}$　$\therefore \text{س} = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}}$

الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} = ٥$ فإن قيمة $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ \text{أ}+٥ & \text{ب}+٥ & \text{حـ}+٥ \end{vmatrix} = ...$

الحل

كتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

$\therefore$ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ \text{أ} & \text{ب} & \text{حـ} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٥ & ٥ & ٥ \end{vmatrix}$

، $\because$ قيمة المحدد الأول = ٥ ، قيمة المحدد = ٠ " عناصر الصف الأول أصفار "

$\therefore$ الطرف الأيمن = ٥ + ٠ = ٥

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٢) رتبة المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٠ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٤ & -٦ \\ ٣ & -٦ & ٩ \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ٣　　(ب) ٢　　(حـ) ١　　(ء) صفر

الحل

$\because |\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٠ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٤ & -٦ \\ ٣ & -٦ & ٩ \end{vmatrix} = ٠$　لأن : $\text{ص}_٣ = \text{ص}_٢ \times (-١,٥)$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) < ٣$

، $\because \begin{vmatrix} ٠ & -٢ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ \neq ٠$　$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = ٢$

السؤال الثالث :

(أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

٢ س − ص + ع = −١ ، س − ع = ٢ ، س + ص = ٣

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & −١ & ١ \\ ١ & ٠ & −١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$∴ |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & −١ & ١ \\ ١ & ٠ & −١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٢(٠+١)+١(٠+١)+١(١−٠) = ٤$$

∴ |أ| ≠ ٠ ∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

، المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & −١ & ١ \\ ١ & ٠ & −١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix} ، س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} −١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\bar{أ}_{١١}$ = ٠ + ١ = ١ ،

$\bar{أ}_{١٢}$ = −(٠ + ١) = −١ ، $\bar{أ}_{١٣}$ = ١ − ٠ = ١ ،

$\bar{أ}_{٢١}$ = −(٠ − ١) = ١ ، $\bar{أ}_{٢٢}$ = ٠ − ١ = −١ ، $\bar{أ}_{٢٣}$ = −(٢ + ١) = −٣ ،

$\bar{أ}_{٣١}$ = ١ − ٠ = ١ ، $\bar{أ}_{٣٢}$ = −(−٢ − ١) = ٣ ، $\bar{أ}_{٣٣}$ = ٠ + ١ = ١

$$∴ \text{مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة } أ = \begin{pmatrix} ١ & −١ & ١ \\ ١ & −١ & −٣ \\ ١ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$، أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ −١ & −١ & ٣ \\ ١ & −٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ −١ & −١ & ٣ \\ ١ & −٣ & ١ \end{pmatrix} \quad ∴ س = أ^{-١} ب$$

$$∴ \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ −١ & −١ & ٣ \\ ١ & −٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} −١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٤ \\ ٨ \\ −٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ −١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = −١ ، مجموعة الحل = { (١ ، ٢ ، −١) }

السؤال الرابع :

(٢) إبحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية : س + ٣ ص − ٢ ع = ٠ ،

س − ٨ ص + ٨ ع = ٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٠

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & −٢ \\ ١ & −٨ & ٨ \\ ٣ & −٢ & ٤ \end{pmatrix} \quad |أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & −٢ \\ ١ & −٨ & ٨ \\ ٣ & −٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

∴ |أ| = ١ (−٣٢ + ١٦) − ٣ (٤ − ٢٤) − ٢ (−٢ + ٢٤) = ٠

∴ ر (أ) < ٣

$$، ∵ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & −٨ \end{vmatrix} = −١١ ≠ ٠$$ ∴ ر (أ) = ٢ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) < عدد المجاهيل ، ∵ المعادلات متجانسة

∴ يوجد حل خلاف الحل الصفرى

الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(٢) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ & أ+١ \\ ٥ & أ-١ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٢١$ هى ....

الحل

∵ المحدد على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ٧ (أ + ١) (أ − ١)

و تكون المعادلة هى : ٧ (أ + ١) (أ − ١) = ٢١

∴ $أ^٢$ − ١ = ٣ ∴ $أ^٢$ = ٤ ∴ أ = ± ٢ ∴ مجموعة الحل = { ٢ ، − ٢ }

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٢) رتبة المصفوفة أ $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ = ...

الحل

∵ |أ| = $\begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٢ (٤ − ١) − ١ (−٢ − ٣) + ٣ (−٢ − ٦) = − ١٣

∴ |أ| ≠ ٠ ∴ ر (أ) = ٣

(أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

س − ٢ص + ٢ع = ٢ ، ٣س + ٤ع = ١٠ ، ٦ع − ص = ٥

الحل

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، |أ| = $\begin{vmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$

∴ |أ| = ١ (٠ + ٤) + ٢ (١٨ − ٠) + ٢ (−٣ − ٠) = ٣٤ ≠ ٠

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س~ = ب حيث :

أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٣ \\ ٦ & -١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، س~ = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١}$ = ٠ + ٤ = ٤ ،

$أ_{٢١}$ = − (١٨ − ٠) = − ١٨ ، $أ_{٣١}$ = − ٣ − ٠ = − ٣ ،

$أ_{١٢}$ = − (− ١٢ + ٢) = ١٠ ، $أ_{٢٢}$ = ٦ − ٠ = ٦ ، $أ_{٣٢}$ = − (− ١ − ٠) = ١ ،

$أ_{١٣}$ = − ٨ − ٠ = − ٨ ، $أ_{٢٣}$ = − (٤ − ٦) = ٢ ، $أ_{٣٣}$ = ٠ + ٦ = ٦

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٣ & -١٨ & ٤ \\ ١ & ٦ & ١٠ \\ ٦ & ٢ & -٨ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد}$ = $\begin{pmatrix} -٨ & ١٠ & ٤ \\ ٢ & ٦ & -١٨ \\ ٦ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} -٨ & ١٠ & ٤ \\ ٢ & ٦ & -١٨ \\ ٦ & ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ∴ س~ = $أ^{-١}$ ب

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & ٨- \\ ١٨- & ٦ & ٢ \\ ٣- & ١ & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{١}{٣٤} \begin{pmatrix} ٦٨ \\ ٣٤ \\ ٣٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١ ، مجموعة الحل = {(٢ ، ١ ، ١)}

السؤال الخامس :

(أ) أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات : ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ١ عدد غير منتهى من الحلول

الحل

أ = $\begin{pmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{pmatrix}$ ∴ |أ| = $\begin{vmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{vmatrix}$ ، أ* = $\left(\begin{array}{ccc|c} ك & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ك & ١ \end{array}\right)$

|أ| = ك (ك٢ − ١) − ١ (ك − ١) + ١ (١ − ك)

= ك (ك − ١) (ك + ١) − (ك − ١) − (ك − ١)

= (ك − ١) (ك (ك + ١) − ١ − ١)

= (ك − ١) (ك٢ + ك − ٢) = (ك − ١) (ك − ١) (ك + ٢)

∴ ك = ١ أو ك = −٢

عندما : ك = ١ فإن : |أ| = $\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠ لأن : $ص_١ = ص_٢$

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix}$ = ٠ ∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

، أ* = $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \end{array}\right)$ ، وهى على النظم ٣ × ٤

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من أ* هى ٣ ، و قيمته = ٠ .

و أى رتبة محدد تالى يمكن تكوينه من أ* هى ٢ قيمته = ٠ .

∴ ر (أ) = ر (أ*) = ١ ، ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) = ر (أ*) < عدد المجاهيل ، ∵ و المعادلات متجانسة

∴ عندما : ك = ١ يوجد عدد غير منتهى من الحلول

، عندما : ك = −٢ فإن : |أ| = $\begin{vmatrix} −٢ & ١ & ١ \\ ١ & −٢ & ١ \\ ١ & ١ & −٢ \end{vmatrix}$

، |أ| = −٢ (٤ − ١) − ١ (−٢ − ١) + ١ (١ + ٢) = ٠ ∴ ر (أ) < ٣

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من أ هى ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} −٢ & ١ \\ ١ & −٢ \end{vmatrix}$ = −٢ − ١ = −٥ ∴ ر (أ) = ٢

، ∵ أ* = $\left(\begin{array}{ccc|c} −٢ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & −٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & −٢ & ١ \end{array}\right)$ ، وهى على النظم ٣ × ٤

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من أ* هى ٣ حيث :

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ −٢ & ١ & ١ \\ ١ & −٢ & ١ \end{vmatrix}$ = ١ (١ + ٢) − ١ (−٢ − ١) + ١ (٤ − ١) = ٩

∴ ر (أ*) = ٣ ∴ ر (أ) ≠ ر (أ*)

، ∵ المعادلات متجانسة ∴ عندما : ك = −٢ لا يوجد حل على الاطلاق

الاختبار العاشر

السؤال الثالث :

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} . & ع & ص \\ ع & . & س \\ ص & س & . \end{vmatrix}$$

الحل

بإجراء : $ص_١ + ص_٣ - ص_٢$ (فى $ص_١$)

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} ٢ع & . & ٢س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$$

بإخراج (٢) مشترك من $ص_١$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = ٢ \begin{vmatrix} ع & . & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$$

بإجراء : $ص_٣ - ص_١$ (فى $ص_٣$)

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = ٢ \begin{vmatrix} ع & . & س \\ ص & ع + س & ص \\ . & ع & ص \end{vmatrix}$$

بإجراء : $ص_٣ - ص_٢$ (فى $ص_٢$)

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = ٢ \begin{vmatrix} ع & . & س \\ ص & س & . \\ . & ع & ص \end{vmatrix}$$

بتبديل : $ص_١$ ، $ص_٣$ ثم تبديل : $ص_٢$ ، $ص_٣$

$$\therefore \text{الطرف الأيمن} = ٢ \begin{vmatrix} . & ع & ص \\ ع & . & س \\ ص & س & . \end{vmatrix} = \text{الطرف الأيسر}$$

السؤال الخامس :

(أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل مجموعة المعادلات الآتية :

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} + \frac{١}{ع} = ١ \quad ، \quad \frac{١}{س} - \frac{١}{ص} + \frac{٢}{ع} = \frac{١}{٢}$$

$$، \quad \frac{٢}{س} + \frac{٣}{ص} - \frac{٤}{ع} = \frac{٤}{٣}$$

حيث : س ، ص ، ع لا تساوى صفر

الحل

نفرض أن : $\frac{١}{س} = ل$ ، $\frac{١}{ص} = م$ ، $\frac{١}{ع} = ن$ (١)

$\therefore$ المعادلات هى : $ل + م + ن = ١$ ،

$ل - م + ٢ن = \frac{١}{٢}$ بالضرب × ٢ يكون :

$٢ل - ٢م + ٤ن = ٢$ ،

$٢ل + ٣م - ٤ن = \frac{٤}{٣}$ بالضرب × ٣ يكون :

$٦ل + ٩م - ١٢ن = ٤$

$$\therefore أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -٢ & ٤ \\ ٦ & ٩ & -١٢ \end{pmatrix} \quad ،$$

$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -٢ & ٤ \\ ٦ & ٩ & -١٢ \end{vmatrix}$

$= ١(٢٤ - ٣٦) - ١(-٢٤ - ٢٤) + ١(١٨ + ١٢) = ٦٦ \neq ٠$

∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س~ = ب حيث :

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ٢ & -٢ & ٤ \\ ٦ & ٩ & -١٢ \end{pmatrix}$ ، $س\sim = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ_{١١}} = ٢٤ - ٣٦ = -١٢$ ،

$\overline{أ_{١٢}} = -(-٢٤ - ٢٤) = ٤٨$ ، $\overline{أ_{١٣}} = ١٨ + ١٢ = ٣٠$ ،

$\overline{أ_{٢١}} = -(-١٢ - ٩) = ٢١$ ، $\overline{أ_{٢٢}} = -١٢ - ٦ = -١٨$ ، $\overline{أ_{٢٣}} = -(٩ - ٦) = -٣$ ،

$\overline{أ_{٣١}} = ٤ + ٢ = ٦$ ، $\overline{أ_{٣٢}} = -(٤ - ٢) = -٢$ ، $\overline{أ_{٣٣}} = -٢ - ٢ = -٤$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ $= \begin{pmatrix} -١٢ & ٤٨ & ٣٠ \\ ٢١ & -١٨ & -٣ \\ ٦ & -٢ & -٤ \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -١٢ & ٢١ & ٦ \\ ٤٨ & -١٨ & -٢ \\ ٣٠ & -٣ & -٤ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{١}{٦٦}\begin{pmatrix} -١٢ & ٢١ & ٦ \\ ٤٨ & -١٨ & -٢ \\ ٣٠ & -٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ∴ $س\sim = أ^{-١} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٦٦}\begin{pmatrix} -١٢ & ٢١ & ٦ \\ ٤٨ & -١٨ & -٢ \\ ٣٠ & -٣ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix} = \frac{١}{٦٦}\begin{pmatrix} ٣٣ \\ ٢٢ \\ ١١ \end{pmatrix}$

∴ ل = $\frac{١}{٢}$ ، م = $\frac{١}{٣}$ ، ن = $\frac{١}{٦}$ بالتعويض فى (١) ينتج :

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٦ ،

مجموعة الحل = { (٢ ، ٣ ، ٦) }





أحمد الشنتورى

المتميز

فى

الرياضيات البحتة

الهندسة الفراغية

الجزء النظرى

و

حلول تمارين

الوحدة الأولى

$\overline{س}$	$\overline{أ} \cdot \overline{ب}$	$\overline{أ ح}$	(س ، ص ، ع)

إعداد : أحمد الشنتورى

الصف الثالث الثانوى

القسم العلمى

شعبة الرياضيات

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الأولى .... الهندسة و القياس فى بعدين و ثلاثة أبعاد

١ – ١ النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

تذكر ما يلى :

[١] لتحديد موضع جسم على خط مستقيم يلزم معرفة بعد هذا الجسم عن نقطة ثابتة (اختيارية) عليه تسمى نقطة الأصل (و)
ففى الشكل المقابل : و أ = $س_1$ ∈ ح

لاحظ : النظام يسمى أحادى البعد

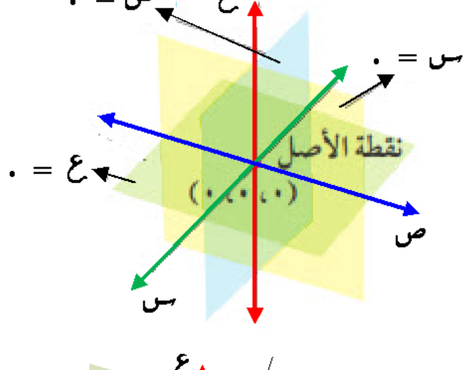
[٢] لتحديد موضع جسم فى مستوى يلزم معرفة مسقط هذا الجسم على كل من محورى إحداثيات متعامدة
ففى الشكل المقابل :
أ = ($س_1$ ، $ص_1$) ∈ $ح^2$

و يسمى المستوى (س ص) بالنظام الإحداثى ثنائى البعد حيث تشكل هذا المستوى من محورين هما : المحور الأفقى س ، و المحور الرأسى ص متعامدين و يتقاطعين فى نقطة الأصل (و)

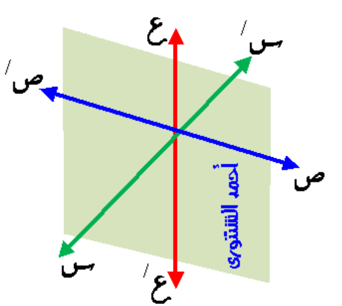
النظام الإحداثى المتعامد في ثلاثة أبعاد ($ح^3$) :
هو نظام يتكون من ثلاثة محاور (س ، ص ، ع) فى الفراغ متقاطعة فى نقطة و متعامدة مثنى مثنى بحيث تكون نظام إحداثى متعامد حسب : **قاعدة اليد اليمنى** : الموضحة بالشكل المقابل :

حيث تشير أصابع اليد المنحنية من الاتجاه الموجب لمحور س إلى الاتجاه الموجب لمحور ص ، و يشير اتجاه الإبهام إلى الاتجاه الموجب لمحور ع

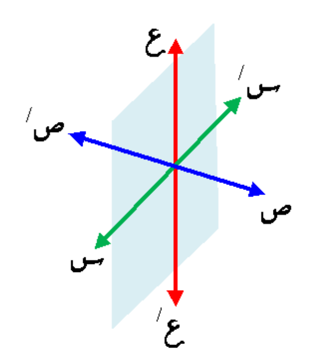
و تكون هذه المحاور ثلاثة مستويات ناتجة من تقاطع كل محورين معاً كما بالشكل المقابل
و هذا ما يطلق عليه : **مستوى الإحداثيات :**



١) المستوى (س ص) :
يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ص ، ٠)
و تكون معادلته هى :
ع = ٠
و يمثله الشكل المقابل



٢) المستوى (س ع) :
يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (س ، ٠ ، ع)
و تكون معادلته هى :
ص = ٠
و يمثله الشكل المقابل



٣) المستوى (ص ع) :

يحوى جميع نقط الفراغ التى إحداثياتها (٠ ، ص ، ع)

و تكون معادلته هى : س = ٠

و يمثله الشكل المقابل

ملاحظات :

(١) الشكل المقابل :

يمثل الاتجاهات الموجبة للمحاور الثلاثة (س ، ص ، ع) المتعامدة للنظام الإحداثى المتعامد ثلاثى الأبعاد (طول ، عرض ، ارتفاع)

(٢) المستقيمان : $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{صص'}$ يعينان المستوى (س ص) الذى معادلته هى : ع = ٠ ،

المستقيمان : $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يعينان المستوى (س ع) الذى معادلته هى : ص = ٠ ،

المستقيمان : $\overleftrightarrow{صص'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يعينان المستوى (ص ع) الذى معادلته هى : س = ٠

(٣) معادلة محور س فى الفراغ هى : ص = ٠ ، ع = ٠

معادلة محور ص فى الفراغ هى : س = ٠ ، ع = ٠

معادلة محور ع فى الفراغ هى : س = ٠ ، ص = ٠

تعيين إحداثيات نقطة فى الفراغ :

لتعيين إحداثيات نقطة أ فى الفراغ بالنسبة إلى ثلاثة محاور متقاطعة فى نقطة و متعامدة مثنى مثنى نوجد مسقط نقطة أ على كل محور ففى الشكل المقابل نجد : إحداثيات نقطة أ فى الفراغ تتعين بالثلاثى المرتب ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) $\in ح^3$

حيث : $أ_1$ ($س_1$ ، ٠ ، ٠) مسقط نقطة أ على محور س ،

$أ_2$ (٠ ، $ص_1$ ، ٠) مسقط نقطة أ على محور ص ،

$أ_3$ (٠ ، ٠ ، $ع_1$) مسقط نقطة أ على محور ع

ملاحظات :

(١) خطوات تعيين نقطة أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) :

١) نحدد النقطة ($س_1$ ، $ص_1$) فى المستوى (س ص)

٢) نتحرك لأعلى أو لأسفل على خط مستقيم موازى لمحور ع حسب مقدار و إشارة $ع_1$

(٢) النقطة (س ، ٠ ، ٠) تقع على محور س ، النقطة (٠ ، ص ، ٠) على محور ص ، النقطة (٠ ، ٠ ، ع) على محور ع

(٢) بعد النقطة أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) عن المستوى (ص ع) = | $س_1$ | ، بعدها عن المستوى (س ع) = | $ص_1$ |

أحمد الشنتوى

، بعدها عن المستوى (س ص) = $|ع_1|$

(٣) بعد النقطة أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) عن محور س

$= \sqrt{(ص_1)^2 + (ع_1)^2}$ " و هو : طول العمود المرسوم "

، بعدها عن محور ص = $\sqrt{(س_1)^2 + (ع_1)^2}$

، بعدها عن محور ع = $\sqrt{(س_1)^2 + (ص_1)^2}$

(٤) معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة :
(س ، ص ، أ) هى : ع = أ

، معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة :
(س ، أ ، ع) هي : ص = أ

، معادلة المستوى الذى يحوى جميع نقط الفراغ التى على الصورة :
(أ ، ص ، ع) هى : س = أ   حيث : أ ثابت $\in$ ح

إجابة فكر صفحة ١٠٦

فى النظام ثلاثى الأبعاد الإحداثى المقابل أوجد إحداثيات كل من النقط : ب ، حـ ، ء

الحل

ب (س ، ص ، ٠)
لاحظ أن : ب تقع فى المستوى (س ص)
حـ (س ، ٠ ، ع)
لاحظ أن : حـ تقع فى المستوى (س ع)
ء (٠ ، ص ، ع) لاحظ أن : ء تقع فى المستوى (ص ع)

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٠٨

(أ) عين موضع كل من النقط الآتية باستخدام نظام إحداثى متعامد ثلاثى الأبعاد :

أ (٣ ، ٢ ، ٣)   ب (-١ ، ٤ ، ٣)   حـ (٠ ، ٠ ، ٤)

(ب) أكمل :

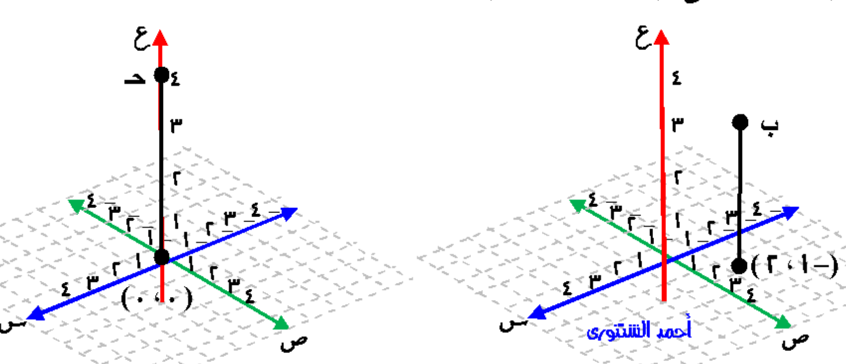
١ - بعد النقطة (-١ ، ٤ ، ٣) عن المستوى الإحداثى (س ص) = ... وحدة طول

٢ - بعد النقطة (٤ ، -٢ ، ٣) عن المستوى الإحداثى (ص ع) = ... وحدة طول

الحل

(أ) لتعيين إحداثيات النقطة أ (٣ ، ٢ ، ٣) نحدد (٣ ، ٢) فى المستوى الإحداثى (س ص) ثم نتحرك ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور ع كما بالشكل المقابل :

بالمثل لنقطتى ب ، حـ كما بالأشكال التالية :



(ب) ١ – بعد النقطة (–١ ، ٤ ، ٣) عن المستوى الإحداثى (س ص)

= | ٣ | = ٣ وحدة طول

٢ – بعد النقطة (٤ ، –٢ ، ٣) عن المستوى الإحداثى (ص ع)

= | ٤ | = ٤ وحدة طول

البعد بين نقطتين فى الفراغ :

نعلم أن :

إذا كان : أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين فى المستوى الإحداثى ثنائى البعد فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

و إذا كان : أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) نقطتين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن البعد بين النقطتين أ ، ب يعطى بالعلاقة :

$$أب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢ + (ع_٢ - ع_١)^٢}$$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٠٩

أثبت أن : النقط أ (٤ ، ٤ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٤) ، حـ (٠ ، ٤ ، ٤) هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع و أوجد مساحته

الحل

$$أب = \sqrt{(٤ - ٤)^٢ + (٤ - ٠)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = ٤\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

$$ب حـ = \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٠ - ٤)^٢ + (٤ - ٤)^٢} = ٤\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

$$أ حـ = \sqrt{(٤ - ٠)^٢ + (٤ - ٤)^٢ + (٠ - ٤)^٢} = ٤\sqrt{٢} \text{ وحدة طول}$$

∵ أب = ب حـ = أ حـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ هى رؤوس لمثلث متساوى الأضلاع

∴ مساحة △ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ × ٤ $\sqrt{٢}$ حا ٦٠° = ٨ $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة :

نعلم أن :

إذا كان : أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتين فى المستوى الإحداثى ثنائى البعد فإن إحداثيات نقطة حـ التى تقع فى منتصف $\overline{أب}$

هى : حـ ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$)

و إذا كان : أ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$ ، $ع_٢$) نقطتين فى الفراغ ثلاثى الأبعاد فإن إحداثيات نقطة حـ التى تقع فى منتصف $\overline{أب}$ هى : حـ ($\frac{س_١ + س_٢}{٢}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$ ، $\frac{ع_١ + ع_٢}{٢}$)

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٠٩

أوجد إحداثيات نقطة منتصف $\overline{حـ ء}$ حيث : حـ (٠ ، ٤ ، –٢) ، ء (–٦ ، ٣ ، ٤)

الحل

إحداثيات نقطة منتصف $\overline{حـ ء}$ = ($\frac{٠ - ٦}{٢}$ ، $\frac{٤ + ٣}{٢}$ ، $\frac{-٢ + ٤}{٢}$)

= (–٣ ، $\frac{٧}{٢}$ ، ٢)

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٠٩

إذا كانت حـ (٢ ، ٢ ، ٦) هى نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث :

أ (١ ، –٤ ، ٠) أوجد إحداثيات نقطة ب

الحل

بفرض أن : إحداثيات نقطة ب هى (س ، ص ، ع)

، ∵ جـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ (٢ ، ٢ ، ٦) = $\left(\frac{١ + س}{٢} ، \frac{–٤ + ص}{٢} ، \frac{٠ + ع}{٢} \right)$

∴ ١ + س = ٤ ∴ س = ٣ ، –٤ + ص = ٤ ∴ ص = ٨

، ٠ + ع = ١٢ ∴ ع = ١٢ ∴ ب (٣ ، ٨ ، ١٢)

معادلة الكرة فى الفراغ :

الكرة هى مجموعة نقط الفراغ التى تبعد عن نقطة ثابتة (تسمى : مركز الكرة) بعداً ثابتاً (يسمى : طول نصف قطر الكرة)

فإذا كانت النقطة (س ، ص ، ع) تقع على الكرة التى مركزها النقطة (ل ، ك ، ن) و طول نصف قطرها نق فإن : من قانون البعد بين نقطتين يكون :

$$نق = \sqrt{(س – ل)^{2} + (ص – ك)^{2} + (ع – ن)^{2}}$$

و بتربيع الطرفين نحصل على الصورة القياسية لمعادلة الكرة :

$$(س – ل)^{2} + (ص – ك)^{2} + (ع – ن)^{2} = نق^{2}$$

ملاحظات :

(١) من الصورة القياسية لمعادلة الكرة نحصل على الصورة العامة لها :

$$س^{2} + ص^{2} + ع^{2} + ٢ل س + ٢ك ص + ٢ن ع + ء = ٠ .$$

حيث : ء = نق^{2} – (ل^{2} + ك^{2} + ن^{2})

و منها يكون مركز الكرة هو : (–ل ، –ك ، –ن)

و طول نصف قطر الكرة = $\sqrt{ل^{2} + ك^{2} + ن^{2} – ء}$

حيث : ل^{2} + ك^{2} + ن^{2} > ء

(٢) معامل س^{2} = معامل ص^{2} = معامل ع^{2} ≠ ٠ .

(٣) المعادلة خالية من الحد المشتمل على : س ص أو ص ع أو س ع

(٤) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها نق

هى : س^{2} + ص^{2} + ع^{2} = نق^{2}

(٤) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل و النقطة (أ ، ب ، جـ) تقع عليها هى : س^{2} + ص^{2} + ع^{2} = أ^{2} + ب^{2} + جـ^{2}

حيث : نق^{2} = أ^{2} + ب^{2} + جـ^{2}

(٥) الكرة التى يقع مركزها على محور س و تمس المستوى (ص ع)
يكون مركزها هو (أ ، ٠ ، ٠) ، طول نصف قطرها = | أ | ،

الكرة التى يقع مركزها على محور ص و تمس المستوى (س ع)
يكون مركزها هو (٠ ، ب ، ٠) ، طول نصف قطرها = | ب | ،

الكرة التى يقع مركزها على محور ع و تمس المستوى (س ص)
يكون مركزها هو (٠ ، ٠ ، جـ) ، طول نصف قطرها = | جـ |

(٦) الكرة التى مركزها النقطة (أ ، ب ، جـ) و تمس المستوى (س ص) يكون : طول نصف قطرها = | جـ | ،

الكرة التى مركزها النقطة (ﺃ ، ب ، ﺣ) و تمس المستوى (س ع) يكون : طول نصف قطرها = | ب | ،

الكرة التى مركزها النقطة (ﺃ ، ب ، ﺣ) و تمس المستوى (ص ع) يكون : طول نصف قطرها = | ﺃ |

(٧) الكرة التى تمس مستويات الإحداثيات الموجبة و طول نصف قطرها نق يكون مركزها هو النقطة : (نق ، نق ، نق)

(٨) مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١٠

أوجد معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل ، و طول نصف قطرها ٥ وحدات

الحل

معادلة الكرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١١٠

أوجد معادلة الكرة التى قطرها $\overline{ﺃب}$ حيث : ﺃ (–١ ، ٤ ، ٢) ، ب (٣ ، –٢ ، ٦)

الحل

مركز الكرة هو نقطة منتصف $\overline{ﺃب}$ أى ($\frac{-١ + ٣}{٢}$ ، $\frac{٤ - ٢}{٢}$ ، $\frac{٢ + ٦}{٢}$) = (١ ، ١ ، ٤)

، طول نصف قطرها هو البعد بين مركز الكرة و نقطة ﺃ

∴ نق^{٢} = (١ + ١)^{٢} + (١ – ٤)^{٢} + (٤ – ٢)^{٢} = ١٧

∴ معادلة الكرة هى : (س – ١)^{٢} + (ص – ١)^{٢} + (ع – ٤)^{٢} = ١٧

حل آخر : لإيجاد طول نصف قطر الكرة

طول نصف قطر الكرة = $\frac{١}{٢}$ ﺃ ب

، ∵ (ﺃ ب)^{٢} = (٣ + ١)^{٢} + (–٢ – ٤)^{٢} + (٦ – ٢)^{٢} = ٦٨

∴ نق^{٢} = ($\frac{١}{٢}$ ﺃ ب)^{٢} = $\frac{١}{٤}$ (ﺃ ب)^{٢} = ١٧

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١١٠

عين مركز و طول نصف قطر الكرة التى معادلتها :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ س – ٨ ص + ٤ ع + ١ = ٠

الحل

∵ معادلة الكرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ س – ٨ ص + ٤ ع + ١ = ٠

∴ مركز الكرة (– $\frac{١}{٢}$ معامل س ، – $\frac{١}{٢}$ معامل ص ، – $\frac{١}{٢}$ معامل ع)

= (–٣ ، ٤ ، –٢)

، نق^{٢} = (–٣)^{٢} + (٤)^{٢} + (–٢)^{٢} – ١ = ٢٨

∴ نق = ٢ $\sqrt{٧}$ وحدة طول

حل آخر

نكتب معادلة الكرة على الصورة القياسية باستخدام إكمال المربع كما يلى :

(س^{٢} + ٦ س + ٩) + (ص^{٢} – ٨ ص + ١٦) + (ع^{٢} + ٤ ع + ٤) + ١ – (٩ + ١٦ + ٤) = ٠

∴ (س + ٣)^{٢} + (ص – ٤)^{٢} + (ع + ٢)^{٢} = ٢٨

∴ مركز الكرة هو : (–٣ ، ٤ ، –٢)

، نق = ٢ $\sqrt{٧}$ وحدة طول

حل تمارين (١ – ١) صفحة ١١١ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

(١) إذا كانت النقطة (س ، ص ، ع) تقع فى المستوى الإحداثى (س ص) فإن : ع = ...

(٢) المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يكونان المستوى الإحداثى .... الذى معادلته ....

(٣) الشكل المقابل : يمثل متوازى مستطيلات فى نظام إحداثى متعامد أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) فإن : إحداثيات النقطة ب هى .... و إحداثيات النقطة حـ هى ....

(٤) إذا كانت أ (١ ، –١ ، ٤) ، ب (٠ ، –٣ ، ٢) فإن إحداثيات نقطة منتصف $\overline{أب}$ هى ....

(٥) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، –١ ، ٤) و طول نصف قطرها ٥ وحدات هى ....

الحل

(١) ∵ النقطة تقع فى المستوى الإحداثى (س ص) ∴ ع = ٠

(٢) المستقيمان $\overleftrightarrow{سس'}$ ، $\overleftrightarrow{عع'}$ يكونان المستوى (س ع) الذى معادلته هى : ص = ٠

(٣) ∵ إحداثيات النقطة أ هى (٦ ، ٤ ، ٢) ، ∵ النقطة ب تقع فى المستوى الإحداثى (س ص) ∴ إحداثيات النقطة ب هى (٦ ، ٤ ، ٠)

، ∵ النقطة حـ تقع فى المستوى الإحداثى (س ع) ∴ إحداثيات النقطة حـ هى (٦ ، ٠ ، ٢)

(٤) إحداثيات نقطة المنتصف = $\left(\frac{١ + ٠}{٢} ، \frac{-١ - ٣}{٢} ، \frac{٤ + ٢}{٢} \right)$ = ($\frac{١}{٢}$ ، –٢ ، ٣)

(٥) معادلة الكرة هى : $(س - ٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٢٥$

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٦) بعد النقطة (٣ ، –١ ، ٢) عن المستوى الإحداثى (س ع) يساوى .... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) –١ (حـ) ٢ (ء) ١

(٧) طول العمود المرسوم من النقطة (–٢ ، ٣ ، ٤) على محور س يساوى .... وحدة طول

(أ) ٢ (ب) ٣ (حـ) ٥ (ء) ٤

(٨) إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التى طرفاها (–٣ ، ٢ ، ٤) ، (٥ ، ١ ، ٨) هى ....

(أ) (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٦) (ب) (٢ ، –١ ، ٤)

(حـ) (٨ ، –١ ، ٤) (ء) (١ ، –$\frac{٣}{٢}$ ، ٢)

(٩) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل و طول نصف قطرها ٥ وحدات هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٥$ (ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٠$

(حـ) $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٢٥$

(ء) $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥$

(١٠) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، –٣ ، ٤) و تمس المستوى الإحداثى (س ص) هى ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٤

(ب) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٩

(حـ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٦

(ء) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع + ٤)^{٢} = ١٦

الحل

(٦) بعد النقطة (٣ ، −١ ، ٢) عن المستوى الإحداثى (س ع)
= | −١ | = ١ وحدة طول

(٧) طول العمود = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = ٥ وحدة طول

(٨) إحداثيات نقطة المنتصف = ($\frac{−٣ + ٥}{٢}$ ، $\frac{٢ + ١}{٢}$ ، $\frac{٤ + ٨}{٢}$) = (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٦)

(٩) ∵ مركز الكرة هو (٠ ، ٠ ، ٠) ، نق = ٥ وحدة طول
∴ معادلة الكرة هى : س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٢٥

(١٠) ∵ مركز الكرة هو (٢ ، −٣ ، ٤) و تمس المستوى الإحداثى (س ص)
∴ نق = | ٤ | = ١٦ وحدة طول
∴ معادلة الكرة هى : (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب فى كل مما يلى :

(أ) أ (٧ ، ٠ ، ٤) ، ب (١ ، ٠ ، ٠)   (ب) أ (٤ ، ١ ، ٩) ، ب (٢ ، ١ ، ٩)

(حـ) أ (١ ، ١ ، −٧) ، ب (−٢ ، −٣ ، −٧)

الحل

(أ) ∵ (أ ب)^{٢} = (٧ − ١)^{٢} + (٠ − ٠)^{٢} + (٤ − ٠)^{٢} = ٥٢
∴ أ ب = ٢ $\sqrt{١٣}$ وحدة طول

(ب) ∵ (أ ب)^{٢} = (٤ − ٢)^{٢} + (١ − ١)^{٢} + (٩ − ٦)^{٢} = ١٣
∴ أ ب = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول

(حـ) ∵ (أ ب)^{٢} = (١ + ٢)^{٢} + (١ + ٣)^{٢} + (−٧ + ٧)^{٢} = ٢٥
∴ أ ب = ٥ وحدة طول

(١٢) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط الآتية هو مثلث قائم الزاوية و أوجد مساحته

(أ) (−٢ ، ٥ ، ٢) ، (٠ ، ٠ ، ٢) ، (٠ ، ٤ ، ٠)

(ب) (−٤ ، ٤ ، ١) ، (٢ ، −١ ، ٢) ، (−٢ ، ٥ ، ٠)

الحل

(أ) بفرض أن النقط هى : أ (−٢ ، ٥ ، ٢) ، ب (٠ ، ٠ ، ٢) ، حـ (٠ ، ٤ ، ٠)
∵ (أ ب)^{٢} = (٠ + ٢)^{٢} + (٠ − ٥)^{٢} + (٢ − ٢)^{٢} = ٢٩
∴ أ ب = $\sqrt{٢٩}$ وحدة طول
، ∵ (ب حـ)^{٢} = (٠ − ٠)^{٢} + (٤ − ٠)^{٢} + (٠ − ٢)^{٢} = ٢٠
∴ ب حـ = $\sqrt{٢٠}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ وحدة طول
، ∵ (أ حـ)^{٢} = (٠ + ٢)^{٢} + (٤ − ٥)^{٢} + (٠ − ٢)^{٢} = ٩
∴ أ حـ = $\sqrt{٩}$ = ٣ وحدة طول
، ∵ (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} ∴ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ
، مساحته = $\frac{١}{٢}$ × ٢ $\sqrt{٥}$ × ٣ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة مربعة

(ب) بفرض أن النقط هى : أ (−٤ ، ٤ ، ١) ، ب (٢ ، −١ ، ٢) ، حـ (−٢ ، ٥ ، ٠)
∵ (أ ب)^{٢} = (٢ + ٤)^{٢} + (−١ − ٤)^{٢} + (٢ − ١)^{٢} = ٦٢

∴ $أب = \sqrt{٦٢}$ وحدة طول

، ∵ $(ب\,حـ)^{٢} = (-٢-٢)^{٢} + (٥+١)^{٢} + (٠-٢)^{٢} = ٥٦$

∴ $ب\,حـ = \sqrt{٥٦}$ وحدة طول

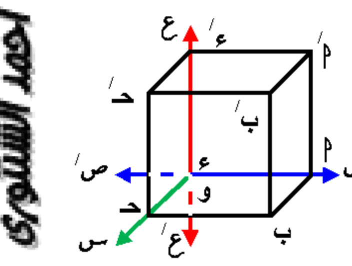
، ∵ $(أ\,حـ)^{٢} = (-٢+٤)^{٢} + (٥-٤)^{٢} + (٠-١)^{٢} = ٦$

∴ $أ\,حـ = \sqrt{٦}$ وحدة طول

، ∵ $(ب\,حـ)^{٢} + (أ\,حـ)^{٢} = (أب)^{٢}$ ∴ المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

، مساحته $= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٥٦} \times \sqrt{٦} = ٤\sqrt{٢١}$ وحدة مربعة

(١٣) الشكل المقابل يمثل مكعباً حجمه ٢٧ وحدة مكعبة أحد رؤوسه ينطبق على نقطة الأصل أوجد إحداثيات باقى الرؤوس



الحل

∵ حجم المكعب = ٢٧ وحدة مكعبة

∴ طول حرفه = ٣ وحدة طول ، بإعتبار رؤوس المكعب موضحة بالشكل المقابل

، الرأس ء ينطبق على نقطة الأصل ∴ إحداثيات ء (٠ ، ٠ ، ٠)

، إحداثيات باقى الرؤوس هى : أ (٠ ، ٣ ، ٠) ، ب (٣ ، ٣ ، ٠) ، حـ (٣ ، ٠ ، ٠)

، أ/ (٠ ، ٣ ، ٣) ، ب/ (٣ ، ٣ ، ٣) ، حـ/ (٣ ، ٠ ، ٣) ، ء/ (٠ ، ٠ ، ٣)

(١٤) أثبت أن النقط (٧ ، ١ ، ٣) ، (٥ ، ٣ ، ك) ، (٣ ، ٥ ، ٣) تكون مثلثاً متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية ثم أوجد قيمة (قيم) ك التى تجعل المثلث متساوى الأضلاع

الحل

بفرض أن النقط هى : أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣ ، ك) ، حـ (٣ ، ٥ ، ٣)

∵ $(أب)^{٢} = (٥-٧)^{٢} + (٣-١)^{٢} + (ك-٣)^{٢} = ٨ + (ك-٣)^{٢}$

∴ $أب = \sqrt{٨ + (ك-٣)^{٢}}$ وحدة طول

، ∵ $(ب\,حـ)^{٢} = (٣-٥)^{٢} + (٥-٣)^{٢} + (٣-ك)^{٢}$

$= ٨ + (٣-ك)^{٢} = ٨ + (ك-٣)^{٢}$

∴ $ب\,حـ = \sqrt{٨ + (ك-٣)^{٢}}$ وحدة طول

، ∵ $(أ\,حـ)^{٢} = (٣-٧)^{٢} + (٥-١)^{٢} + (٣-٣)^{٢} = ٣٢$

∴ $أ\,حـ = \sqrt{٣٢} = ٤\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ∵ أ ب = ب حـ لجميع قيم ك الحقيقية

∴ المثلث أ ب حـ متساوى الساقين لجميع قيم ك الحقيقية

ليكون المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ أ ب = أ حـ = ب حـ　　∴ $(أب)^{٢} = (أ\,حـ)^{٢}$

∴ $٨ + (ك-٣)^{٢} = ٣٢$　　∴ $(ك-٣)^{٢} = ٢٤$

∴ $ك - ٣ = \pm ٢\sqrt{٦}$　　∴ $ك = ٣ \pm ٢\sqrt{٦}$

(١٥) أوجد إحداثيات منتصف $\overline{أب}$ فى كل مما يأتى :

(أ) (٣ ، −١ ، ٤) ، (٢ ، ٠ ، −١)　　(ب) (−٣ ، ٥ ، ٥) ، (−٦ ، ٤ ، ٨)

الحل

(أ) إحاثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{٣+٢}{٢} ، \frac{-١+٠}{٢} ، \frac{٤-١}{٢} \right)$

$= \left(\frac{٥}{٢} ، -\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} \right)$

(ب) إحاثيات نقطة المنتصف $= \left(\frac{-٣-٦}{٢} ، \frac{٥+٤}{٢} ، \frac{٥+٨}{٢} \right)$

$= \left(-\frac{٩}{٢} ، \frac{٩}{٢} ، \frac{١٣}{٢} \right)$

(١٦) إذا كانت حـ (−١ ، ٤ ، ٠) منتصف $\overline{أب}$ حيث ب (٤ ، −٢ ، ١) أوجد إحداثيات النقطة أ

الحل

بفرض أن : إحداثيات نقطة أ هى (س ، ص ، ع)

، ∵ حـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ (−١ ، ٤ ، ٠) = ((س + ٤)/٢ ، (ص − ٢)/٢ ، (ع + ١)/٢)

∴ س + ٤ = −٢ ∴ س = −٦ ، ص − ٢ = ٨ ∴ ص = ١٠

، ع + ١ = ٠ ∴ ع = −١ ∴ أ (−٦ ، ١٠ ، −١)

(١٧) أوجد معادلة الكرة إذا كان :

(أ) مركزها النقطة (٣ ، −١ ، ٢) و طول نصف قطرها √٧

(ب) (٣ ، ٤ ، −٣) ، (٠ ، ٢ ، ١) نهايتا قطر فيها

(حـ) مركزها النقطة (١ ، −٦ ، ١) و تمر بالنقطة (٢ ، −١ ، ٥)

الحل

(أ) ∵ مركز الكرة هو : (٣ ، −١ ، ٢) ، نق = √٧

∴ معادلة الكرة هى : (س − ٣)^2 + (ص + ١)^2 + (ع − ٢)^2 = ٧

(ب) بفرض أن : أ (٣ ، ٤ ، −٣) ، ب (٠ ، ٢ ، ١)

مركز الكرة هو نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ أى ((٣ + ٠)/٢ ، (٤ + ٢)/٢ ، (−٣ + ١)/٢)

= (٣/٢ ، ٣ ، −١)

، طول نصف قطرها هو البعد بين مركز الكرة و نقطة أ

∴ نق^2 = (٣ − ٣/٢)^2 + (٤ − ٣)^2 + (−١ − ١)^2 = ٢٩/٤

∴ معادلة الكرة هى : (س − ٣/٢)^2 + (ص − ٣)^2 + (ع + ١)^2 = ٢٩/٤

(حـ) طول نصف قطرها هو البعد بين مركز الكرة و النقطة المعطاة

∴ نق^2 = (١ − ٢)^2 + (−٦ + ١)^2 + (١ − ٥)^2 = ٤٢

∴ معادلة الكرة هى : (س − ١)^2 + (ص + ٦)^2 + (ع − ١)^2 = ٤٢

(١٨) أوجد مركز و طول نصف الكرة فى كل مما يأتى :

(أ) س^2 + ص^2 + ع^2 = ٩

(ب) س^2 + ص^2 + ع^2 − ٢ س + ٤ ص = ٠

(حـ) ٢ س^2 + ٢ ص^2 + ٢ ع^2 − ٢ س − ٦ ص − ٤ ع + ٥ = ٠

الحل

(أ) ∵ س^2 + ص^2 + ع^2 = ٩

∴ مركز الدائرة هو : (٠ ، ٠ ، ٠) ، نق = √٩ = ٣

(ب) ∵ س^2 + ص^2 + ع^2 − ٢ س + ٤ ص = ٠

∴ مركز الكرة (−½ معامل س ، −½ معامل ص ، −½ معامل ع)

∴ مركز الدائرة هو : (١ ، −٢ ، ٠) ،

، نق^2 = (١)^2 + (−٢)^2 + (٠)^2 − ٠ = ٥ ∴ نق = √٥ وحدة طول

(جـ) ٢ س^2 + ٢ ص^2 + ٢ ع^2 − ٢ س − ٦ ص − ٤ ع + ٥ = ٠

بالقسمة ÷ ٢ ينتج : س^2 + ص^2 + ع^2 − س − ٣ ص − ٢ ع + ٥/٢ = ٠

∴ مركز الكرة (−½ معامل س ، −½ معامل ص ، −½ معامل ع)

∴ مركز الدائرة هو : (½ ، ٣/٢ ، ١) ،

، نق^2 = (½)^2 + (٣/٢)^2 + (١)^2 − ٥/٢ = ١ ∴ نق = ١ وحدة طول

(١٩) أوجد معادلة الكرة التى طول تصف قطرها ٣ وحدات و تمس مستويات الإحداثيات الموجبة

الحل

∵ الكرة تمس مستويات الإحداثيات الموجبة ، نق = ٣ وحدة طول

∴ مركز الكرة هو : (٣ ، ٣ ، ٣) ،

معادلة الكرة هى : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(٢٠) إذا كانت أ ∈ محور س ، ب ∈ محور ص ، حـ ∈ محور ع و كانت النقطة (١ ، -١ ، ٠) منتصف $\overline{أب}$ ، النقطة (٠ ، -١ ، ٢) منتصف $\overline{ب حـ}$ أوجد إحداثيات منتصف $\overline{أحـ}$

الحل

∵ أ ∈ محور س ∴ إحداثيات أ هى : (س ، ٠ ، ٠)

، ∵ ب ∈ محور ص ∴ إحداثيات ب هى : (٠ ، ص ، ٠)

، ∵ حـ ∈ محور ع ∴ إحداثيات حـ هى : (٠ ، ٠ ، ع)

، ∵ (١ ، -١ ، ٠) منتصف $\overline{أب}$ ∴ $(\frac{س}{٢} ، \frac{ص}{٢} ، ٠) = (١ ، -١ ، ٠)$

و منها : س = ٢ ، ص = -٢

، ∵ (٠ ، -١ ، ٢) منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ $(٠ ، \frac{ص}{٢} ، \frac{ع}{٢}) = (٠ ، -١ ، ٢)$

و منها : ص = -٢ ، ع = ٤

∴ إحداثيات منتصف $\overline{أحـ}$ = $(\frac{٢ + ٠}{٢} ، ٠ ، \frac{٠ + ٤}{٢}) = (١ ، ٠ ، ٢)$

(٢١) إذا قطع محور السينات الكرة :

$$(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع - ١)^٢ = ١٤$$

فى النقطتين أ ، ب فأوجد طول $\overline{أب}$

الحل

لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور السينات نضع : ص = ٠ ، ع = ٠ .

∴ $(س - ٢)^٢ + ٣ + ١ = ١٤$ ∴ $(س - ٢)^٢ = ٤$

∴ س - ٢ = ٢ و منها : س = ٤ أ، س - ٢ = -٢ و منها : س = ٠ .

∴ النقط هى : أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٠) أ، أ (٤ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ أ ب = ٤ وحدة طول

(٢٢) إذا كانت جميع النقط فى الفراغ التى على الصورة (س ، ص ، ٠) تقع فى المستوى الديكارتى (س ص) و معادلته هى : ع = ٠ .
فأوجد معادلة المستوى الذى تقع فيه جميع النقط فى الفراغ الذى على الصورة (س ، ص ، ٢)

الحل

∵ جميع النقط فى الفراغ التى على الصورة (س ، ص ، ٠) تقع فى المستوى الديكارتى (س ص) و معادلته هى : ع = ٠ .

∴ جميع النقط فى الفراغ التى على الصورة (س ، ص ، ٢) تقع فى المستوى الديكارتى (س ص) و معادلته هى : ع = ٢

(٢٣) أكتشف الخطأ : إذا كانت ب (-١ ، ٤ ، ٢) منتصف $\overline{أحـ}$ حيث أ (١ ، ٠ ، ٢) أوجد إحداثيات النقطة حـ

حل أشرف	حل زياد
$حـ = ((\frac{س_١ + س_٢}{٢}) ، (\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}) ، (\frac{ع_١ + ع_٢}{٢}))$ $= ((\frac{-١ + ١}{٢}) ، (\frac{٤ + ٠}{٢}) ، (\frac{٢ + ٢}{٢}))$ $= (٠ ، ٢ ، ٢)$	نفرض حـ (س ، ص ، ع) ∴ $\frac{١ + س}{٢} = -١ \leftarrow س = -٣$ $\frac{٠ + ص}{٢} = ٤ \leftarrow ص = ٨$ $\frac{٢ + ع}{٢} = ٢ \leftarrow ع = ٢$ ∴ حـ (-٣ ، ٨ ، ٢)

أى الحلين صواب ؟ و لماذا ؟

حل زياد هو الصحيح لأن : نقطة المنتصف هى ب

١ – ٢ المتجهات فى الفراغ

نعلم أن :

[١] الكميات القياسية :
هى كميات تحدد تماماً ب معرفة مقدارها فقط
مثل : الطول ، المساحة ، ....

الكميات المتجهة :
هى كميات تتحدد تماماً بمعرفة مقدارها و إتجاهها
مثل : القوة ، السرعة ، ....

[٢] القطعة المستقيمة الموجهة :
هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية و نقطة نهاية و إتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

[٣] المتجه :
يمثل بقطعة مستقيمة موجهة تحدد بمقدار (معيار المتجه) و اتجاه

متجه الموضع فى الفراغ :
يعرف متجه الموضع للنقطة أ ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) بالنسبة لنقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) على أنه القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل و نهايتها النقطة أ

و يرمز لمتجه موضع النقطة أ بالرمز $\overleftarrow{أ}$ أى أن :

$$\overleftarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$$

، تسمى كل من : $أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$ مركبة $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه محور س ، مركبة $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه محور ص ، مركبة $\overleftarrow{أ}$ فى اتجاه محور ع

معيار المتجه :
هو طول القطعة المستقيمة الموجهة التى تمثل المتجه
فإذا كان : $\overleftarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ فإن : من قانون البعد بين نقطتين

يكون : $\|\overleftarrow{أ}\| = \sqrt{(أ_{س})^2 + (أ_{ص})^2 + (أ_{ع})^2}$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١١٥

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (-١ ، ٤ ، ٢)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، ١ ، ٠)$ أوجد

(أ) $أ_{س} + ب_{ص}$ (ب) $\|\overleftarrow{أ}\| + \|\overleftarrow{ب}\|$

الحل

(أ) $أ_{س} + ب_{ص} = -١ + ١ = ٠$

(ب) $\|\overleftarrow{أ}\| + \|\overleftarrow{ب}\| = \sqrt{١ + ١٦ + ٤} + \sqrt{٩ + ١ + ٠} = \sqrt{٢١} + \sqrt{١٠}$

جمع المتجهات فى الفراغ :

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص} ، أ_{ع})$ ، $\overleftarrow{ب} = (ب_{س} ، ب_{ص} ، ب_{ع})$

فإن : $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (أ_{س} + ب_{س} ، أ_{ص} + ب_{ص} ، أ_{ع} + ب_{ع})$

$= (ح_{س} ، ح_{ص} ، ح_{ع})$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١١٥

إذا كان : $\overleftarrow{أ} = (٤ ، -٤ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-١ ، ٥ ، ٢)$ أوجد

الحل

$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (٤ ، -٤ ، ٠) + (-١ ، ٥ ، ٢) = (٣ ، ١ ، ٢)$

خواص عملية جمع المتجهات فى الفراغ :

لأى متجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^{3}$ فإن :

(١) خاصية الإنغلاق : $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^{3}$

(٢) خاصية الإبدال : $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}}$

(٣) خاصية التجميع : $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) + \overrightarrow{\text{جـ}} = \overrightarrow{\text{أ}} + (\overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{جـ}})$

(٤) العنصر المحايد الجمعى المتجه الصفرى : $\overrightarrow{\text{و}} = (٠، ٠، ٠)$

هو العنصر المحايد الجمعى فى ح^{3} أى أن :

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{و}} = \overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{أ}}$

(٥) المعكوس الجمعى : لكل $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{3}$ يوجد

$-\overrightarrow{\text{أ}} = (-\text{أ}_{\text{س}} ، -\text{أ}_{\text{ص}} ، -\text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{3}$ بحيث :

$\overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{أ}}) = (-\overrightarrow{\text{أ}}) + \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

ملاحظة (طرح متجهين) :

$\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{أ}} + (-\overrightarrow{\text{ب}})$

ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{3}$ ، و كان : $\text{ك} \in \text{ح}$ فإن :

$\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) = (\text{ك}\,\text{أ}_{\text{س}} ، \text{ك}\,\text{أ}_{\text{ص}} ، \text{ك}\,\text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{3}$

خواص ضرب المتجهات فى عدد حقيقى :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^{3}$ ، و كان : ك ، $\text{ل} \in \text{ح}$ فإن :

(١) خاصية التوزيع :

١) $\text{ك}\,(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}$

٢) $(\text{ك} + \text{ل})\,\overrightarrow{\text{أ}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}} + \text{ل}\,\overrightarrow{\text{أ}}$

(٢) خاصية الدمج :

$\text{ك}\,(\text{ل}\,\overrightarrow{\text{أ}}) = \text{ل}\,(\text{ك}\,\overrightarrow{\text{أ}}) = (\text{ك}\,\text{ل})\,\overrightarrow{\text{أ}}$

ملاحظة :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} \in \text{ح}^{3}$ ، $\text{ك} \in \text{ح}$ ، و كان :

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \|\text{ك}\,\overrightarrow{\text{ب}}\|$ فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = |\text{ك}| \,.\, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١١٦

إذا كان : $\overrightarrow{\text{جـ}} = (٢، -٣، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ء}} = (٠، ٢، -٢)$

(أ) أوجد : $٥\,\overrightarrow{\text{جـ}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ء}}$

(ب) إذا كان : $٣\,\overrightarrow{\text{أ}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{جـ}}$

الحل

(أ) $٥\,\overrightarrow{\text{جـ}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ء}} = ٥(٢، -٣، ١) - ٢(٠، ٢، -٢)$

$= (١٠، -١٥، ٥) + (٠، -٤، ٤) = (١٠، -١٩، ٩)$

(ب) $\because ٣\,\overrightarrow{\text{أ}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{جـ}}$

$\therefore ٣\,\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} + ٤\,\overrightarrow{\text{ء}} = (٢، -٣، ١) + ٤\,(٠، ٢، -٢)$

$= (٢، -٣، ١) + (٠، ٨، -٨) = (٢، ٥، -٧)$

$\overrightarrow{\text{أ}} = \frac{١}{٣}\,(٢، ٥، -٧) = (\frac{٢}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، -\frac{٧}{٣})$

تساوى المتجهات فى الفراغ :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} \text{ ، } \text{ب}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{ب}_{\text{ع}})$ فإن :

$\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}}$ إذا و فقط إذا كان : $\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١١٧

إذا كان : $(٢\text{س} + ١ \text{ ، } ٥ \text{ ، } \text{ك} + ٤) = (-١ \text{ ، } \text{ص}^٢ - ٤ \text{ ، } \text{س} + ١)$

فما قيمة : س ، ص ، ك

الحل

$\because (٢\text{س} + ١ \text{ ، } ٥ \text{ ، } \text{ك} + ٤) = (-١ \text{ ، } \text{ص}^٢ - ٤ \text{ ، } \text{س} + ١)$

$\therefore ٢\text{س} + ١ = -١$ $\therefore ٢\text{س} = -٢$ $\therefore \text{س} = -١$

، $\text{ص}^٢ - ٤ = ٥$ $\therefore \text{ص}^٢ = ٩$ $\therefore \text{ص} = \pm ٣$

، $\text{ك} + ٤ = \text{س} + ١$ $\therefore \text{ك} + ٤ = ٠$ $\therefore \text{ك} = -٤$

متجه الوحدة :

هو المتجه الذى معياره يساوى وحدة الأطوال

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١١٧

بين أى المتجهات الآتية يمثل متجه وحدة

$\overrightarrow{\text{أ}} = \left(\frac{١}{٣} \text{ ، } \frac{٢}{٣} \text{ ، } \frac{٢}{٣}\right)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \left(\frac{١}{٥} \text{ ، } \frac{٤}{٥} \text{ ، } \frac{-\sqrt{٥}}{٥}\right)$

الحل

$\because \|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + \frac{٤}{٩}} = ١$ $\therefore \overrightarrow{\text{أ}}$ يمثل متجه وحدة

، $\because \|\overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{\frac{١}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} + \frac{٥}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٢٢}{٢٥}} \neq ١$ $\therefore \overrightarrow{\text{ب}}$ لا يمثل متجه وحدة

متجهات الوحدة الأساسية ($\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$) :

هى قطع مستقيمة موجهة بدايتها نقطة الأصل و معيارها وحدة الأطوال و اتجاهها هو الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س ، ص ، ع على الترتيب أى أن :

$\overrightarrow{\text{س}} = (١ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ٠)$ ، $\overrightarrow{\text{ص}} = (٠ \text{ ، } ١ \text{ ، } ٠)$ ، $\overrightarrow{\text{ع}} = (٠ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ١)$

، $\|\overrightarrow{\text{س}}\| = ١$ ، $\|\overrightarrow{\text{ص}}\| = ١$ ، $\|\overrightarrow{\text{ع}}\| = ١$

إجابة تفكير ناقد صفحة ١١٧

عبر عن المتجهات $(-١ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ٠)$ ، $(٠ \text{ ، } -١ \text{ ، } ٠)$ ، $(٠ \text{ ، } ٠ \text{ ، } -١)$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

الحل

$(-١ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ٠) = -\overrightarrow{\text{س}}$ ، $(٠ \text{ ، } -١ \text{ ، } ٠) = -\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $(٠ \text{ ، } ٠ \text{ ، } -١) = -\overrightarrow{\text{ع}}$

التعبير عن متجه فى الفراغ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^٣$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ يمكن كتابته على الصورة : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} \text{ ، } ٠ \text{ ، } ٠) + (٠ \text{ ، } \text{أ}_{\text{ص}} \text{ ، } ٠) + (٠ \text{ ، } ٠ \text{ ، } \text{أ}_{\text{ع}})$

$= \text{أ}_{\text{س}} (١ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ٠) + \text{أ}_{\text{ص}} (٠ \text{ ، } ١ \text{ ، } ٠) + \text{أ}_{\text{ع}} (٠ \text{ ، } ٠ \text{ ، } ١)$

$= \text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١١٨

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = -٣ \overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}} + ٥ \overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -٢ \overrightarrow{\text{ع}} + ٣ \overrightarrow{\text{س}}$ أوجد :

(أ) $٣\,\overleftarrow{\text{أ}} - ٥\,\overleftarrow{\text{ب}}$ (ب) $\|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}\|$

الحل

(أ) $٣\,\overleftarrow{\text{أ}} - ٥\,\overleftarrow{\text{ب}} = -٩\,\overleftarrow{\text{ص}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ع}} + ١٥\,\overleftarrow{\text{س}} + ١٠\,\overleftarrow{\text{ع}} - ١٥\,\overleftarrow{\text{س}}$

$= -٩\,\overleftarrow{\text{ص}} + ٧\,\overleftarrow{\text{ع}}$

(ب) ∵ $\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}} = -٣\,\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}} + ٥\,\overleftarrow{\text{س}} + ٢\,\overleftarrow{\text{ع}} - ٣\,\overleftarrow{\text{س}}$

$= ٢\,\overleftarrow{\text{س}} - ٣\,\overleftarrow{\text{ص}} + \overleftarrow{\text{ع}}$

∴ $\|\overleftarrow{\text{أ}} - \overleftarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{٤ + ٩ + ١} = \sqrt{١٤}$

التعبير عن قطعة مستقيمة موجهة فى الفراغ بدلالة إحداثيات طرفيها :

بفرض أن : أ ، ب نقطتين فى الفراغ ،
متجها موضعهما بالنسبة لنقطة الأصل هما :
$\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ على الترتيب

∵ $\overleftarrow{\text{و أ}} + \overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{و ب}}$

∴ $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{و ب}} - \overleftarrow{\text{و أ}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$

ملاحظة :

$\overleftarrow{\text{أ ب}} = -\,\overleftarrow{\text{ب أ}}$

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ١١٩

(أ) إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (٢ ، -٣ ، ٠)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (١ ، ٤ ، -١)$ أوجد $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

(ب) إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (١ ، ١ ، -٢)$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}} = (٤ ، -١ ، ٢)$ أوجد إحداثيات نقطة ب

الحل

(أ) $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}} = (١ ، ٤ ، -١) - (٢ ، -٣ ، ٠) = (-١ ، ٧ ، -١)$

(ب) ∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} - \overleftarrow{\text{أ}}$ ∴ $(٤ ، -١ ، ٢) = \overleftarrow{\text{ب}} - (١ ، ١ ، -٢)$

∴ $\overleftarrow{\text{ب}} = (٤ ، -١ ، ٢) + (١ ، ١ ، -٢) = (٥ ، ٠ ، ٠)$

∴ إحاثيات نقطة ب هى : $(٥ ، ٠ ، ٠)$

متجه الوحدة فى اتجاه متجه معلوم :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}}) \in \text{ح}^{٣}$ فإن : متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ يرمز له بالرمز : $\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أ}}$ يعطى : $\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \dfrac{\overleftarrow{\text{أ}}}{\|\overleftarrow{\text{أ}}\|}$

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ١٢٠

أوجد متجه الوحدة فى اتجاه كل من المتجهات الآتية :

$\overleftarrow{\text{أ}} = (٨ ، -٤ ، -٨)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{س}} - ٢\,\overleftarrow{\text{ص}} - \overleftarrow{\text{ع}}$ ،
$\overleftarrow{\text{جـ}} = ٣\,\overleftarrow{\text{س}} - ٤\,\overleftarrow{\text{ع}}$

الحل

$\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \dfrac{(٨ ، -٤ ، -٨)}{\sqrt{٦٤ + ١٦ + ٦٤}} = \left(\frac{٢}{٣} ، -\frac{١}{٣} ، -\frac{٢}{٣}\right)$

$\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{ب}} = \dfrac{(١ ، -٢ ، -١)}{\sqrt{١ + ٤ + ١}} = \left(\frac{١}{\sqrt{٦}} ، \frac{-٢}{\sqrt{٦}} ، \frac{-١}{\sqrt{٦}}\right)$

$\overleftarrow{\text{ى}}_{\text{جـ}} = \dfrac{(٣ ، ٠ ، -٤)}{\sqrt{٩ + ٠ + ١٦}} = \left(\frac{٣}{٥} ، ٠ ، -\frac{٤}{٥}\right)$

زوايا الاتجاه و جيوب تمام الاتجاه لمتجه فى الفراغ :

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) متجه فى الفراغ

و كانت ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحاور س ، ص ، ع على الترتيب فإن :

$أ_{س}$ = || $\overrightarrow{أ}$ || حتا $\theta_{س}$ ،

$أ_{ص}$ = || $\overrightarrow{أ}$ || حتا $\theta_{ص}$ ، $أ_{ع}$ = || $\overrightarrow{أ}$ || حتا $\theta_{ع}$

∴ $\overrightarrow{أ}$ = || $\overrightarrow{أ}$ || حتا $\theta_{س}$ $\overrightarrow{س}$ + || $\overrightarrow{أ}$ || حتا $\theta_{ص}$ $\overrightarrow{ص}$ + || $\overrightarrow{أ}$ || حتا $\theta_{ع}$ $\overrightarrow{ع}$

= || $\overrightarrow{أ}$ || (حتا $\theta_{س}$ $\overrightarrow{س}$ + حتا $\theta_{ص}$ $\overrightarrow{ص}$ + حتا $\theta_{ع}$ $\overrightarrow{ع}$)

تسمى ($\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$) زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

تسمى (حتا $\theta_{س}$ ، حتا $\theta_{ص}$ ، حتا $\theta_{ع}$) جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$

ملاحظات :

(١) حتا $\theta_{س}$ $\overrightarrow{س}$ + حتا $\theta_{ص}$ $\overrightarrow{ص}$ + حتا $\theta_{ع}$ $\overrightarrow{ع}$ تمثل متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ أى أن :

حتا^{2} $\theta_{س}$ + حتا^{2} $\theta_{ص}$ + حتا^{2} $\theta_{ع}$ = ١

(٢) جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى مركبات متجه الوحدة فى اتجاهه

أى : حتا $\theta_{س}$ = $\frac{أ_{س}}{||\overrightarrow{أ}||}$ ، حتا $\theta_{ص}$ = $\frac{أ_{ص}}{||\overrightarrow{أ}||}$ ، حتا $\theta_{ع}$ = $\frac{أ_{ع}}{||\overrightarrow{أ}||}$

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ١٢١

الشكل المقابل يمثل قوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٢٠٠ نيوتن

(أ) عبر عن القوة $\overrightarrow{ق}$ بالصورة الجبرية

(ب) أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة $\overrightarrow{ق}$

الحل

نفرض أن : $\overrightarrow{و أ}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق}$ بمقياس رسم معين ، من الرسم نجد :

أ = (٣ ، ٤ ، ٥) ∴ || $\overrightarrow{و أ}$ || = $\sqrt{٩ + ١٦ + ٢٥}$ = ٥ $\sqrt{٢}$

(أ) بفرض أن : $\overrightarrow{ق}$ = ك $\overrightarrow{و أ}$ = ك (٣ ، ٤ ، ٥) حيث : ك > ٠ (١)

∴ || $\overrightarrow{ق}$ || = ك × ٥ $\sqrt{٢}$ ∴ ٢٠٠ = ك × ٥ $\sqrt{٢}$

و منها : ك = ٢٠ $\sqrt{٢}$ بالتعويض فى (١) ينتج :

∴ $\overrightarrow{ق}$ = (٦٠ $\sqrt{٢}$ ، ٨٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٠٠ $\sqrt{٢}$)

(ب) حتا $\theta_{س}$ = $\frac{٦٠}{٢٠٠}$ $\sqrt{٢}$ = ٠,٤٢٤٣ و منها : $\theta_{س}$ = ٥٤َ ٦٤° ،

حتا $\theta_{ص}$ = $\frac{٨٠}{٢٠٠}$ $\sqrt{٢}$ = ٠,٥٦٥٧ و منها : $\theta_{ص}$ = ٣٣َ ٥٥° ،

حتا $\theta_{ع}$ = $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ $\sqrt{٢}$ = ٠,٧٠٧١ و منها : $\theta_{ع}$ = ٤٥°

حل تمارين (١ - ٢) صفحة ١٢١ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (-٣ ، ٤ ، ٢) فإن : || $\overrightarrow{أ}$ || = ...

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$
فإن : $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = ...

(٣) متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ حيث : $\overrightarrow{أ}$ = (-١ ، ٢ ، ٠) ،
$\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، -١ ، ٢) هو ....

(٤) المتجه $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ - ٢ $\overrightarrow{ع}$ يصنع زاوية قياسها ....
مع الاتجاه الموجب لمحور س

(٥) المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ يصنع زاوية قياسها ....
مع الاتجاه الموجب لمحور ع

الحل

(١) || $\overrightarrow{أ}$ || = $\sqrt{٩ + ١٦ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$

(٢) $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ = ($\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$) - (٣ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$)
= $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ + ٤ $\overrightarrow{ع}$

(٣) $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ - $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، -١ ، ٢) - (-١ ، ٢ ، ٠) = (٤ ، -٣ ، ٢)

$\overrightarrow{ى}_{أب}$ = $\frac{\overrightarrow{أب}}{||\overrightarrow{أب}||}$ = $\frac{(٤ ، -٣ ، ٢)}{\sqrt{١٦ + ٩ + ٤}}$ = ($\frac{٤}{\sqrt{٢٩}}$ ، $\frac{-٣}{\sqrt{٢٩}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٢٩}}$)

(٤) ∵ $\overrightarrow{ى}_{أ}$ = $\frac{\overrightarrow{أ}}{||\overrightarrow{أ}||}$ = $\frac{(٣ ، ١ ، -٢)}{\sqrt{٩ + ١ + ٤}}$ = ($\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{١٤}}$ ، $\frac{-٣}{\sqrt{١٤}}$)

∴ جتا $\theta_{س}$ = $\frac{٣}{\sqrt{١٤}}$ = ٠,٨٠١٨ و منها : $\theta_{س}$ = ٣٦° ٤٢′

(٥) ∵ $\overrightarrow{ى}_{ب}$ = $\frac{\overrightarrow{ب}}{||\overrightarrow{ب}||}$ = $\frac{(١ ، ٢ ، ٠)}{\sqrt{١ + ٤ + ٠}}$ = ($\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، ٠)

∴ جتا $\theta_{ع}$ = ٠ و منها : $\theta_{ع}$ = ٩٠°

أولاً : أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، ل ، ١) و كان : || $\overrightarrow{أ}$ || = ٣ وحدات
فإن : ل = ...

(أ) ٤ (ب) - ٤ (جـ) ± ٢ (ء) $\sqrt{١٤}$

(٧) إذا كان : ٣٠° ، ٧٠° ، θ زوايا الاتجاه لمتجه فإن :
إحدى قيم θ = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٢٦٠° (ء) ٦٨,٦١°

(٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (-١ ، ٥ ، -٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ١ ، ١) و كان :
$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{جـ}$ = $\overrightarrow{س}$ فإن : $\overrightarrow{جـ}$ = ...

(أ) $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$ (ب) - $\overrightarrow{س}$ - ٦ $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$

(جـ) $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ - ٣ $\overrightarrow{ع}$ (ء) $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ - $\overrightarrow{ع}$

(٩) جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، ١ ، ٢) هى ....

(أ) (-٢ ، ١ ، ٢) (ب) (- $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

(جـ) (- $\frac{٢}{٥}$ ، ٥ ، $\frac{٢}{٥}$) (ء) (-١ ، ١ ، ١)

الحل

(٦) ∵ || $\overrightarrow{أ}$ || = ٣ وحدات ∴ (|| $\overrightarrow{أ}$ ||)^{٢} = ٩

∴ ٤ + ل٢ + ١ = ٩ و منها : ل٢ = ٤ ∴ ل = ± ٢

(٧) ∵ ٣٠° ، ٧٠° ، θ زوايا الاتجاه لمتجه

∴ حتا٢ ٣٠° + حتا٢ ٧٠° + حتا٢ θ = ١ ∴ ٠,٧٥ + ٠,١١٧ + حتا٢ θ = ١

∴ حتا٢ θ = ٠,١٣٣ ∴ حتا θ = ٠,٣٦٤٧ ∴ إحدى قيم θ = ٦٨,٦١°

(٨) ∵ أ + ب + ح = س ∴ ح = س − أ − ب

∴ ح = س + س − ٥ ص + ٢ ع − ٣ س − ص − ع

= − س − ٣ ص + ع

(٩) ∵ ي_أ = أ / ||أ|| = (−٢ ، ١ ، ٢) / √(٤ + ١ + ٤) = (−٢/٣ ، ١/٣ ، ٢/٣)

∴ جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ هي : (−٢/٣ ، ١/٣ ، ٢/٣)

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٠) إذا كان : أ = (٢ ، −٣ ، ١) ، ب = (٤ ، −٢ ، ٠) ، ح = (−٦ ، ٠ ، ٣) أوجد كلاً من المتجهات الآتية :

(أ) أ + ب (ب) ٣ أ − ١/٣ ح (ح) ٣/٢ ب + ٢/٣ ح

الحل

(أ) أ + ب = (٢ ، −٣ ، ١) + (٤ ، −٢ ، ٠) = (٦ ، −٥ ، ١)

(ب) ٣ أ − ١/٣ ح = (٦ ، −٩ ، ٣) + (٢ ، ٠ ، −١) = (٨ ، −٩ ، ٢)

(ح) ٣/٢ ب + ٢/٣ ح = (٦ ، −٣ ، ٠) + (−٤ ، ٠ ، ٢) = (٢ ، −٣ ، ٢)

(١١) إذا كان : أ = ٢ س − ٣ ص + ٥ ع ، ب = ٤ ص − ٢ ع ، ح = ٤ س + ٥ ص − ٦ ع

أوجد كلاً من المتجهات الآتية :

(أ) ٢ أ + ب (ب) ١/٢ ب − ح (ح) ٣ أ − ٢ ح

الحل

(أ) ٢ أ + ب = ٤ س − ٦ ص + ١٠ ع + ٤ ص − ٢ ع

= ٤ س − ٢ ص + ٨ ع

(ب) ١/٢ أ − ح = س − ٣/٢ ص + ٥/٢ ع − ٤ س − ٥ ص + ٦ ع

= − ٤ س − ١٣/٢ ص + ١٧/٢ ع

(ح) ٣ أ − ٢ ح = ٦ س − ٩ ص + ١٥ ع − ٨ س − ١٠ ص + ١٢ ع

= − ٢ س − ١٩ ص + ٢٧ ع

(١٢) أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

(أ) أ = (٢ ، −١ ، ٠) (ب) ب = (١ ، ٢ ، −٢)

(ح) ح = ع (ء) ء = س − ٤ ص

الحل

(أ) ||أ|| = √(٤ + ١ + ٠) = √٥ (ب) ||ب|| = √(١ + ٤ + ٤) = ٣

(ح) ||ح|| = ||ع|| = ١ (ء) ||ء|| = √(١ + ١٦ + ٠) = √١٧

(١٣) إذا كان : أ = (ل ، ٠ ، ٠) ، س = (١ ، ٠ ، ٠) أثبت أن :

||أ|| = |ل| . ||س||

الحل

∵ ||أ|| = √ل٢ = |ل| ، ∵ ||س|| = ١

∴ |ل| = |ل| ||س|| ∴ ||أ|| = |ل| . ||س||

(١٤) إذا كانت قوة الشد فى الخيط تساوى ٢١ نيوتن أوجد المركبات الجبرية للقوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاهات محاور الإحداثيات

الحل

من هندسة الشكل :

ب (٢ ، ٠ ، ٠) ، أ (٠ ، ١ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

= (٢ ، ٠ ، ٠) − (٠ ، ١ ، ٢)

= (٢ ، −١ ، −٢) ، $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ٣

نفرض أن : $\overrightarrow{أب}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق}$ بمقياس رسم معين

∴ $\overrightarrow{ق}$ = ك $\overrightarrow{أب}$ = ك (٢ ، −١ ، −٢) حيث : ك > ٠ (١)

∴ $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ك × ٣ ∴ ٢١ = ك × ٣ و منها : ك = ٧

بالتعويض فى (١) ينتج : $\overrightarrow{ق}$ = ٧ (٢ ، −١ ، −٢) = (١٤ ، −٧ ، −١٤)

(١٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ يوازى المستوى الإحداثى (ص ع) ، ماذا يمكن أن تقول عن إحداثيات المتجه $\overrightarrow{أ}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أ}$ // المستوى الإحداثى (ص ع) ∴ $\overrightarrow{أ}$ ⊥ محور س

∴ $\theta_{س}$ = ٩٠° و منها : حتا $\theta_{س}$ = ٠

∴ $\overrightarrow{أ}$ = $\|\overrightarrow{أ}\|$ (٠ ، حتا $\theta_{ص}$ ، حتا $\theta_{ع}$)

= $\|\overrightarrow{أ}\|$ (٠ ، $\frac{أ_{ص}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$ ، $\frac{أ_{ع}}{\|\overrightarrow{أ}\|}$) = (٠ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$)

(١٦) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين فى $ح^{٣}$ ، هل :

$\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$ إذا كان الطرفان غير متساويين أى الطرفين هو الأكبر ؟

الحل

بفرض أن : $\overrightarrow{أ}$ = ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) ، $\overrightarrow{ب}$ = ($ب_{س}$ ، $ب_{ص}$ ، $ب_{ع}$)

∴ $(\|\overrightarrow{أ}\|)^2 = (أ_{س})^2 + (أ_{ص})^2 + (أ_{ع})^2$ ، $(\|\overrightarrow{ب}\|)^2 = (ب_{س})^2 + (ب_{ص})^2 + (ب_{ع})^2$

، ∵ $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = ($أ_{س} + ب_{س}$ ، $أ_{ص} + ب_{ص}$ ، $أ_{ع} + ب_{ع}$)

∴ $(\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|)^2 = (أ_{س})^2 + (أ_{ص})^2 + (أ_{ع})^2 + (ب_{س})^2 + (ب_{ص})^2 + (ب_{ع})^2$

$+ ٢ (أ_{س} ب_{س} + أ_{ص} ب_{ص} + أ_{ع} ب_{ع})$

$= (\|\overrightarrow{أ}\|)^2 + (\|\overrightarrow{ب}\|)^2 + ٢ (أ_{س} ب_{س} + أ_{ص} ب_{ص} + أ_{ع} ب_{ع})$

∴ $(\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|)^2 \le (\|\overrightarrow{أ}\|)^2 + (\|\overrightarrow{ب}\|)^2$ بأخذ الجذر التربيعى الموجب للطرفين :

∴ $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| \le \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

(١٧) أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره ٥ وحدات و يصنع مع محاور الإحداثيات زوايا اتجاه متساوية فى القياس

الحل

∵ $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع}$ ∴ حتا $\theta_{س}$ = حتا $\theta_{ص}$ = حتا $\theta_{ع}$ = حتا θ

، ∵ $حتا^2\theta_{س} + حتا^2\theta_{ص} + حتا^2\theta_{ع} = ١$ ∴ $حتا^2\theta + حتا^2\theta + حتا^2\theta = ١$

∴ ٣ $حتا^2\theta$ = ١ ∴ $حتا^2\theta = \frac{١}{٣}$ ∴ حتا $\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}} = \pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

∴ $\overrightarrow{أ}$ = ٥ × ($\pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ، $\pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ، $\pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$)

= $\pm \frac{٥}{٣}\sqrt{٣}$ (١ ، ١ ، ١) = $\pm \frac{٥}{٣}\sqrt{٣}$ ($\hat{س}$ ، $\hat{ص}$ ، $\hat{ع}$)

٣ – ١ ضرب المتجهات

مركبة (مسقط) متجه فى اتجاه متجه آخر :

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما θ فإن :

مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $\| \overrightarrow{أ} \|$ حتا θ

ملاحظات :

(١) حاصل ضرب معيار المتجه $\overrightarrow{ب}$ × مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{ب}$ = $\| \overrightarrow{ب} \| \, \| \overrightarrow{أ} \|$ حتا θ

و القيمة المطلقة لهذا المقدار تعبر عن مساحة المستطيل الذى بعداه $\overrightarrow{ب}$ و مركبة المتجه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$

(٢) θ هى قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ لذا عند تحديد الزاوية θ يجب مراعاة أن : يكون المتجهين خارجين (أو داخلين) من (أو فى) نفس النقطة كما بالشكلين المقابلين :

الضرب القياسى لمتجهين :

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما θ فإن :
مساحة المستطيل الذى بعداه معيار أحد المتجهين و مركبة المتجه الآخر عليه تعرف بالضرب القياسى للمتجهين و يرمز له بالرمز : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}$

أى أن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \| \overrightarrow{أ} \| \, \| \overrightarrow{ب} \|$ حتا θ

ملاحظات :

(١) حاصل الضرب القياسى لمتجهين كمية قياسية قد تكون موجبة أو سالبة أو تساوى صفراً

(٢) θ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين حيث $\theta \in [٠ ، \pi]$

(٣) إذا كان : θ قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ فإن :

١) إذا كان : $٠° < \theta < ٩٠°$
فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} > ٠$ " موجب "

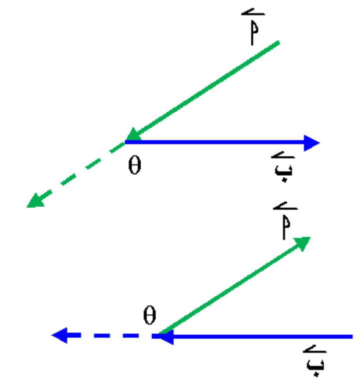
٢) إذا كان : $٩٠° < \theta < ١٨٠°$
فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} < ٠$ " سالب "

٣) إذا كان : $\theta = ٩٠°$ فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$
و يكون : $\overrightarrow{أ} \perp \overrightarrow{ب}$

٤) إذا كان : $\theta = ٠°$ فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \| \overrightarrow{أ} \| \, \| \overrightarrow{ب} \|$
و يكون : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيين و لهما نفس الاتجاه

٥) إذا كان : $\theta = ١٨٠°$ فإن : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = - \| \overrightarrow{أ} \| \, \| \overrightarrow{ب} \|$
و يكون : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متوازيين و فى اتجاهين متضادين

(٤) إذا كانت إحدى القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لأحد المتجهين خارجة من نقطة (و) مثلاً و الأخرى داخلة فى نقطة (و) فإن الزاوية الصغرى بينهما تكون هى الزاوية المحصورة بين إحدى القطعتين و إمتداد الأخرى من جهة (و) كما بالشكلين المقابلين :



إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٢٤

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما ١٣٥° و كان :

$\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ١٠$ أوجد : $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}$

الحل

$\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\|$ حتا ١٣٥° $= ٦ \times ١٠ \times - \frac{١}{\sqrt{٢}} = - ١٥ \sqrt{٣}$

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٢٤

ما الحالات التى يكون فيها حاصل الضرب القياسى يساوى الصفر ؟

الحل

حاصل الضرب القياسى لمتجهين يساوى الصفر إذا كان :

(١) المتجهين متعامدين

أى عندما يكون : الزاوية الصغرى بينهما قائمة " قياسها = ٩٠° "

(٢) أحد المتجهين أو كلاهما متجه صفرى

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٢٤

إذا كانت $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

فأوجد : $\overrightarrow{س} \bullet \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ص} \bullet \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{س} \bullet \overrightarrow{ع}$

الحل

توضيح :

يقال للمجموعة { $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$ } أنها :

مجموعة يمينية من متجهات الوحدة لأنها

تتبع قاعدة اليد اليمنى

مع ملاحظة أنها متجهات متعامدة مثنى مثنى

و الشكل المقابل يوضح الدوران بين هذه المتجهات

$\overrightarrow{س} \bullet \overrightarrow{ص} = \|\overrightarrow{س}\| \, \|\overrightarrow{ص}\|$ حتا ٩٠° $= ١ \times ١ \times ٠ = ٠$

بالمثل : $\overrightarrow{ص} \bullet \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س} \bullet \overrightarrow{ع} = ٠$

خواص الضرب القياسى :

لأى ثلاث متجهات $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ يكون :

(١) $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{أ}$ خاصية الإبدال

(٢) $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|^{٢}$

(٣) $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متعامدين

" شرط تعامد متجهين "

(٤) $\overrightarrow{أ} \bullet (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{حـ}) = \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{حـ}$

خاصية التوزيع

(٥) $(ك \overrightarrow{أ}) \bullet \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \bullet (ك \overrightarrow{ب}) = ك (\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب})$

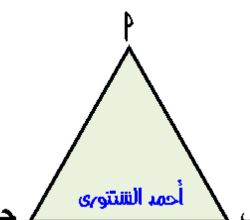
حيث : ك عدد حقيقى

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٢٦

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٨ سم أوجد كلاً من :

(أ) $\overrightarrow{أ ب} \bullet \overrightarrow{أ حـ}$ (ب) $\overrightarrow{أ ب} \bullet \overrightarrow{ب حـ}$ (حـ) $(٢ \overrightarrow{أ ب}) \bullet (٣ \overrightarrow{حـ ب})$

الحل



(أ) $\overrightarrow{أ ب} \bullet \overrightarrow{أ حـ} = \|\overrightarrow{أ ب}\| \, \|\overrightarrow{أ حـ}\|$ حتا ٦٠°

$= ٨ \times ٨ \times \frac{١}{٢} = ٣٢$

(ب) $\overrightarrow{أ ب} \bullet \overrightarrow{ب حـ} = - \overrightarrow{ب أ} \bullet \overrightarrow{ب حـ}$

$= - \|\overrightarrow{ب أ}\| \, \|\overrightarrow{ب حـ}\|$ حتا ٦٠°

$= - ٨ \times ٨ \times \frac{١}{٢} = - ٣٢$

(حـ) $(٢ \overrightarrow{أ ب}) \bullet (٣ \overrightarrow{حـ ب}) = ٦ (\overrightarrow{أ ب} \bullet \overrightarrow{حـ ب})$

$= ٦ \; \|\overrightarrow{\text{أب}}\| \; \|\overrightarrow{\text{حـب}}\|$ حتا ٦٠° $= ٦ \times ٨ \times ٨ \times \frac{١}{٢} = ١٩٢$

الضرب القياسى لمتجهات الوحدة الأساسية :

إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة فإن :

(١) $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{س}}\| \; \|\overrightarrow{\text{س}}\|$ حتا ٠° $= ١ \times ١ \times ١ = ١$

(٢) $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = \|\overrightarrow{\text{س}}\| \; \|\overrightarrow{\text{ص}}\|$ حتا ٩٠° $= ١ \times ١ \times ٠ = ٠$

و بصفة عامة :

١) $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{ص}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}} \bullet \overrightarrow{\text{ع}} = ١$ ،

٢) $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ص}} \bullet \overrightarrow{\text{س}} = \overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{ع}} \bullet \overrightarrow{\text{س}}$

$= \overrightarrow{\text{ص}} \bullet \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{ع}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = ٠$

الضرب القياسى لمتجهين فى النظام الإحداثى المتعامد :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$ ،

$\overrightarrow{\text{ب}} = \text{ب}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$ فإن :

$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = (\text{أ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}) \bullet$

$(\text{ب}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}})$

$= \text{أ}_{\text{س}} \text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}} \text{ب}_{\text{ع}}$

" ينتج ذلك باستخدام خاصية التوزيع ، و الضرب القياسى لمتجهات الوحدة الأساسية "

ملاحظة :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}})$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}})$ فى المستوى الإحداثى (س ص) فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}} \text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}} \text{ب}_{\text{ص}}$

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٢٦

أوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ فى كل من الحالات الآتية :

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}} = (-١ ، ٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٤ \overrightarrow{\text{س}} - ٢ \overrightarrow{\text{ص}} + ٥ \overrightarrow{\text{ع}}$

ماذا تستنتج ؟

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢ \overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ص}} - ٣ \overrightarrow{\text{س}}$

الحل

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = (-١ ، ٣ ، ٢) \bullet (٤ ، -٢ ، ٥) = -٤ - ٦ + ١٠ = ٠$

نستنتج : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

(ب) $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، -١) \bullet (-٣ ، ١) = -٦ - ١ = -٧$

الزاوية بين متجهين :

نعلم أن :

$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \; \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ حتا θ

حيث : θ قياس الزاوية بين المتجهين غير الصفريين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $٠° \le \theta \le ١٨٠°$

∴ حتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \; \|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

حالات خاصة :

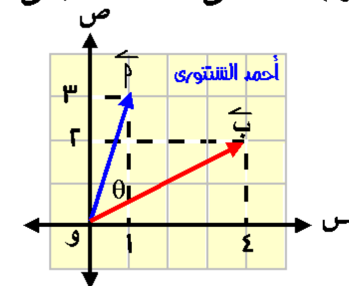
(١) إذا كان : حتا $\theta = ١$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان و فى نفس الاتجاه

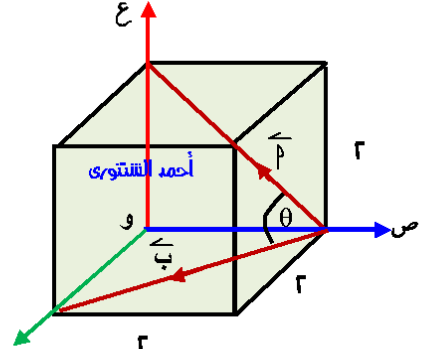
(٢) إذا كان : حتا $\theta = -١$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيان و فى اتجاهين متضادين

(٣) إذا كان : حتا $\theta = ٠$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدان

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٢٧

أوجد θ فى كل مما يأتى :





الحل

(أ) فى الشكل الأول : $\overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٣)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٤ ، ٢)$

$$\therefore \text{حتا } \theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{(١ ، ٣) \bullet (٤ ، ٢)}{\sqrt{١ + ٩} \, \sqrt{١٦ + ٤}} = \frac{٤ + ٦}{\sqrt{١٠} \, \sqrt{٢٠}}$$

$$= \frac{١}{\sqrt{٢}} \qquad \therefore \theta = ٤٥^\circ$$

فى الشكل الثانى : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٠ ، ٠ ، ٢) - (٠ ، ٢ ، ٠) = (٠ ، -٢ ، ٢)$

، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٠ ، ٠) - (٠ ، ٢ ، ٠) = (٢ ، -٢ ، ٠)$

$$\therefore \text{حتا } \theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{(٠ ، -٢ ، ٢) \bullet (٢ ، -٢ ، ٠)}{\sqrt{٠ + ٤ + ٤} \, \sqrt{٤ + ٤ + ٠}} = \frac{٤}{\sqrt{٨} \, \sqrt{٨}}$$

$$= \frac{١}{٢} \qquad \therefore \theta = ٦٠^\circ$$

مركبة (مسقط) متجه فى اتجاه متجه آخر :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين فإن :

مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ و يرمز لها ($\text{أ}_{\text{ب}}$) هى : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ حتا } \theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$

ملاحظات :

(١) θ هى قياس الزاوية الصغرى بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

(٢) مركبة المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ تسمى المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$

(٣) المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (المركبة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$) × (متجه وحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{ب}}$) =

$$\left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} \right) \left(\frac{\overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} \right) = \left(\frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{(\|\overrightarrow{\text{ب}}\|)^{٢}} \right) \overrightarrow{\text{ب}}$$

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٢٨

الشكل المقابل يمثل مكعباً طول حرفه ٢ وحدة

أوجد مسقط $\overrightarrow{\text{وأ}}$ على المتجه $\overrightarrow{\text{حـ ب}}$

الحل

من الشكل نجد : و $(٠ ، ٠ ، ٠)$ ، أ $(٢ ، ٢ ، ٢)$ ، ب $(٠ ، ٠ ، ٢)$ ، حـ $(٢ ، ٢ ، ٠)$

$\therefore \overrightarrow{\text{وأ}} = (٢ ، ٢ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ب}} = (-٢ ، -٢ ، ٢)$

، $\overrightarrow{\text{وأ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ ب}} = (٢ ، ٢ ، ٢) \bullet (-٢ ، -٢ ، ٢) = -٤ - ٤ + ٤ = -٤$

، $\|\overrightarrow{\text{حـ ب}}\| = \sqrt{٤ + ٤ + ٤} = \sqrt{١٢} = ٢\sqrt{٣}$

، مسقط $\overrightarrow{\text{وأ}}$ على المتجه $\overrightarrow{\text{حـ ب}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{وأ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ ب}}}{\|\overrightarrow{\text{حـ ب}}\|} = -\dfrac{٢}{٣}\sqrt{٣}$

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٢٨

متى تنعدم مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر ؟

الحل

تنعدم مركبة متجه فى اتجاه متجه آخر فى الحالات التالية :

(١) المتجهين متعامدين

أى عندما يكون : الزاوية الصغرى بينهما قائمة " قياسها = ٩٠° "

(٢) أحد المتجهين أو كلاهما متجه صفرى

استخدام الضرب القياسى لايجاد الشغل المبذول من قوة :

إذا أثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم فحركته إزاحة $\overrightarrow{ف}$

فإننا نقول أن : القوة بذلت شغلاً

و يمكن إيجاد هذا الشغل باستخدام العلاقة :

$$ش = \overrightarrow{ق} \bullet \overrightarrow{ف} = \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\| \text{ حتا } \theta$$

ملاحظات :

(١) إذا كان اتجاه القوة فى نفس اتجاه الإزاحة ($\theta = ٠^\circ$) فإن :

$$ش = \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$$

(٢) إذا كان اتجاه القوة فى عكس اتجاه الإزاحة ($\theta = ١٨٠^\circ$) فإن :

$$ش = - \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\|$$

(٣) إذا كان اتجاه القوة عمودية على اتجاه الإزاحة ($\theta = ٩٠^\circ$)

فإن : ش = صفر

(٤) وحدة قياس الشغل هى وحدة قياس القوة × وحدة قياس الازاحة

فإذا كانت :

١) وحدة قياس القوة هى النيوتن ، و وحدة قياس الازاحة هى المتر فإن : وحدة قياس الشغل هى الجول

٢) وحدة قياس القوة هى الداين ، و وحدة قياس الازاحة هى السنتيمتر فإن : وحدة قياس الشغل هى الأرج

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ١٢٩

يتحرك جسيم تحت تأثير القوة : $\overrightarrow{ق} = -٦ \, \overrightarrow{س} + ٨ \, \overrightarrow{ص}$ من النقطة أ (−١ ، ٣) إلى النقطة ب (٤ ، ٧) أوجد الشغل المبذول من القوة

الحل

$\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٤ ، ٧) - (-١ ، ٣) = (٥ ، ٤)$

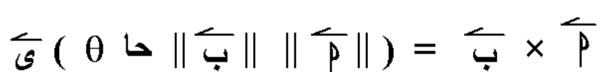
$\therefore ش = \overrightarrow{ق} \bullet \overrightarrow{ف} = (-٦ ، ٨) \bullet (٥ ، ٤)$

$= -٣٠ + ٣٢ = ٢$ وحدة شغل

الضرب الاتجاهى لمتجهين :

إذا كان : $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ متجهين فى مستوى يحصران بينهما زاوية قياسها θ ، و كان : $\vec{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودياً على المستوى الذى يحوى $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$

فإن : حاصل الضربى الاتجاهى للمتجهين $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ يعطى بالعلاقة :



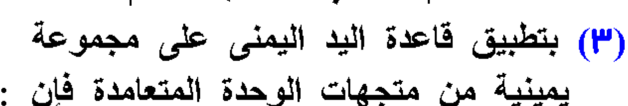
$$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\|\vec{\text{أ}}\| \, \|\vec{\text{ب}}\| \text{ حا } \theta)\, \vec{\text{ى}}$$

و يتحدد اتجاه متجه الوحدة $\vec{\text{ى}}$ (لأعلى أم لأسفل) طبقاً لقاعدة اليد اليمنى حيث تشير الأصابع المنحنية لليد اليمنى إلى الدوران من المتجه $\vec{\text{أ}}$ إلى المتجه $\vec{\text{ب}}$ فيشير الإبهام إلى اتجاه المتجه $\vec{\text{ى}}$

ملاحظات :

(١) حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين هو كمية متجهة

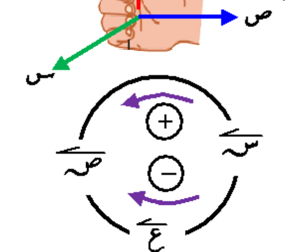
(٢) إذا كان : $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$ فى اتجاه $\vec{\text{ى}}$ فإن :



$\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}}$ تكون فى اتجاه $-\vec{\text{ى}}$

أى أن : $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}}$

(٣) بتطبيق قاعدة اليد اليمنى على مجموعة يمينية من متجهات الوحدة المتعامدة فإن :



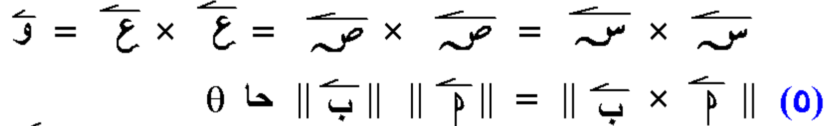
(١) $\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}}$

(٢) $\vec{\text{ص}} \times \vec{\text{س}} = -\vec{\text{ع}}$ ، $\vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ص}} = -\vec{\text{س}}$ ، $\vec{\text{س}} \times \vec{\text{ع}} = -\vec{\text{ص}}$

(٤) لأى متجه $\vec{\text{أ}}$ يكون : $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{أ}} = \vec{\text{و}}$

حيث : $\vec{\text{و}}$ المتجه الصفرى

و بالتالى يكون :



$$\vec{\text{س}} \times \vec{\text{س}} = \vec{\text{ص}} \times \vec{\text{ص}} = \vec{\text{ع}} \times \vec{\text{ع}} = \vec{\text{و}}$$

(٥) $\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = \|\vec{\text{أ}}\| \, \|\vec{\text{ب}}\| \text{ حا } \theta$

(٦) متجه الوحدة العمودى على مستوى $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ $= \dfrac{\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}}{\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|}$

(٧) $\text{حا } \theta = \dfrac{\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\|}{\|\vec{\text{أ}}\| \, \|\vec{\text{ب}}\|}$

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ١٣٢

إذا كان : $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = 65\, \vec{\text{ى}}$ ، و كان : $\|\vec{\text{أ}}\| = 5$ ، $\|\vec{\text{ب}}\| = 26$ أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$

الحل

$\because$ $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = (\|\vec{\text{أ}}\| \, \|\vec{\text{ب}}\| \text{ حا } \theta)\, \vec{\text{ى}}$ ، $\vec{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$

$\therefore$ $65\, \vec{\text{ى}} = (5 \times 26 \times \text{ حا } \theta)\, \vec{\text{ى}}$ و منها ينتج :

$\text{حا } \theta = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\theta = 30^\circ$ أو 150°

أحمد الشتنوى

الضرب الاتجاهى لمتجهين فى الإحداثيات الكارتيزية :

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = أ_{س}\overrightarrow{س} + أ_{ص}\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\overrightarrow{ع}$ ،

$\overrightarrow{ب} = ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع}$ فإن :

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (أ_{س}\overrightarrow{س} + أ_{ص}\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\overrightarrow{ع}) \times (ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع})$$

$$= (أ_{ص}ب_{ع} - أ_{ع}ب_{ص}) \overrightarrow{س} + (أ_{ع}ب_{س} - أ_{س}ب_{ع}) \overrightarrow{ص} + (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س}) \overrightarrow{ع}$$

" ينتج ذلك باستخدام خاصية التوزيع ، و الضرب الاتجاهى لمتجهات الوحدة الأساسية " و يمكن كتابة هذه الصورة على شكل محدد ٣ × ٣ كما يلى :

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \end{vmatrix}$$

حالة خاصة :

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (أ_{س} ، أ_{ص})$ ، $\overrightarrow{ب} = (ب_{س} ، ب_{ص})$ فى المستوى الإحداثى (س ص) فإن :

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ أ_{س} & أ_{ص} & ٠ \\ ب_{س} & ب_{ص} & ٠ \end{vmatrix} = (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س}) \overrightarrow{ع}$$

إجابة حاول أن تحل (١٠) صفحة ١٣١

إذا كان : $\| \overrightarrow{أ} \| = ٦$ ، و كانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هى على الترتيب : $\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ و كان : $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ٣ ، ٥)$

أوجد $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

الحل

$\because \overrightarrow{أ} = \| \overrightarrow{أ} \| (\text{حتا}\,\theta_{س} ، \text{حتا}\,\theta_{ص} ، \text{حتا}\,\theta_{ع})$

$\therefore \overrightarrow{أ} = ٦ (\frac{٢}{٣} ، -\frac{٢}{٣} ، \frac{١}{٣}) = (٤ ، -٤ ، ٢)$

$$\therefore \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٤ & -٤ & ٢ \\ -٢ & ٣ & ٥ \end{vmatrix} = -٢٦ \overrightarrow{س} - ٢٤ \overrightarrow{ص} + ٤ \overrightarrow{ع}$$

خواص حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين :

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهين قياس الزاوية بينهما θ فإن :

(١) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = - \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$ الضرب الاتجاهى عملية غير إبدالية

(٢) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإما : $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$

أو أحد المتجهين أو كلاهما يساوى $\overrightarrow{و}$

(٤) $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{ج}) = \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ج}$

خاصية التوزيع

(٥) $(ك \overrightarrow{أ}) \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{أ} \times (ك \overrightarrow{ب}) = ك (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب})$

حيث : ك عدد حقيقى

توازى متجهين :

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = أ_{س}\overrightarrow{س} + أ_{ص}\overrightarrow{ص} + أ_{ع}\overrightarrow{ع}$ ،

$\overrightarrow{ب} = ب_{س}\overrightarrow{س} + ب_{ص}\overrightarrow{ص} + ب_{ع}\overrightarrow{ع}$

فإن : $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ إذا و فقط إذا كان : $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$

أى أن : $(أ_{ص}ب_{ع} - أ_{ع}ب_{ص})\overrightarrow{س} + (أ_{ع}ب_{س} - أ_{س}ب_{ع})\overrightarrow{ص} + (أ_{س}ب_{ص} - أ_{ص}ب_{س})\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{و}$

أى أن : $أ_{ص}ب_{ع} = أ_{ع}ب_{ص}$ ، $أ_{ع}ب_{س} = أ_{س}ب_{ع}$ ، $أ_{س}ب_{ص} = أ_{ص}ب_{س}$

أى أن : $\frac{أ_{ص}}{ب_{ص}} = \frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$ ، $\frac{أ_{س}}{ب_{س}} = \frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$ ، $\frac{أ_{س}}{ب_{س}} = \frac{أ_{ص}}{ب_{ص}}$

أى أن : $\frac{أ_{س}}{ب_{س}} = \frac{أ_{ص}}{ب_{ص}} = \frac{أ_{ع}}{ب_{ع}}$ و بفرض أى من النسب = ك يكون :

$أ_{س} = ك\,ب_{س}$ ، $أ_{ص} = ك\,ب_{ص}$ ، $أ_{ع} = ك\,ب_{ع}$ ∴ $\overrightarrow{أ} = ك\,\overrightarrow{ب}$

و عندما تكون : $ك > ٠$ يكون المتجهان متوازيين و فى نفس الاتجاه

و عندما تكون : $ك < ٠$ يكون المتجهان متوازيين و فى اتجاهين متضادين

إجابة حاول أن تحل (١١) صفحة ١٣٣

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٢ ، -٣)$ ، و كان : $\overrightarrow{ب} // \overrightarrow{أ}$ فإذا كان : $\|\overrightarrow{ب}\| = ٣\sqrt{١٣}$ أوجد $\overrightarrow{ب}$

الحل

∵ $\overrightarrow{ب} // \overrightarrow{أ}$ ∴ $\overrightarrow{ب} = ك\,\overrightarrow{أ} = (٢ك ، -٣ك)$ (١)

، $\|\overrightarrow{ب}\| = |ك|\,\|\overrightarrow{أ}\|$ ∴ $٣\sqrt{١٣} = |ك| \times \sqrt{١٣}$

∴ $|ك| = ٣$ ∴ $ك = \pm ٣$ بالتعويض فى (١) ينتج :

$\overrightarrow{ب} = \pm(٦ ، -٩)$

المعنى الهندسى للضرب الاتجاهى لمتجهين :

نعلم أن :

$\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{أ}\|\,\|\overrightarrow{ب}\|$ حا $θ$

$= \|\overrightarrow{ب}\|\,(\|\overrightarrow{أ}\|$ حا $θ)$

$= \|\overrightarrow{ب}\| \times ل$ حيث : $ل = \|\overrightarrow{أ}\|$ حا $θ$

= مساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان متجاوران

= ضعف مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان

إجابة حاول أن تحل (١٢) صفحة ١٣٤

إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٢ ، -٤)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٠ ، ٥ ، -١)$ أوجد مساحة المثلث الذى فيه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ضلعان

الحل

∵ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (١ ، ٢ ، -٤) \times (٠ ، ٥ ، -١)$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & -٤ \\ ٠ & ٥ & -١ \end{vmatrix} = ١٨\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} + ٥\,\overrightarrow{ع}$$

∴ $\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٣٢٤ + ١ + ٢٥} = ٥\sqrt{١٤}$

∴ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥\sqrt{١٤} = \frac{٥}{٢}\sqrt{١٤}$ وحدة مربعة

الضرب الثلاثى القياسى :

إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ متجهات فإن المقدار : $\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ}$ يعرف بحاصل الضرب الثلاثى القياسى

" لاحظ عدم وجود أقواس حيث لا معنى لإجراء الضرب القياسى أولاً "

و بفرض أن : $\overleftarrow{أ} = أ_{س}\overleftarrow{س} + أ_{ص}\overleftarrow{ص} + أ_{ع}\overleftarrow{ع}$ ،

$\overleftarrow{ب} = ب_{س}\overleftarrow{س} + ب_{ص}\overleftarrow{ص} + ب_{ع}\overleftarrow{ع}$ ،

$\overleftarrow{حـ} = حـ_{س}\overleftarrow{س} + حـ_{ص}\overleftarrow{ص} + حـ_{ع}\overleftarrow{ع}$ فإن :

$$\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = (أ_{س}\overleftarrow{س} + أ_{ص}\overleftarrow{ص} + أ_{ع}\overleftarrow{ع}) \bullet \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \\ حـ_{س} & حـ_{ص} & حـ_{ع} \end{vmatrix}$$

و بالفك و الاختصار ينتج أن :

$$\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = \begin{vmatrix} أ_{س} & أ_{ص} & أ_{ع} \\ ب_{س} & ب_{ص} & ب_{ع} \\ حـ_{س} & حـ_{ص} & حـ_{ع} \end{vmatrix}$$

لاحظ : يمثل صف بالمحدد إحداثيات كل متجه

خواص الضرب الثلاثى القياسى :

(١) الضرب الثلاثى القياسى قيمته لا تتغير إذا كان تم تبديل المتجهات مع احتفاظهم بنفس الترتيب الدورى أى أن :

$$\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = \overleftarrow{ب} \bullet \overleftarrow{حـ} \times \overleftarrow{أ} = \overleftarrow{حـ} \bullet \overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$$

(٢) إذا كانت المتجهات $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ فى مستوى واحد فإن : حاصل الضرب الثلاثى القياسى ينعدم

أى أن : $\overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} =$ صفر

المعنى الهندسى لحاصل الضرب الثلاثى القياسى :

إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$ ، $\overleftarrow{حـ}$ ثلاث متجهات تكون ثلاثة أضلاع غير متوازية فى متوازى سطوح فإن :

حجم متوازى السطوح = القيمة المطلقة لحاصل الضرب الثلاثى القياسى

أى أن : حجم متوازى السطوح = $| \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} |$

إجابة حاول أن تحل (١٢) صفحة ١٣٤

أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -٤ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٠ ، ٢ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{حـ} = (٣ ، ٢ ، ٢)$

الحل

$$\because \overleftarrow{أ} \bullet \overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{حـ} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٦٠$$

$\therefore$ حجم متوازى السطوح = ٦٠ وحدة مكعبة

حل تمارين (١ – ٣) صفحة ١٣٦ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

إذا كانت $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة

(١) $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} =$ .... **(٢)** $\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}} =$ ....

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (٢ ، -١)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (٣ ، -٤)$ فإن :
مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ تساوى ....

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريان ، و كان :
$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان ....

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهان غير صفريان ، و كان :
$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان ....

(٦) قياس الزاوية بين المتجهين : $٣\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $-٤\overrightarrow{\text{س}} + ٦\overrightarrow{\text{ص}}$
يساوى ....

(٧) الشغل المبذول من القوة : $\overrightarrow{\text{ق}} = ٣\overrightarrow{\text{س}} + ٧\overrightarrow{\text{ع}}$ لتحريك جسيم
من نقطة أ (١ ، ١ ، ٢) إلى نقطة ب (٧ ، ٣ ، ٥) يساوى ....

الحل

(١) $\overrightarrow{\text{س}} \bullet \overrightarrow{\text{ص}} = ٠$ **(٢)** $\overrightarrow{\text{ص}} \times \overrightarrow{\text{ع}} = \overrightarrow{\text{س}}$

(٣) مركبة فى اتجاه $= \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \dfrac{٤ + ٦}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \dfrac{١٠}{٥} = ٢$

(٤) ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان متعامدين

(٥) ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ يكونان متوازيين

(٦) ∵ حتا $\theta = \dfrac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \dfrac{-١٢ - ٦}{\sqrt{١٠}\sqrt{٥٢}}$ ∴ $\theta = ١٤٢° \; ٧'$

(٧) $\overrightarrow{\text{ف}} = \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٧ ، ٣ ، ٥) - (١ ، ١ ، ٢) = (٦ ، ٢ ، ٣)$
∴ ش $= \overrightarrow{\text{ق}} \bullet \overrightarrow{\text{ف}} = (٣ ، ٠ ، ٧) \bullet (٦ ، ٢ ، ٣)$
$= ١٨ + ٢١ = ٣٩$ وحدة شغل

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٨) $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{\text{و}}$ (ب) ٠ (حـ) (ء) $\overrightarrow{\text{ع}}$

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهى وحدة متعامدين فإن :
$(\overrightarrow{\text{أ}} - ٢\overrightarrow{\text{ب}}) \bullet (٣\overrightarrow{\text{أ}} + ٥\overrightarrow{\text{ب}}) =$ ....

(أ) – ٨ (ب) – ٧ (حـ) ٢٤ (ء) ٠

(١٠) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهى وحدة فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} \in$ ....

(أ)] ٠ ، ١ [(ب)] –١ ، ١ [(حـ) [–١ ، ١] (ء) $ح_+$

(١١) قياس الزاوية بين المتجهين : (٢ ، –٢ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٤)
يساوى ....

(أ) ٥٧,٠٢° (ب) ٣٥,٢٦° (حـ) ١٣٤,٣٧° (ء) ٠°

(١٢) إذا كان المتجهان : (٢ ، ل ، –٣) ، (٤ ، ٦ ، –٦) متوازيين
فإن : ل = ...

(أ) ٦ (ب) ٣ (حـ) – ٣ (ء) ١

الحل

(٨) $\overrightarrow{\text{س}} \times \overrightarrow{\text{ص}} = \overrightarrow{\text{ع}}$

(٩) $(\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}) \bullet (٣\overrightarrow{أ} + ٥\overrightarrow{ب}) = ٣(\|\overrightarrow{أ}\|)^٢ - \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} - ١٠(\|\overrightarrow{ب}\|)^٢$

، ∵ $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة ∴ $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\| = ١$ ، $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$

∴ $(\overrightarrow{أ} - ٢\overrightarrow{ب}) \bullet (٣\overrightarrow{أ} + ٥\overrightarrow{ب}) = ٣ - ١٠ = -٧$

(١٠) ∵ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$ حتا θ ، $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة

∴ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} =$ حتا θ ، ∵ حتا θ ∈ [-١، ١] ∴ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}$ ∈ [-١، ١]

(١١) حتا θ $= \frac{(٢، -٢، ١) \bullet (١، ١، ٤)}{\sqrt{٤ + ٤ + ٤}\ \sqrt{١ + ١ + ١٦}} = \frac{٢ - ٢ + ٨}{\sqrt{١٢}\ \sqrt{١٨}}$ ∴ حتا θ = ٥٧,٠٢°

(١٢) ∵ المتجهان متوازيان ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{ك}{٦}$ ∴ ٤ ك = ١٢ ∴ ك = ٣

أجب عما يأتى :

(١٣) أوجد $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}$ فى كل من الحالات الآتية :

(أ) $\overrightarrow{أ} = (٥، ١، -٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٤، -٤، ٣)$

(ب) $\overrightarrow{أ} = -٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٦\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$

(حـ) $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٢\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$

الحل

(أ) $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٢٠ - ٤ - ٦ = ١٠$

(ب) $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = -١٨ - ٨ - ٢ = -٢٨$

(حـ) $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} =$ صفر

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين فى كل من الحالات الآتية :

(أ) (٥، ١، -٢) ، (١، ١، -١)

(ب) (٧، ٢، -١٠) ، (٢، ٦، ٤)

(حـ) (٢، ١، ٤) ، (١، -٢، ٠)

الحل

(أ) حتا θ $= \frac{٥ + ١ + ٢}{\sqrt{٢٥ + ١ + ٤}\ \sqrt{١ + ١ + ١}}$ ∴ حتا θ = ٣١َ ٣٢°

(ب) حتا θ $= \frac{١٤ + ١٢ - ٤٠}{\sqrt{٤٩ + ٤ + ١٠٠}\ \sqrt{٤ + ٣٦ + ١٦}}$ ∴ حتا θ = ٤٢َ ٩٨°

(حـ) حتا θ $= \frac{٢ - ٢ + ٠}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦}\ \sqrt{١ + ٤ + ٠}}$ ∴ حتا θ = ٩٠°

(١٥) أوجد $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ فى كل من الحالات الآتية :

(أ) $\overrightarrow{أ} = (-٢، ٣، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (١، ٣، -٤)$

(ب) $\overrightarrow{أ} = -\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ع}$

(حـ) $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٨$ ، و قياس الزاوية بينهما ٦٠°

الحل

(أ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & -٤ \end{vmatrix} = -١٥\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص} - ٩\overrightarrow{ع}$

(ب) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ & -٥ \end{vmatrix} = ١٠\overrightarrow{س} - ٥\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$

(حـ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = (\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|$ حا θ$)\ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

$= (٦ \times ٨$ حا ٦٠°$)\ \overrightarrow{ى} = ٢٤\sqrt{٣}\ \overrightarrow{ى}$

(١٦) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة عمودى على مستواه أوجد :

(أ) $\overrightarrow{أب} \bullet \overrightarrow{أحـ}$ (ب) $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{حـأ}$ (حـ) $\overrightarrow{بحـ} \bullet \overrightarrow{أء}$

(ء) ب ء × أ حـ   (هـ) أ ب • ب حـ   (و) أ ب × ب حـ

الحل

∵ أ ب حـ ء مربع ، أ ب = ١٢ سم

∴ أ حـ = ب ء = ١٢ √٢ سم

(أ) أ ب • أ حـ = ١٢ × ١٢ √٢ حتا ٤٥° = ١٤٤

(ب) أ ب × حـ أ = أ ب × − أ حـ = − (أ ب × أ حـ)

= − (١٢ × ١٢ √٢ حا ٤٥°) ى = − ١٤٤ ى

حل آخر

أ ب × حـ أ = (١٢ × ١٢ √٢ حا ٤٥°) (− ى) = − ١٤٤ ى

(حـ) ب حـ • أ ء = ١٢ × ١٢ حتا ٠° = ١٤٤

(ء) ب ء × أ حـ = (١٢ √٢ × ١٢ √٢ حا ٩٠°) ى = ٢٨٨ ى

(هـ) أ ب • ب حـ = − ب أ • ب حـ = ١٢ × ١٢ حتا ٩٠° = صفر

(و) أ ب × ب حـ = − ب أ × ب حـ = − (١٢ × ١٢ حا ٩٠°) ى = − ١٤٤ ى

(١٧) أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين :

أ = ٢ س − ٣ ص + ع ، ب = − س + ٢ ص − ٣ ع

الحل

أ × ب = | س ص ع ؛ ٢ −٣ ١ ؛ −١ ٢ −٣ | = ٧ س + ٥ ص + ع

، || أ × ب || = √(٤٩ + ٢٥ + ١) = ٥ √٣

∴ متجه الوحدة العمودى = (أ × ب) / || أ × ب ||

= ٧/١٥ √٣ س + ١/٣ √٣ ص + ١/١٥ √٣ ع

(١٨) أحسب مساحة المثلث ء هـ و فى كل مما يأتى :

(أ) ء (٥ ، ١ ، −٢) ، هـ (٤ ، −٤ ، ٣) ، و (٢ ، ٤ ، ٠)

(ب) ء (٤ ، ٠ ، ٢) ، هـ (٢ ، ١ ، ٥) ، و (−١ ، ٠ ، −١)

الحل

(أ) ء هـ = (٤ ، −٤ ، ٣) − (٥ ، ١ ، −٢) = (−١ ، −٥ ، ٥)

ء و = (٢ ، ٤ ، ٠) − (٥ ، ١ ، −٢) = (−٣ ، ٣ ، ٢)

ء هـ × ء و = | س ص ع ؛ −١ −٥ ٥ ؛ −٣ ٣ ٢ | = −٢٥ س − ١٣ ص − ١٨ ع

∴ || ء هـ × ء و || = √(٦٢٥ + ١٦٩ + ٣٢٤) = ٣٣,٤٤

، مساحة المثلث ء هـ و = ١/٢ × ٣٣,٤٤ = ١٦,٧ وحدة مربعة

(ب) ء هـ = (٢ ، ١ ، ٥) − (٤ ، ٠ ، ٢) = (−٢ ، ١ ، ٣)

ء و = (−١ ، ٠ ، −١) − (٤ ، ٠ ، ٢) = (−٥ ، ٠ ، −٣)

ء هـ × ء و = | س ص ع ؛ −٢ ١ ٣ ؛ −٥ ٠ −٣ | = −٣ س − ٢١ ص + ٥ ع

∴ || ء هـ × ء و || = √(٩ + ٤٤١ + ٢٥) = ٢١,٧٩

، مساحة المثلث ء هـ و = ١/٢ × ٢١,٧٩ = ١٠,٩ وحدة مربعة

(١٩) أحسب مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ فى كل مما يأتى :

(أ) ل (١ ، ١) ، م (٢ ، ٣) ، ن (٥ ، ٤)

(ب) ل (٢ ، ١ ، ٣) ، م (١ ، ٤ ، ٥) ، ن (٢ ، ٥ ، ٣)

الحل

(أ) $\overrightarrow{\text{لم}}$ = (٢ ، ٣) − (١ ، ١) = (١ ، ٢)

$\overrightarrow{\text{لن}}$ = (٥ ، ٤) − (١ ، ١) = (٤ ، ٣)

$$\overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{لن}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٠ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{vmatrix} = -٥\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ $\| \overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{لن}} \|$ = ٥

، مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ = ٥ وحدات مربعة

(ب) $\overrightarrow{\text{لم}}$ = (١ ، ٤ ، ٥) − (٢ ، ١ ، ٣) = (−١ ، ٣ ، ٢)

$\overrightarrow{\text{لن}}$ = (٢ ، ٥ ، ٣) − (٢ ، ١ ، ٣) = (٠ ، ٤ ، ٠)

$$\overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{لن}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٤ & ٠ \end{vmatrix} = -٨\,\overrightarrow{\text{س}} - ٤\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ $\| \overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{لن}} \| = \sqrt{٦٤ + ٠ + ١٦}$ = ٨٫٩

، مساحة متوازى الأضلاع ل م ن هـ = ٨٫٩ وحدة مربعة

(٢٠) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ تمثل ثلاثة أحرف متجاورة حيث :

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، ١ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٥ ، ١ ، −٢)

الحل

$$∵ \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٩$$

∴ حجم متوازى السطوح = ٩ وحدة مكعبة

(٢١) فى كل مما يأتى بين ما إذا كان المتجهان متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك :

(أ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٠ ، ٢ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٠ ، −٤)

(ب) $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = ١٠ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٤٠ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = −٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$

(جـ) $\overrightarrow{\text{أ}}$ = −٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + $\overrightarrow{\text{ص}}$ −٢ $\overrightarrow{\text{ع}}$ ،

$\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٨ $\overrightarrow{\text{ع}}$

الحل

(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ≠ ك $\overrightarrow{\text{ب}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متوازيين

حل آخر

$$∵ \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & -٤ \end{vmatrix} = -٨\,\overrightarrow{\text{س}} - ٦\,\overrightarrow{\text{ص}} - ٦\,\overrightarrow{\text{ع}} \neq \overrightarrow{\text{و}}$$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متوازيين

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢ ، ٢) • (٣ ، ٠ ، −٤) = −٨ ≠ ٠

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متعامدين

(ب) ∵ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ ≠ ك $\overrightarrow{\text{ء}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ غير متوازيين

، ∵ $\overrightarrow{\text{هـ}} \bullet \overrightarrow{\text{ء}}$ = (١٠ ، ٤٠ ، ٠) • (٠ ، −٣ ، ٨) = −١٢٠ ≠ ٠

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ غير متعامدين

(جـ) ∵ $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٨ ، −٤ ، ٨) = −٤ (−٢ ، ١ ، −٢) = −٤ $\overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متوازيين

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ = (−٢ ، ١ ، −٢) • (٨ ، −٤ ، ٨) = −٣٦ ≠ ٠

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ غير متعامدين

حل تمارين عامة صفحة ١٤٤ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

(١) النقطة (٢ ، ٠ ، -٣) تقع فى مستوى الإحداثيات .... الذى معادلته ....

(٢) الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات أ (٦ ، ٨ ، ٢٤) فإن :

(أ) إحداثيات النقطة ء هى ....

(ب) إحداثيات النقطة حـ هى ....

(حـ) زوايا الاتجاه للمتجه و ء هى ....

(٣) إذا كان : أ (-١ ، ٢ ، ٣) ، ب (٤ ، -١ ، ٥) فإن : أ ب = ...

(٤) إذا كانت النقطة (-٢ ، ٤ ، م) تقع على الكرة :

$(س + ٢)^2 + (١ - ص)^2 + (٣ - ع)^2 = ٢٥$ فإن : م = ...

(٥) إذا كان : أ = (ك ، ٣ ، -٤) ، ب = (-٢ ، ٩ ، م) ، و كان : أ // ب فإن : ك = ... ، م = ...

(٦) إذا كان : أ • ب = || أ × ب || فإن :

قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب = ...

الحل

(١) النقطة تقع فى المستوى الإحداثى (س ع) الذى معادلته : ص = ٠

(٢) (أ) إحداثيات النقطة ء هى (٦ ، ٨ ، ٠)

(ب) إحداثيات النقطة حـ هى (٠ ، ٨ ، ٠)

(حـ) ∵ و ء = (٦ ، ٨ ، ٠) ∴ || و ء || = ١٠

∴ $حتا θ_{س} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ، $حتا θ_{ص} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ ، $حتا θ_{ع} = ٠$

∴ زوايا الاتجاه للمتجه و ء هى : ٥٣° ٨' ، ٣٦° ٥٢' ، ٩٠°

(٣) أ ب = ب - أ = (٤ ، -١ ، ٥) - (-١ ، ٢ ، ٣) = (٥ ، -٣ ، ٢)

(٤) بالتعويض عن النقطة فى معادلة الكرة ينتج :

$٠ + ٩ + (م - ٣)^2 = ٢٥$ ∴ $(م - ٣)^2 = ١٦$

∴ م - ٣ = ٤ و منها : م = ٧

أو م - ٣ = -٤ و منها : م = -١

(٥) ∵ أ // ب ∴ $\frac{ك}{-٢} = \frac{٣}{٩} = \frac{-٤}{م}$ و منها :

٩ م = -٦ ∴ $ك = -\frac{٢}{٣}$ ، ٣ م = -٣٦ ∴ م = -١٢

(٦) ∵ أ • ب = || أ × ب || ∴ || أ || || ب || حتا θ = || أ || || ب || حا θ

و منها : حتا θ = حا θ ، بالقسمة ÷ حتا θ ينتج :

ظا θ = ١ ∴ θ = ٤٥°

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٧) المستقيمان س س' ، ع ع' يكونان المستوى الإحداثى ....

(أ) س = ٠ (ب) ص = ٠ (حـ) ع = ٠ (ء) ص = ٢

(٨) معادلة الكرة التى مركزها نقطة الأصل و تمر بالنقطة (٣ ، -١ ، ٢) هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 + ع^2 = ٤$

(ب) $(س - ٣)^2 + (ص + ١)^2 + (ع - ٢)^2 = ١٤$

(حـ) $(س - ٣)^2 + (ص + ١)^2 + (ع - ٢)^2 = \sqrt{١٤}$

(ء) $س^2 + ص^2 + ع^2 = ١٤$

(٩) إحداثيات نقطة منتصف القطعة ء هـ حيث : ء (٢ ، ٣ ، ٣) ، هـ (٦ ، −١ ، −٤) هى ....

(أ) (٤ ، ٢ ، ٣ ½)   (ب) (٢ ، ١ ، ½)

(جـ) (٤ ، ١ ، − ½)   (ء) (٤ ، ١ ، ½)

(١٠) إذا كان : أ⃗ // ب⃗ فإن : || أ⃗ × ب⃗ || = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) || أ⃗ || (ء) || ب⃗ ||

(١١) المتجه الذى يمثل متجه وحدة فى المتجهات الآتية :

(أ) (−٣ ، ٢ ، ٢)   (ب) (½ ، ⅓ ، ¼)

(جـ) (٣/٥ ، − ٤/٥ ، ٠)   (ء) (− ١/١١ ، − ٣/١١ ، ٢/١١)

(١٢) إذا كان : ل ، هـ ، و هى جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ⃗ فإن : ....

(أ) ل + هـ + و = ١   (ب) ل = هـ = و

(جـ) ل² + هـ² + و² = ١   (ء) ل + هـ + و = || أ⃗ ||

(١٣) إذا كان : أ⃗ × ب⃗ = و⃗ ، أ⃗ • جـ⃗ = ٠ فإن : ب⃗ • جـ⃗ = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (جـ) أ⃗   (ء) || ب⃗ ||

(١٤) مستويا الإحداثيات (س ص) ، (ص ع) يتقاطعان فى ....

(أ) نقطة الأصل   (ب) محور س   (جـ) محور ص   (ء) محور ع

الحل

(٧) المستقيمان س س َ ، ع عَ يكونان المستوى الذى معادلته هى : ص = ٠

(٨) نق² = (٣ − ٠)² + (−١ − ٠)² + (٢ − ٠)² = ١٤

∴ معادلة الكرة هى : س² + ص² + ع² = ١٤

(٩) إحداثيات نقطة المنتصف = ((٢ + ٦)/٢ ، (٣ − ١)/٢ ، (٣ − ٤)/٢) = (٤ ، ١ ، − ½)

(١٠) ∵ أ⃗ // ب⃗ ∴ || أ⃗ × ب⃗ || = || أ⃗ || || ب⃗ || جا ٠° = صفر

(١١) ∵ (٣/٥)² + (− ٤/٥)² + (٠)² = ١ ∴ (٣/٥ ، − ٤/٥ ، ٠) يمثل متجه وحدة

(١٢) ل² + هـ² + و² = ١

(١٣) ∵ أ⃗ × ب⃗ = و⃗ ∴ أ⃗ // ب⃗ ، ∵ أ⃗ • جـ⃗ = ٠

∴ أ⃗ ⊥ جـ⃗ ∴ ب⃗ ⊥ جـ⃗ ∴ ب⃗ • جـ⃗ = ٠

(١٤) محور ص

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٥) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط (٧ ، ١ ، ٣) ، (٥ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥ ، ٣) هو مثلث متساوى الساقين

الحل

نفرض أن رؤوس المثلث هى : أ (٧ ، ١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٣ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٥ ، ٣)

∴ (أ ب)² = (٥ − ٧)² + (٣ − ١)² + (٤ − ٣)² = ٩

∴ أ ب = ٣ وحدة طول

، (ب جـ)² = (٣ − ٥)² + (٥ − ٣)² + (٣ − ٤)² = ٩

∴ ب جـ = ٣ وحدة طول

، (أ جـ)² = (٣ − ٧)² + (٥ − ١)² + (٣ − ٣)² = ٣٢

∴ أ جـ = ٤ √٢ وحدة طول

∴ م ب = ب حـ ∴ النقط تكون مثلث متساوى الساقين

(١٦) أوجد مركز و طول نصف قطر الكرة :

س٢ + ص٢ + ع٢ = ٦ ع

الحل

∵ س٢ + ص٢ + ع٢ − ٦ ع = ٠

∴ مركز الكرة (− ½ معامل س ، − ½ معامل ص ، − ½ معامل ع)

= (٠ ، ٠ ، ٣)

، نق٢ = (٠)٢ + (٠)٢ + (٣)٢ − ٠ = ٩ ∴ نق = ٣ وحدة طول

(١٧) إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = (−٢ ، ٣ ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٤ ، −٢) أوجد $\overrightarrow{م ب}$

الحل

$\overrightarrow{م ب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٤ ، −٢) − (−٢ ، ٣ ، ٥) = (٣ ، ١ ، −٧)

(١٨) إذا كان : $\overrightarrow{حـ}$ = (١ ، −٢ ، ٢) أوجد متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{حـ}$

الحل

$\overrightarrow{ى}_{حـ}$ = $\frac{(١ ، −٢ ، ٢)}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$ = ($\frac{١}{٣}$ ، −$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

(١٩) إذا كان : $\overrightarrow{م}$ يصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات س ، ص ، ع زوايا قياساتها : ٦٠° ، ٨٠° ، θ° حيث : θ زاوية حادة

(م) أوجد قيمة : θ

(ب) أكتب الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{م}$ إذا علمت أن : || $\overrightarrow{م}$ || = ١٣

الحل

(م) ∵ (٦٠° ، ٨٠° ، θ°) هى قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{م}$

∴ حتا٢ ٦٠° + حتا٢ ٨٠° + حتا٢ θ = ١ ∴ ٠,٢٥ + ٠,٠٣ + حتا٢ θ = ١

∴ حتا٢ θ = ٠,٧٢ ∴ حتا θ = ± ٠,٨٤٨٥

، ∵ θ زاوية حادة ∴ حتا θ = ٠,٨٤٨٥ ∴ θ = ٣١° ٥٨′

(ب) ∵ || $\overrightarrow{م}$ || = ١٣

∴ $\overrightarrow{م}$ = ١٣ حتا ٦٠° $\overrightarrow{س}$ + ١٣ حتا ٨٠° $\overrightarrow{ص}$ + ١٣ حتا ٣١° ٥٨′ $\overrightarrow{ع}$

= ٦,٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢,٢٥٧٤ $\overrightarrow{ص}$ + ١١,٠٢٩٤ $\overrightarrow{ع}$

(٢٠) إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = (١ ، ٦ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (ل ، ٣ ، م) ،

$\overrightarrow{حـ}$ = (ل ، م ، ل + م) ، و كان : $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ب}$: أوجد || $\overrightarrow{حـ}$ ||

الحل

∵ $\overrightarrow{م}$ // $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{١}{ل}$ = $\frac{٦}{٣}$ = $\frac{٢}{م}$ و منها : ل = $\frac{١}{٢}$ ، م = ١

∴ $\overrightarrow{حـ}$ = ($\frac{١}{٢}$ ، ١ ، $\frac{٣}{٢}$) ، || $\overrightarrow{حـ}$ || = $\sqrt{\frac{١}{٤} + ١ + \frac{٩}{٤}}$ = $\sqrt{\frac{٧}{٢}}$

(٢١) إذا كان : $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة فى ح٣ ، تحت أى شروط يكون حاصل الضرب الاتجاهى $\overrightarrow{م}$ × $\overrightarrow{ب}$ يمثل متجه وحدة فى ح٣
فسر إجابتك

الحل

∵ $\overrightarrow{م}$ × $\overrightarrow{ب}$ = (|| $\overrightarrow{م}$ || || $\overrightarrow{ب}$ || حا θ) $\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{م}$ ، $\overrightarrow{ب}$ متجهى وحدة

∴ ليكون : $\overrightarrow{م}$ × $\overrightarrow{ب}$ متجه وحدة أى : || $\overrightarrow{م}$ × $\overrightarrow{ب}$ || = ١

يجب أن يكون : حا θ = ١ أى : θ = ٩٠° أى : $\overrightarrow{م}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$

(٢٢) م ب حـ ء مستطيل فيه : م ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد :

(م) $\overrightarrow{م ب}$ • $\overrightarrow{م حـ}$ (ب) $\overrightarrow{م ب}$ • $\overrightarrow{حـ ء}$

(حـ) مركبة $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$

الحل

∵ أ ب حـ ء مستطيل ، أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم

∴ أ حـ = ب ء = ١٠ سم

(أ) $\overrightarrow{\text{أ ب}} \bullet \overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = ٦ × ١٠ حتا θ

= ٦ × ١٠ × $\frac{٦}{١٠}$ = ٣٦

(ب) $\overrightarrow{\text{أ ب}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ ء}}$ = ٦ × ٦ حتا ١٨٠° = − ٣٦

(حـ) ∵ $\overrightarrow{\text{حـ ء}} \bullet \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = − $\overrightarrow{\text{ء حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = ٦ × ٨ حتا ٩٠° = صفر

∴ مركبة $\overrightarrow{\text{حـ ء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ = $\frac{\overrightarrow{\text{حـ ء}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ ب}}}{\|\overrightarrow{\text{حـ ب}}\|}$ = صفر

(٢٣) أوجد الشغل المبذول من القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ = (٢ ، −٣ ، ٥) لتحريك جسيم من نقطة (١ ، −١ ، ٠) إلى نقطة (٢ ، ٤ ، −٢)

الحل

$\overrightarrow{\text{ف}}$ = (٢ ، ٤ ، −٢) − (١ ، −١ ، ٠) = (١ ، ٥ ، −٢)

∴ ش = $\overrightarrow{\text{ق}} \bullet \overrightarrow{\text{ف}}$ = (٢ ، −٣ ، ٥) • (١ ، ٥ ، −٢)

= ٢ − ١٥ − ١٠ = − ٢٣ وحدة شغل

(٢٤) أوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٤٠ نيوتن يتحرك رأسياً لأعلى مسافة ١٠ أمتار فوق سطح الأرض

الحل

∵ وزن الجسم يؤثر رأسياً لأسفل ، الجسم يتحرك رأسياً لأعلى ∴ θ = ١٨٠°

∴ ش = $\|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ف}}\|$ حتا θ = ٤٠ × ١٠ × جتا ١٨٠° = − ٤٠٠ جول

(٢٥) برهن كلاً مما يأتى حيث $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ∈ ح^3

(أ) $(\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|)^2 + (|\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}|)^2 = (\|\overrightarrow{\text{أ}}\|)^2 (\|\overrightarrow{\text{ب}}\|)^2$

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ = ٠ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

فإن : إما $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

الحل

(أ) الطرف الأيمن = $(\|\overrightarrow{\text{أ}}\|)^2 (\|\overrightarrow{\text{ب}}\|)^2$ حا$^2\theta$ + $(\|\overrightarrow{\text{أ}}\|)^2 (\|\overrightarrow{\text{ب}}\|)^2$ حتا$^2\theta$

= $(\|\overrightarrow{\text{أ}}\|)^2 (\|\overrightarrow{\text{ب}}\|)^2$ (حا$^2\theta$ + حتا$^2\theta$)

= $(\|\overrightarrow{\text{أ}}\|)^2 (\|\overrightarrow{\text{ب}}\|)^2$ = الطرف الأيسر

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}$ = ٠ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ ؛ أ $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

، و إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ ؛ أ $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

، ∵ لا يمكن أن يكون : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$ فى نفس الوقت

∴ إما $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ أو $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

حل تمارين اختبار تراكمى صفحة ١٤٦ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يأتى :

(١) بعد النقطة (–٤ ، –٣ ، ٢) عن مستوى الإحداثيات (ص ع) يساوى .... وحدة طول

(٢) إذا كانت النقطة (٢ – ٢ ، ب + ٣ ، حـ – ٤) تقع فى مستوى الإحداثيات (س ع) فإن : ب = ...

(٣) إذا كانت ٢ (–١ ، ٠ ، –٢) ، ب (٥ ، –١ ، ٤) فإن إحداثيات نقطة منتصف ٢ب هى ....

(٤) الشكل المقابل يمثل متوازى مستطيلات ٢ (٥ ، ٨ ، ٤) فإن :

(٢) إحداثيات النقطة ب هى ....

(ب) إحداثيات النقطة حـ هى ....

(٥) معادلة الكرة التى مركزها (١ ، –٣ ، –١) و تمر بالنقطة (–٢ ، –١ ، –١) هى ....

(٦) إذا كان : ٢⃖ = (–٢ ، ٣ ، ١) ، ب⃖ = (٠ ، ٢ ، –٢) ، حـ⃖ = (١ ، –٣ ، ٥) فإن : ٢ ٢⃖ – ٣ ب⃖ + حـ⃖ = ...

(٧) إذا كان : ٢⃖ = (٥ ، –٢ ، ٣) فإن : متجه الوحدة فى اتجاه ٢⃖ يساوى ....

الحل

(١) بعد النقطة (–٤ ، –٣ ، ٢) عن مستوى الإحداثيات (ص ع) = | –٤ | = ٤ وحدة طول

(٢) ∵ النقطة تقع فى المستوى (س ع) ∴ ب + ٣ = ٠ و منها : ب = –٣

(٣) إحداثيات نقطة المنتصف = ((–١ + ٥)/٢ ، (٠ – ١)/٢ ، (–١ + ٤)/٢) = (٢ ، – ١/٢ ، ١)

(٤) (٢) إحداثيات النقطة ب هى (٠ ، ٨ ، ٤)

(ب) إحداثيات النقطة حـ هى (٠ ، ٠ ، ٤)

(٥) نق² = (–٢ – ١)² + (–١ + ٣)² + (–١ + ١)² = ١٣

∴ معادلة الكرة هى : (س – ١)² + (ص + ٣)² + (ع + ١)² = ١٣

(٦) ٢ ٢⃖ – ٣ ب⃖ + حـ⃖ = (–٤ ، ٦ ، ٢) + (٠ ، –٦ ، ٦) + (١ ، –٣ ، ٥)

= (–٣ ، –٣ ، ١٣)

(٧) ∵ ‖ ٢⃖ ‖ = √(٢٥ + ٤ + ٩) = √٣٨

∴ ى٢⃖ = (٥/√٣٨ ، –٢/√٣٨ ، ٣/√٣٨)

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٨) إذا كان : ٢⃖ = (٣ ، –٢ ، م) ، و كان : ‖ ٢⃖ ‖ = √٢٢ فإن : م = ...

(٢) ٢١ (ب) ± ٩ (حـ) ± ٣ (ء) ١٧

(٩) إذا كان : ٢⃖ = ٢ س⃖ + ٣ ص⃖ – ع⃖ ، ب⃖ = ٤ س⃖ – ص⃖ فإن : ٢⃖ • ب⃖ = ...

(٢) ٥ (ب) ٤ (حـ) ± ٣ (ء) ٢

(١٠) إذا كان : ٢⃖ = ٤ س⃖ – ٣ ص⃖ – ٥ ع⃖ فإن : مركبة ٢⃖ فى اتجاه محور ص تساوى ....

(٢) ٤ (ب) ٣ (حـ) – ٣ (ء) ٥

(١١) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٣ ، –١) ، $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$

فإن : مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ تساوى ....

(أ) ١٨ (ب) $\frac{١٨}{٥}$ (جـ) – $\frac{١٨}{٥}$ (د) $\frac{١٨}{٢٥}$

(١٢) متجه زوايا الاتجاه له : ٤٥° ، ٤٥° ، θ° فإن : θ = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ٠° (د) ٦٠°

الحل

(٨) ∵ (|| $\overrightarrow{أ}$ ||)^{٢} = ٩ + ٤ + م^{٢} = ٢٢ ∴ م^{٢} = ٩ ∴ م = ± ٣

(٩) $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ = ٨ – ٣ – ٠ = ٥

(١٠) ∵ $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ص}$ = (٤ ، –٣ ، ٥) • (٠ ، ١ ، ٠) = – ٣ ، || $\overrightarrow{ص}$ || = ١

∴ مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ص}$ = – ٣

(١١) ∵ $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣ ، –١) • (٣ ، ٤ ، ٠) = ١٨ ، || $\overrightarrow{ب}$ || = ٥

∴ مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = $\frac{١٨}{٥}$

(١٢) ∵ (٤٥° ، ٤٥° ، θ°) هى قياسات زوايا الاتجاه للمتجه

∴ حتا^{٢} ٤٥° + حتا^{٢} ٤٥° + حتا^{٢} θ = ١ ∴ ٠,٥ + ٠,٥ + حتا^{٢} θ = ١

∴ حتا^{٢} θ = ٠ ∴ حتا θ = ٠ ∴ θ = ٩٠°

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٣) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط (٢ ، ٢ ، ١) ، (٠ ، ٠ ، ٠) ، (٢ ، –٤ ، ٤) هو مثلث قائم الزاوية و أوجد مساحته

الحل

بفرض أن النقط هى : أ (٢ ، ٢ ، ١) ، ب (٠ ، ٠ ، ٠) ، جـ (٢ ، –٤ ، ٤)

∵ (أ ب)^{٢} = (٠ – ٢)^{٢} + (٠ – ٢)^{٢} + (٠ – ١)^{٢} = ٩

∴ أ ب = $\sqrt{٩}$ = ٣ وحدة طول

، ∵ (ب جـ)^{٢} = (٢ – ٠)^{٢} + (–٤ – ٠)^{٢} + (٤ – ٠)^{٢} = ٣٦

∴ ب جـ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ وحدة طول

، ∵ (أ جـ)^{٢} = (٢ – ٢)^{٢} + (–٤ – ٢)^{٢} + (٤ – ١)^{٢} = ٤٥

∴ أ جـ = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ وحدة طول

، ∵ (ب جـ)^{٢} + (أ ب)^{٢} = (أ جـ)^{٢} ∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية فى ب

، مساحته = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٦ = ٩ وحدة مربعة

(١٤) أوجد معادلة الكرة التى مركزها النقطة (٠ ، ٤ ، ٠) و تمس المستوى الإحداثى (س ع)

الحل

(أ) ∵ الكرة تمس المستوى (س ع) ∴ نق = | ٤ | = ٤ وحدة طول

∴ معادلة الكرة هى : س^{٢} + (ص – ٤)^{٢} + ع^{٢} = ١٦

(١٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، –٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) أوجد :

|| $\overrightarrow{أ}$ || ، || $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ ||

الحل

|| $\overrightarrow{أ}$ || = $\sqrt{١ + ٩ + ٤}$ = $\sqrt{١٤}$ ،

$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، –٣ ، ٢) + (٠ ، ٢ ، ٣) = = (١ ، –١ ، ٥)

∴ || $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ || = $\sqrt{٢٥ + ١ + ١}$ = $\sqrt{٢٧}$ = ٣ $\sqrt{٣}$

(١٦) أوجد الصورة الجبرية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ الذى معياره ٢١$\sqrt{٣}$ و يصنع زوايا متساوية القياس مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

الحل

∵ $\theta_{س} = \theta_{ص} = \theta_{ع}$ ∴ حتا $\theta_{س}$ = حتا $\theta_{ص}$ = حتا $\theta_{ع}$ = حتا θ

، ∵ حتا$^{٢}\theta_{س}$ + حتا$^{٢}\theta_{ص}$ + حتا$^{٢}\theta_{ع}$ = ١ ∴ حتا$^{٢}\theta$ + حتا$^{٢}\theta$ + حتا$^{٢}\theta$ = ١

∴ ٣ حتا$^{٢}\theta$ = ١ ∴ حتا$^{٢}\theta = \frac{١}{٣}$ ∴ حتا $\theta = \pm \frac{١}{\sqrt{٣}} = \pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$

∴ $\overrightarrow{أ}$ = ٢١$\sqrt{٣}$ × ($\pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ، $\pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$ ، $\pm \frac{١}{٣}\sqrt{٣}$)

= ± ٢١ (١ ، ١ ، ١) = ± ٢١ ($\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ع}$)

(١٧) أوجد مركبات القوة $\overrightarrow{ق}$ التى مقدارها ٢١$\sqrt{٢٩}$ نيوتن

الحل

نفرض أن : $\overrightarrow{وأ}$ يمثل القوة $\overrightarrow{ق}$

بمقياس رسم معين ، من الرسم نجد :

أ = (−٢ ، ٤ ، ٣)

∴ $\|\overrightarrow{وأ}\| = \sqrt{٤ + ١٦ + ٩} = \sqrt{٢٩}$

∴ $\overrightarrow{ق}$ = ك $\overrightarrow{وأ}$ = ك (−٢ ، ٤ ، ٣) حيث : ك > ٠ (١)

∴ $\|\overrightarrow{ق}\|$ = ك × $\sqrt{٢٩}$ ∴ ٢١$\sqrt{٢٩}$ = ك × $\sqrt{٢٩}$

و منها : ك = ٢١ بالتعويض فى (١) ينتج :

∴ $\overrightarrow{ق}$ = (−٤٢ ، ٨٤ ، ٦٣)

(١٨) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٣\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ أوجد :

(أ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$ (ب) (٢$\overrightarrow{أ}$) × (٣$\overrightarrow{ب}$)

(جـ) $\overrightarrow{أ}$ × ($\overrightarrow{أ}$ − ٢$\overrightarrow{ب}$)

الحل

(أ) $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & -٢ \\ ٣ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = \overrightarrow{س} - ١١\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ع}$

(ب) (٢$\overrightarrow{أ}$) × (٣$\overrightarrow{ب}$) = ٦ ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) = ٦$\overrightarrow{س}$ − ٦٦$\overrightarrow{ص}$ − ٣٠$\overrightarrow{ع}$

(جـ) ∵ $\overrightarrow{أ}$ − ٢$\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ١ ، −٢) + (−٦ ، ٤ ، −١٠) = (−٥ ، ٥ ، −١٢)

∴ $\overrightarrow{أ}$ × ($\overrightarrow{أ}$ − ٢$\overrightarrow{ب}$) = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & -٢ \\ -٥ & ٥ & -١٢ \end{vmatrix}$

= −٢$\overrightarrow{س}$ + ٢٢$\overrightarrow{ص}$ + ١٠$\overrightarrow{ع}$

(١٩) إذا كان : أ (٠ ، ٠ ، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠) ، جـ (٠ ، ١ ، ٠)

أوجد متجه وحدة عمودى على المستوى أ ب جـ

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = (١ ، ٠ ، ٠) − (٠ ، ٠ ، ١) = (١ ، ٠ ، −١) ،

$\overrightarrow{أجـ}$ = (٠ ، ١ ، ٠) − (٠ ، ٠ ، ١) = (٠ ، ١ ، −١) ،

∴ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص} + \overrightarrow{ع}$

، $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\| = \sqrt{٣}$

∴ متجه الوحدة العمودى = $\dfrac{\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|} = \dfrac{١}{\sqrt{٣}} (\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}})$

(٢٠) أوجد قياسات الزوايا التى يصنعها المتجه :

$\overrightarrow{\text{حـ}} = ٣\, \overrightarrow{\text{س}} - ٤\, \overrightarrow{\text{ص}} + ٥\, \overrightarrow{\text{ع}}$

مع الإتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

الحل

∵ $\|\overrightarrow{\text{حـ}}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

∴ حتا $\theta_{\text{س}} = \dfrac{٣}{٥\sqrt{٢}} = ٠,٤٢٤٣$ ، $\theta_{\text{س}} = ٦٤^\circ \; ٥٤'$

، حتا $\theta_{\text{ص}} = \dfrac{-٤}{٥\sqrt{٢}} = -٠,٥٦٥٧$ ، $\theta_{\text{ص}} = ١٢٤^\circ \; ٢٧'$

، حتا $\theta_{\text{ع}} = \dfrac{٥}{٥\sqrt{٢}} = ٠,٧٠٧١$ ، $\theta_{\text{ع}} = ٤٥^\circ$

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) إذا كان : أ (٧ ، −١ ، ٨) ، ب (١١ ، ٢ ، −٤) فإن :

طول $\overline{\text{أب}}$ = ... سم

(أ) ١٠   (ب) ١١   (حـ) ١٢   (د) ١٣

الحل

$(\text{أب})^٢ = (١١ - ٧)^٢ + (٢ + ١)^٢ + (-٤ - ٨)^٢ = ١٦ + ٩ + ١٤٤$

∴ $(\text{أب})^٢ = ١٦٩$ ∴ طول $\overline{\text{أب}}$ = ١٣ سم

(٤) إذا كان : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٤\text{س} - ٦\text{ص} + ٨\text{ع} + ٤ = ٠$

معادلة كرة طول قطرها = ... سم

(أ) ٥   (ب) ١٠   (حـ) ١٥   (د) ٢٠

الحل

∵ معادلة الكرة هى : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ + \text{ع}^٢ + ٤\text{س} - ٦\text{ص} + ٨\text{ع} + ٤ = ٠$

∴ مركز الكرة ($-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ع)

= (−٢ ، ٣ ، −٤)

، $\text{نق}^٢ = (-١)^٢ + (٣)^٢ + (-٤)^٢ - ٤ = ٢٥$ ∴ نق = ٥

∴ طول قطر الكرة = ١٠

حل آخر

نكتب معادلة الكرة على الصورة القياسية باستخدام إكمال المربع كما يلى :

(س^٢ + ٤ س + ٤) + (ص^٢ – ٦ ص + ٩) + (ع^٢ + ٨ ع + ١٦) + ٤

– (٤ + ٩ + ١٦) = ٠

∴ (س + ٢)^٢ + (ص – ٣)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ٢٥

∴ نق = ٥ ∴ طول قطر الكرة = ١٠

(٦) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين أ = (–٢ ، –٦ ، ١) ، ب = (٢ ، ٦ ، –١) فإن θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (حـ) ١٢٠° (ء) ١٨٠°

الحل

جتا θ = (أ • ب) / (‖أ‖ ‖ب‖) = (–٢ ، –٦ ، ١) • (٢ ، ٦ ، –١) / (√(٤ + ٣٦ + ١) √(٤ + ٣٦ + ١))

= (–٤ – ٣٦ – ١) / (√٤١ √٤١) = –٤١ / ٤١ = –١ ∴ θ = ١٨٠°

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) إذا كان : أ = ٢ س + ٣ ص + ك ع ، ب = – ٦ س – ٤ ص + ٤ ع و كان : أ ⊥ ب فإن : ك = ...

الحل

∵ أ ⊥ ب ∴ أ • ب = ٠ ∴ (٢ ، ٣ ، ك) • (–٦ ، –٤ ، ٤) = ٠

∴ –١٢ – ١٢ + ٤ ك = ٠ ∴ ٤ ك = ٢٤ ∴ ك = ٦

(٤) إذا كان : أ = (٣ ، ٠ ، ٤) ، ب = س – ٢ ص + ٣ ع

فإن : أ × ب = ...

الحل

أ × ب =
س	ص	ع
٣	٠	٤
١	–٢	٣

= ٨ س – ٥ ص – ٦ ع

(٥) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، –٣ ، ١) و طول نصف قطرها ٢√٥ هى ....

الحل

معادلة الكرة هى : (س – ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ + (ع – ١)^٢ = ٢٠

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) إذا كان : س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦ س – ٤ ص + ١٠ ع – ٨ = ٠ معادلة كرة مركزها م فإن : م = ...

(أ) ١٠ (ب) ١١ (حـ) ١٢ (ء) ١٣

الحل

∵ معادلة الكرة هى : س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٦ س – ٤ ص + ١٠ ع – ٨ = ٠

∴ مركز الكرة (– ½ معامل س ، – ½ معامل ص ، – ½ معامل ع)

= (–٣ ، ٢ ، – ٥)

(٤) إذا كان : أ = (–٢ ، ٤ ، ٦) ، ب = (٠ ، ك ، ٣) حيث ك ∈ ص+ و كان ‖ أ ب ‖ = ٧ فإن : قيمة ك = ...

(أ) ١٠ (ب) ٨ (حـ) ٦ (ء) ٤

الحل

∵ $\|\overrightarrow{أب}\| = ٧$ وحدة طول ∴ $(\|\overrightarrow{أب}\|)^{٢} = ٤٩$

∴ $٤ + (ك - ٤)^{٢} + ٩ = ٤٩$ ∴ $(ك - ٤)^{٢} = ٣٦$

∴ $ك - ٤ = ٦$ أو $ك - ٤ = -٦$

∴ $ك = ١٠$ ∴ $ك = -٢$ مرفوض لأن : $ك \in ص_{+}$

(٥) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ (٢ ، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ (٠ ، ٠ ، ٤) فإن θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

الحل

$$جتا\ \theta = \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ}\| \|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(٢ ، ٠ ، ٢) \bullet (٠ ، ٠ ، ٤)}{\sqrt{٨}\ \sqrt{١٦}} = \frac{٨}{٨\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

∴ $\theta = ٤٥°$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، ١) فإن :
مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

الحل

$$مركبة\ \overrightarrow{أ}\ فى\ اتجاه\ \overrightarrow{ب} = \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} = \frac{(-١ ، ٤ ، ٢) \bullet (٢ ، ٢ ، ١)}{\sqrt{٩}} = \frac{٨}{٣}$$

(٤) إذا كان : $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٤ ك س + ٤ ص - ٨ ع + ٢ ك = ٠$
معادلة كرة طول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ مركز الكرة = (٢ك ، −٢ ، ٤) ، $نق = ٢\sqrt{٥}$ ، حـ = ٢ ك

∴ $٤ك^{٢} + ٤ + ١٦ - ٢ك = ٢٠$ ∴ $٤ك^{٢} - ٢ك = ٠$

∴ $٢ك (٢ك - ١) = ٠$ و منها : ك = ٠ أو $ك = \frac{١}{٢}$

(٦) إذا كانت : جـ (−١ ، ٦ ، −٥) منتصف $\overline{أب}$ حيث :
أ (ك − ٢ ، −١ ، م + ٣) ، ب (٢ ، ن − ٧ ، −٢)
فإن : ك + م − ن = ...

الحل

∵ جـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\frac{ك - ٢ + ٢}{٢} = -١$ ∴ ك = −٢

، $\frac{-١ + ن - ٧}{٢} = ٦$ ∴ ن − ٨ = ١٢ ∴ ن = ٢٠

، $\frac{م + ٣ - ٢}{٢} = -٥$ ∴ م + ١ = −١٠ ∴ م = −١١

∴ ك + م − ن = −٢ − ١١ − ٢٠ = −٣٣

السؤال الخامس :

(٢) إذا كان : $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ١$
، $(س + ٤)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} + (ع - ٢)^{٢} = ٤$ معادلتا كرتين
أوجد البعد بين مركزى الكرتين و بين أن الكرتين غير متقاطعتين

الحل

مركز الكرة الأولى $(م_{١})$ = (٢ ، −٤ ، ٢) ، $نق_{١} = ١$

مركز الكرة الثانية $(م_{٢})$ = (−٤ ، ٤ ، ٢) ، $نق_{٢} = ٢$

∴ $(م_{١}م_{٢})^{٢} = (-٤ - ٢)^{٢} + (٤ + ٤)^{٢} + (٢ - ٢)^{٢} = ١٠٠$

∴ $م_{١}م_{٢} = ١٠$ ، ∵ $نق_{١} + نق_{٢} = ٣$

∴ $م_{١}م_{٢} > نق_{١} + نق_{٢}$ ∴ الكرتان متباعدتان (غير متقاطعتين)

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) إذا كان : (س ، ص ، ع) منتصف أب حيث أ (−٤ ، ٠ ، ٥) ، ب (−٢ ، ٤ ، −١٣) فإن : س + ص + ع = ...

(أ) −٥ (ب) ٤ (حـ) ٦ (ء) ٩

الحل

∵ (س ، ص ، ع) منتصف أب ∴ س = (−٤ − ٢) / ٢ = −٣

، ص = (٠ + ٤) / ٢ = ٢ ، ع = (٥ − ١٣) / ٢ = −٤

∴ س + ص + ع = −٣ + ٢ − ٤ = −٥

(٤) إذا كان : أ (−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب (١ ، ٢ ، ك) و كان طول أب = √٧٧ فإن : إحدى قيم ك هى ....

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ١٥ (ء) ٢٠

الحل

∵ طول أب = √٧٧ ∴ أب = √٧٧ ∴ (أب)² = ٧٧

∴ (١ + ٤)² + (٢ + ٢)² + (ك − ٣)² = ٧٧

∴ ٢٥ + ١٦ + (ك − ٣)² = ٧٧ ∴ (ك − ٣)² = ٣٦

∴ ك − ٣ = ٦ و منها : ك = ٩ " إحدى قيم ك "

أو ك − ٣ = −٦ و منها : ك = −٣

(٥) إذا كان : أ→ (−١ ، ٣ ، ٤) ، ب→ (٠ ، −٢ ، ٥) فإن :

|| أب→ || = ...

(أ) ٢√٣ (ب) ٣√٣ (حـ) ٤√٣ (ء) ٥√٣

الحل

(|| أب→ ||)² = (٠ + ١)² + (−٢ − ٣)² + (٥ − ٤)² = ٢٧

∴ || أب→ || = √٢٧ = ٣√٣

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) فى الشكل الموضح :

أ→ = (١ ، ٢ ، −١) ،

ب→ = (٦ ، ك ، ٠) ،

حـ→ = (٤ ، ٠ ، ٢√٢)

قيمة ك = ...

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين أ→ ، ب→ = θ ، بين ب→ ، حـ→ = β

∵ θ = β ∴ جتا θ = جتا β ∴ (أ→ • ب→) / (||أ→|| ||ب→||) = (ب→ • حـ→) / (||ب→|| ||حـ→||)

∴ (٦ + ٢ك) / (√٦ √(٣٦ + ك²)) = ٢٤ / (٢√٦ √(٣٦ + ك²))

و منها : ٦ + ٢ك = ١٢ و منها : ك = ٣

(٤) طول نصف قطر الكرة :

س² + ص² + ع² + ٤س − ٦ص + ٨ع + ٤ = ٠

يساوى = ...

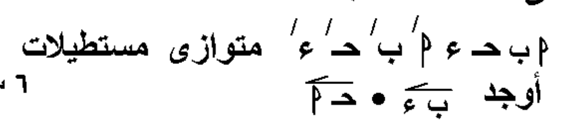
الحل

∵ مركز الكرة = (−٢ ، ٣ ، −٤) ، حـ = −٤

∴ نق² = ٤ + ٩ + ١٦ − ٤ = ٢٥ ∴ نق = ٥

السؤال الخامس :

(٢) فى الشكل المقابل : م ب حـ ء م َ ب َ حـ َ ء َ متوازى مستطيلات أوجد $\overrightarrow{ب ء} \bullet \overrightarrow{حـ م}$



الحل

نعتبر ء َ نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ م (٠ ، ٨ ، ٦) ، ب (٤ ، ٨ ، ٦) ،

حـ (٤ ، ٠ ، ٦) ، ء (٠ ، ٠ ، ٦)

∴ $\overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، ٠ ، ٦) – (٤ ، ٨ ، ٦) = (–٤ ، –٨ ، ٠)

، $\overrightarrow{حـ م}$ = (٠ ، ٨ ، ٦) – (٤ ، ٠ ، ٦) = (–٤ ، ٨ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{ب ء} \bullet \overrightarrow{حـ م}$ = (–٤ ، –٨ ، ٠) • (–٤ ، ٨ ، ٠)

= ١٦ – ٦٤ + ٠ = – ٤٨

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{م}$ = (١ ، –١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢ ، –٣) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (–٢ ، ١ ، ٠) فإن : ‖ ٣ $\overrightarrow{م}$ – $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$ ‖ = ...

(م) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ١١ (حـ) ١٢ (ء) ٧ $\sqrt{٢}$

الحل

∵ ٣ $\overrightarrow{م}$ – $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$ = (٣ ، –٣ ، ٦) – (٠ ، ٢ ، –٣) + (–٢ ، ١ ، ٠) = (١ ، –٤ ، ٩)

∴ ‖ ٣ $\overrightarrow{م}$ – $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{حـ}$ ‖ = ‖ (١ ، –٤ ، ٩) ‖ = $\sqrt{١ + ١٦ + ٨١}$

= $\sqrt{٩٨}$ = ٧ $\sqrt{٢}$ وحدة طول

(٦) جيوب تمام الاتجاه للمتجه (٢ ، –٤ ، ٤) هى ....

(م) (٢ ، –٤ ، ٤) (ب) (١ ، –٢ ، ٢)

(حـ) ($\frac{١}{٣}$ ، –$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$) (ء) ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

الحل

∵ ‖ (٢ ، –٤ ، ٤) ‖ = ٦

∴ جيوب تمام الاتجاه للمتجه = ($\frac{٢}{٦}$ ، –$\frac{٤}{٦}$ ، $\frac{٤}{٦}$) = ($\frac{١}{٣}$ ، –$\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) مركز الكرة $س^٢ + ص^٢ + ع^٢$ + ٨ س – ١٢ ص + ٢ ع + ١ = ٠ يساوى = ...

الحل

∵ مركز الكرة (–$\frac{١}{٢}$ معامل س ، –$\frac{١}{٢}$ معامل ص ، –$\frac{١}{٢}$ معامل ع)

∴ مركز الكرة = (–٤ ، ٦ ، –١)

(٤) م ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : $\overrightarrow{م ب} \bullet \overrightarrow{م حـ}$ = ...

الحل

∵ م ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم

∴ ‖ $\overrightarrow{م ب}$ ‖ = ١٠ ، ‖ $\overrightarrow{م حـ}$ ‖ = ١٠ $\sqrt{٢}$

، ق (∠ ب م حـ) = ٤٥°

∴ $\overrightarrow{م ب} \bullet \overrightarrow{م حـ}$ = ‖ $\overrightarrow{م ب}$ ‖ ‖ $\overrightarrow{م حـ}$ ‖ حتا ٤٥° = ١٠ × ١٠ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠٠

(٥) متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ (٢ ، ٣ ، ٢ $\sqrt{٣}$) يساوى ....

الحل

$\because \|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$

$\therefore$ متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = (\frac{٢}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٢}{٥}\sqrt{٣})$

السؤال الثالث :

(٢) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، -٢ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ج} = (٠ ، ٢ ، ٤)$

الحل

حجم متوازى السطوح = $| \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} |$

$\because \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٦$

$\therefore$ حجم متوازى السطوح = ١٦ وحدة حجم

السؤال الرابع :

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ثلاثة متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى

أوجد : (أ) $\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ج} \|$

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (\frac{١}{٣} ، -\frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ ، $\overrightarrow{ب} = (\frac{٣}{٥} ، ٠ ، -\frac{٤}{٥})$

أوجد $\overrightarrow{ج}$

الحل

(أ) $(\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ج} \|)^٢ = (٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ج}) \bullet (٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ج})$

$= ٤\|\overrightarrow{أ}\|^٢ - ٢\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} + ٦\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ج} - ٢\overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{أ} + \|\overrightarrow{ب}\|^٢$

$- ٣\overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{ج} + ٦\overrightarrow{ج} \bullet \overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ج} \bullet \overrightarrow{ب} + ٩\|\overrightarrow{ج}\|^٢$

، $\because$ المتجهات متعامدة مثنى مثنى

$\therefore \|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{ج}\| = ١$ ،

$\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج} \bullet \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{ج} = \overrightarrow{ج} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$.

$\therefore (\| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ج} \|)^٢ = ٤ + ١ + ٩ = ١٤$

$\therefore \| ٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{ج} \| = \sqrt{١٤}$

(ب) نفرض أن : $\overrightarrow{ج} = (ك ، ل ، م)$

، $\because \overrightarrow{ج}$ متجه وحدة $\therefore ك^٢ + ل^٢ + م^٢ = ١$ (١)

، $\because \overrightarrow{ج} \perp \overrightarrow{أ}$ $\therefore \frac{١}{٣} ك - \frac{٢}{٣} ل + \frac{٢}{٣} م = ٠$ بالضرب × ٣

$\therefore ك - ٢ ل + ٢ م = ٠$ (٢)

، $\because \overrightarrow{ج} \perp \overrightarrow{ب}$ $\therefore \frac{٣}{٥} ك - \frac{٤}{٥} م = ٠$

و منها : $ك = \frac{٤}{٣} م$ (٣) بالتعويض من (٣) فى (٢) ينتج :

$\frac{٤}{٣} م - ٢ ل + ٢ م = ٠$ $\therefore \frac{١٠}{٣} م = ٢ ل$ أى : $ل = \frac{٥}{٣} م$

بالتعويض فى (١) ينتج :

$\frac{١٦}{٩} م^٢ + \frac{٢٥}{٩} م^٢ + م^٢ = ١$ $\therefore \frac{٥٠}{٩} م^٢ = ١$

و منها : $م = \pm \frac{٣}{١٠}\sqrt{٢}$ $\therefore ك = \pm \frac{٤}{١٠}\sqrt{٢}$ ، $ل = \pm \frac{٥}{١٠}\sqrt{٢}$

$\therefore \overrightarrow{ج} = \pm \frac{١}{١٠}\sqrt{٢} (٤ ، ٥ ، ٣)$

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أب}$ = − ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ + ٧ $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب حـ}$ = $\overrightarrow{ص}$ + ٥ $\overrightarrow{ع}$ فإن : $\|\overrightarrow{أحـ}\|$ = ...

(أ) ١٣ (ب) ١٢ (حـ) ١٠ (ء) ٩

الحل

∵ $\overrightarrow{أحـ}$ = $\overrightarrow{ب حـ}$ − $\overrightarrow{ب أ}$ = $\overrightarrow{ب حـ}$ + $\overrightarrow{أب}$ = − ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ + ١٢ $\overrightarrow{ع}$

∴ $\|\overrightarrow{أحـ}\|$ = $\sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (−٧ ، ٣ ، ١٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، −١ ، −٢) فإن : متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أب}$ = ...

(أ) ($\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) (ب) ($\frac{٣}{١٣}$ ، − $\frac{٤}{١٣}$ ، − $\frac{١٢}{١٣}$)

(حـ) (− $\frac{٣}{١٣}$ ، $\frac{٤}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) (ء) (− $\frac{٣}{١٣}$ ، − $\frac{٤}{١٣}$ ، − $\frac{١٢}{١٣}$)

الحل

$\overrightarrow{أب}$ = (−٤ ، −١ ، −٢) − (−٧ ، ٣ ، ١٠) = (٣ ، −٤ ، −١٢)

∴ $\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤}$ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣

∴ متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أب}$ = $\frac{\overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$ = ($\frac{٣}{١٣}$ ، − $\frac{٤}{١٣}$ ، − $\frac{١٢}{١٣}$)

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، −١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، −٢ ، ٠) ، $\overrightarrow{حـ}$ = (٠ ، ٢ ، ٤) فإن : $\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ × $\overrightarrow{حـ}$ = ...

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (حـ) ١٤ (ء) ١٦

الحل

$\overrightarrow{أ}$ • $\overrightarrow{ب}$ × $\overrightarrow{حـ}$ = $\begin{vmatrix} ١ & −١ & ٢ \\ ٣ & −٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$ = ١ (− ٨ + ٠) + ١ (١٢ + ٠) + ٢ (٦ + ٠) = ١٦

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\|\overrightarrow{ب حـ}\|$ = $\sqrt{٦}$ ، $\|\overrightarrow{أحـ}\|$ = $\sqrt{٢}$ ، فإن : (−١ ، ٠ ، ١) =

$\overrightarrow{ب أ}$ • $\overrightarrow{ب حـ}$ = ...

الحل

$\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{١ + ٠ + ١}$ = $\sqrt{٢}$

∵ حتا ب = $\frac{٢ + ٦ − ٢}{٢ \sqrt{٢} \sqrt{٦}}$ = $\frac{٣}{٤ \sqrt{٣}}$ " قانون جيب التمام "

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ • $\overrightarrow{ب حـ}$ = $\|\overrightarrow{ب أ}\|$ $\|\overrightarrow{ب حـ}\|$ حتا ب = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٦}$ × $\frac{٣}{٤ \sqrt{٣}}$ = ٣

(٥) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، ٤ ، − ٥) و تمس المستوى ص ع

الحل

∵ الكرة تمس المستوى ص ع ∴ نق (للدائرة) = | ٣ | = ٣ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هى : $(س − ٣)^{٢}$ + $(ص − ٤)^{٢}$ + $(ع + ٥)^{٢}$ = ٩

الاختبار السادس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٤) إذا كان : أ⃗ = (٢ ، ١ ، −٢) ، أ⃗ + ب⃗ = أ⃗ × ب⃗

فإن : ب⃗ = ...

(أ) (٢ ، −١ ، −٢) (ب) (٢ ، ١ ، −٢)

(جـ) (−٢ ، −١ ، ٢) (د) (−٢ ، −١ ، −٣)

الحل

بفرض أن : ب⃗ = (ك ، ل ، م)

∴ (٢ ، ١ ، −٢) + (ك ، ل ، م) = (٢ ، ١ ، −٢) × (ك ، ل ، م)

∴ (٢ + ك) س⃗ + (١ + ل) ص⃗ + (−٢ + م) ع⃗ = | س⃗ ص⃗ ع⃗ ؛ ٢ ١ −٢ ؛ ك ل م |

= (م + ٢ ل) س⃗ − (٢ م + ٢ ك) ص⃗ + (٢ ل − ك) ع⃗

∴ ٢ + ك = م + ٢ ل (١) ، ١ + ل = −٢ م − ٢ ك (٢)

، −٢ + م = ٢ ل − ك (٣) بطرح (٣) من (١) ينتج :

٤ + ك − م = م + ك و منها : م = ٢

بضرب (٣) × ٢ و طرحها من (٢) ينتج : ٥ + ل − ٢ م = −٢ م − ٤ ل

و منها : ل = −١ بالتعويض فى (١) ينتج : ك = −٢

∴ ب⃗ = (−٢ ، −١ ، ٢)

(٥) إذا كان : أ (−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب (٤ ، ٢ ، −٥) فإن :

|| أب⃗ || = ... وحدة طول

(أ) √١٢ (ب) √٤٠ (جـ) √٤٤ (د) √١٠٤

الحل

أب⃗ = (٤ ، ٢ ، −٥) − (−٢ ، ٠ ، ٣) = (٦ ، ٢ ، −٨)

∴ || أب⃗ || = √(٣٦ + ٤ + ٦٤) = √١٠٤

(٦) إذا كان : أ⃗ ⊥ ب⃗ ، أ⃗ ⊥ جـ⃗ و كان : ب⃗ = (٢ ، ٣ ، ٢) ،

جـ⃗ = (١ ، ٢ ، ١) ، || أ⃗ || = ٤ √٢ فإن : أ⃗ = ...

(أ) (٢ ، ٣ ، ١) (ب) (−٤ ، ٠ ، ٤)

(جـ) (٤ ، ٤ ، ٠) (د) (٠ ، −٤ ، ٤)

الحل

بفرض أن : أ⃗ = (ك ، ل ، م)

∵ || أ⃗ || = ٤ √٢ ∴ ك² + ل² + م² = ٣٢ (١)

، ∵ أ⃗ ⊥ ب⃗ ∴ (ك ، ل ، م) • (٢ ، ٣ ، ٢) = ٠

∴ ٢ ك + ٣ ل + ٢ م = ٠ (٢)

، ∵ أ⃗ ⊥ جـ⃗ ∴ (ك ، ل ، م) • (١ ، ٢ ، ١) = ٠

∴ ك + ٢ ل + م = ٠ (٣)

بضرب (٣) × ٢ و طرحها من (٢) ينتج : ل = ٠

بالتعويض فى (٣) ينتج : ك = − م بالتعويض فى (١) ينتج :

ك² + ٠ + ك² = ٣٢ ∴ ٢ ك² = ٣٢ ∴ ك² = ١٦ ∴ ك = ± ٤

∴ م = ∓ ٤ ∴ أ⃗ = ± (−٤ ، ٠ ، ٤)

أى أن : أ⃗ = (−٤ ، ٠ ، ٤)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، ٠ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، -١ ، -٢)$

فإن : $(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \bullet (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}) = ...$

الحل

$(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \bullet (\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}) = (\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}) \bullet (-(\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}))$

$= -(\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \|)^2$

$$\because \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = ٢\overrightarrow{س} + ٦\overrightarrow{ص} - \overrightarrow{ع}$$

$\therefore$ المقدار $= -(\| (٢ ، ٦ ، -١) \|)^2 = -٤١$

الاختبار السابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٤ ، -ك ، ٦)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٢ ، م)$

و كان : $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$ فإن : $ك + م = ...$

(أ) -٣ (ب) -٢ (جـ) -١ (د) صفر

الحل

$\because \overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب} \quad \therefore \frac{٤}{٢} = \frac{-ك}{٢} = \frac{٦}{م}$ ومنها : $ك = -٤$ ، $م = ٣$

$\therefore ك + م = -٤ + ٣ = -١$

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٢ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (-٢ ، ١ ، ٢)$

فإن : متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب} = ...$

(أ) $(\frac{٤}{٩} ، -\frac{٢}{٩} ، -\frac{٤}{٩})$ (ب) $(\frac{٤}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، \frac{٤}{٩})$

(جـ) $(-\frac{٤}{٩} ، -\frac{٢}{٩} ، -\frac{٢}{٩})$ (د) $(\frac{٤}{٩} ، -\frac{٢}{٩} ، -\frac{٤}{٩})$

الحل

متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ (متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$)

$$= \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\| \overrightarrow{ب} \|} \left(\frac{\overrightarrow{ب}}{\| \overrightarrow{ب} \|} \right) = \frac{(١ ، -٢ ، ١) \bullet (-٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٩}} \left(\frac{(-٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٩}} \right)$$

$= -\frac{٢}{٩} (-٢ ، ١ ، ٢) = (\frac{٤}{٩} ، -\frac{٢}{٩} ، -\frac{٤}{٩})$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٤) طول نصف قطر الكرة $(س - ٢)^2 + (ص + ٤)^2 + (ع - ٥)^2 = ٦٤$ يساوى ....

الحل

$نق = \sqrt{٦٤} = ٨$ وحدة طول

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٤ ، -٥ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، -ل ، -٢)$ ، $\overrightarrow{جـ} = (-٤ ، ٤ ، م - ٢)$ و كان : $\overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{جـ}$ فإن :

$ل + م = ...$

الحل

$\overrightarrow{أب} = (٢ ، -ل ، -٢) - (٤ ، -٥ ، ١) = (-٢ ، -ل + ٥ ، -٣)$

$\because \overrightarrow{أب} \parallel \overrightarrow{جـ} \quad \therefore \frac{-٢}{-٤} = \frac{-ل + ٥}{٤} = \frac{-٣}{م - ٢}$

$\therefore -ل + ٥ = ٢$ و منها : $ل = ٣$

، $م - ٢ = -٦$ و منها : $م = -٤$ $\therefore ل + م = -١$

(٦) إذا كان : $\| \overrightarrow{أ} \| = ٢$ ، $\| \overrightarrow{ب} \| = ٣$ ، $\| \overrightarrow{جـ} \| = ١٢$ و كان :

$\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ متعامدة مثنى مثنى فإن : $\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ} \| = ...$

الحل

(|| $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ + $\vec{ج}$ ||)^{٢} = ($\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ + $\vec{ج}$) • ($\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ + $\vec{ج}$)

= || $\vec{أ}$ ||^{٢} + $\vec{أ}$ • $\vec{ب}$ + $\vec{أ}$ • $\vec{ج}$ + $\vec{ب}$ • $\vec{أ}$ + || $\vec{ب}$ ||^{٢} + $\vec{ب}$ • $\vec{ج}$ + $\vec{ج}$ • $\vec{أ}$

+ $\vec{ج}$ • $\vec{ب}$ + || $\vec{ج}$ ||^{٢} ، ∵ المتجهات متعامدة مثنى مثنى

∴ || $\vec{أ}$ || = ٤ ، || $\vec{ب}$ || = ٩ ، || $\vec{ج}$ || = ١٤٤ ،

$\vec{أ}$ • $\vec{ب}$ = $\vec{ب}$ • $\vec{أ}$ = $\vec{أ}$ • $\vec{ج}$ = $\vec{ج}$ • $\vec{أ}$ = $\vec{ب}$ • $\vec{ج}$ = $\vec{ج}$ • $\vec{ب}$ = ٠ .

∴ (|| $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ + $\vec{ج}$ ||)^{٢} = ٤ + ٩ + ١٤٤ = ١٥٧

∴ || $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ + $\vec{ج}$ || = $\sqrt{١٥٧}$

السؤال الثالث :

(٢) إذا كان : $\vec{أ}$ = (٢ حتا θ ، لو$_{٣}$ س ، حا θ) ،

$\vec{ب}$ = (حتا θ ، لو$_{٥}$ ٢٧ ، ٢ حا θ) و كان : $\vec{أ}$ • $\vec{ب}$ = ١١

أوجد قيمة س

الحل

(٢ حتا θ ، لو$_{٣}$ س ، حا θ) • (حتا θ ، لو$_{٥}$ ٢٧ ، ٢ حا θ) = ١١

∴ ٢ حتا^{٢} θ + لو$_{٣}$ س × لو$_{٥}$ ٢٧ + ٢ حا^{٢} θ = ١١

∴ ٢ (حتا^{٢} θ + حا^{٢} θ) + $\frac{لو س}{لو ٣}$ × $\frac{لو ٢٧}{لو ٥}$ = ١١

∴ ٢ × ١ + $\frac{لو س}{لو ٣}$ × $\frac{٣ لو ٣}{لو ٥}$ = ١١

∴ ٢ + $\frac{لو س}{١}$ × $\frac{٣}{لو ٥}$ = ١١　　∴ $\frac{٣ لو س}{لو ٥}$ = ٩

∴ $\frac{لو س}{لو ٥}$ = ٣　　∴ لو$_{٥}$ س = ٣　　∴ س = (٥)^{٣} = ١٢٥

الاختبار الثامن

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٤) إذا كان : || $\vec{أ}$ || = ٤ ، || $\vec{ب}$ || = ٦ و كان : قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ يساوى ٦٠° فإن : (٢ $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$) • ($\vec{أ}$ − $\vec{ب}$) = ...

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين المتجهين = θ ، ∵ θ = ٦٠°

∴ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{\vec{أ} • \vec{ب}}{٤ × ٦}$　　∴ $\vec{أ}$ • $\vec{ب}$ = ١٢

، المقدار = ٢ (|| $\vec{أ}$ ||)^{٢} − ٢ $\vec{أ}$ • $\vec{ب}$ + $\vec{ب}$ • $\vec{أ}$ − (|| $\vec{ب}$ ||)^{٢}

= ٢ × ١٦ − ٢ × ١٢ + ١٢ − ٣٦

= ٣٢ − ٢٤ + ١٢ − ٣٦ = − ١٦

(٥) معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ (٧ ، ١ ، − ٤) ، ب (٣ ، − ١ ، ٢) هى ....

الحل

مركز الكرة = ($\frac{٧ + ٣}{٢}$ ، $\frac{١ − ١}{٢}$ ، $\frac{− ٤ + ٢}{٢}$) = (٥ ، ٠ ، − ١)

∵ $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، − ١ ، ٢) − (٧ ، ١ ، − ٤) = (− ٤ ، − ٢ ، ٦)

∴ || $\overrightarrow{أب}$ || = $\sqrt{١٦ + ٤ + ٣٦}$ = $\sqrt{٥٦}$ = ٢ $\sqrt{١٤}$

∴ طول نصف قطر الكرة = $\sqrt{١٤}$

∴ معادلة الكرة هى : (س − ٥)^{٢} + ص^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ١٤

(٦) إذا كان : $\vec{أ}$ = (١ ، ٢ ، − ٤) ، $\vec{ب}$ = (١ ، ١ ، ك − ١) و كان || $\vec{أ}$ + $\vec{ب}$ || = ٧ وحدة طولية فإن : ك = ...

الحل

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٢ ، -٤) + (١ ، ١ ، ك - ١) = (٢ ، ٣ ، ك - ٥)

، ∵ $\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \|$ = ٧　　∴ $(\| \overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} \|)^2$ = ٤٩

∴ ٤ + ٩ + $(ك - ٥)^2$ = ٤٩　　∴ $(ك - ٥)^2$ = ٣٦

∴ ك - ٥ = ٦　　و منها : ك = ١١

أو : ك - ٥ = -٦　　و منها : ك = -١

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) أ ب حـ ء متوازى أضلاع و كان $\overrightarrow{أب}$ = (٢ ، ٢ ، -١) ، $\overrightarrow{أء}$ = (-١ ، ٢ ، -٣) فإن مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ... $سم^2$

(أ) ٦　　(ب) ٧ $\sqrt{٢}$　　(حـ) ٣ $\sqrt{١١}$　　(ء) $\sqrt{١٠١}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أء} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix}$ = -٤ $\overrightarrow{س}$ + ٧ $\overrightarrow{ص}$ + ٦ $\overrightarrow{ع}$

مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = $\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أء} \|$

= $\sqrt{١٦ + ٤٩ + ٣٦}$ = $\sqrt{١٠١}$

(٤) فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢ π سم

، حـ منتصف $\overline{أم}$ فإن :

$\overrightarrow{بحـ} \bullet \overrightarrow{حـو}$ = ...

(أ) -٤٣　　(ب) -٤٠

(حـ) -٣٧　　(ء) -٣٣

الحل

∵ محيط قاعدة المخروط = ١٢ π سم

∴ ٢ نق π = ١٢ π　　∴ نق = ب و = ٦ سم

∴ حتا ∠ م ب و = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ م حـ = حـ أ ، ب و = و أ　　∴ $\overline{مب}$ // $\overline{وحـ}$

∴ ق (∠ حـ و ب) + ق (∠ م ب و) = ١٨٠°

∴ حتا ∠ حـ و ب = - حتا ∠ م ب و = - $\frac{٣}{٥}$

من Δ م و أ : ∵ ق (∠ م و أ) = ٩٠° ، م حـ = حـ أ

∴ حـ و = $\frac{١}{٢}$ م أ = ٥ سم

من Δ حـ و ب : $(ب حـ)^2$ = ٣٦ + ٢٥ - ٢ × ٦ × ٥ × (- $\frac{٣}{٥}$) = ٩٩

∴ ب حـ = ٣ $\sqrt{١١}$ سم　　" قانون جيب التمام "

، حتا ∠ ب حـ و = $\frac{٢٥ + ٩٩ - ٣٦}{٢ \times ٥ \times ٣\sqrt{١١}}$ = $\frac{٤٣}{١٥\sqrt{١١}}$　　" قانون جيب التمام "

∴ $\overrightarrow{بحـ} \bullet \overrightarrow{حـو}$ = - ($\overrightarrow{حـب} \bullet \overrightarrow{حـو}$) = - $\| \overrightarrow{حـب} \| \, \| \overrightarrow{حـو} \|$ حتا ∠ ب حـ و

= - (٣ $\sqrt{١١}$ × ٥ × $\frac{٤٣}{١٥\sqrt{١١}}$) = -٤٣

حل آخر

من ب و حـ : $\overrightarrow{بو} + \overrightarrow{وحـ} = \overrightarrow{بحـ}$

∴ $\overrightarrow{بحـ} \bullet \overrightarrow{حـو}$ = ($\overrightarrow{بو} + \overrightarrow{وحـ}$) • $\overrightarrow{حـو}$ = $\overrightarrow{بو} \bullet \overrightarrow{حـو} + \overrightarrow{وحـ} \bullet \overrightarrow{حـو}$

= $\overrightarrow{بو} \bullet \overrightarrow{حـو} - \overrightarrow{وحـ} \bullet \overrightarrow{وحـ}$

= $\| \overrightarrow{بو} \| \, \| \overrightarrow{حـو} \|$ حتا ∠ حـ و ب - $(\| \overrightarrow{وحـ} \|)^2$

= ٦ × ٥ × (- $\frac{٣}{٥}$) - ٢٥ = -٤٣

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ + $\overrightarrow{ع}$

فإن : $\overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب})$ = ...

(أ) $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ع}$　　(ب) -٣ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{ع}$



(حـ) $-٣\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ (ء) $٣\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$

الحل

$\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ٢\overrightarrow{ع}$

$\therefore \overrightarrow{أ} \times (\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ١ & ١ \\ ١- & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٣\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع}$

السؤال الخامس :

(٢) إذا كانت الكرتان $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$ ، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥$ متماستان فأوجد قيمة ك

الحل

بالنسبة للكرة الأولى : $م_١ = (٣ ، ٠ ، ٣)$ ، $نق_١ = ٤$ ،

بالنسبة للكرة الثانية : $م_٢ = (-١ ، ٤ ، ك)$ ، $نق_٢ = ٥$

∵ الكرتان متماستان ∴ أولاً : إذا كانت متماستان من الخارج فإن :

$م_١م_٢ = نق_١ + نق_٢ = ٩$ ∴ $(م_١م_٢)^٢ = ٨١$

∴ $(٣ + ١)^٢ + (٠ - ٤)^٢ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$

∴ $١٦ + ١٦ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = ٤٩$

∴ $٣ - ك = ٧$ و منها : $ك = -٤$ أو

$٣ - ك = -٧$ و منها : $ك = ١٠$

ثانياً : إذا كانت متماستان من الداخل فإن :

$م_١م_٢ = نق_٢ - نق_١ = ٩$ ∴ $(م_١م_٢)^٢ = ١$

∴ $١٦ + ١٦ + (٣ - ك)^٢ = ١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = -٣١$ مرفوض

الاختبار التاسع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ} = (١ ، -٣ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٠ ، ١)$ يساوي ....

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين المتجهين = θ

∴ حتا $θ = \frac{(١ ، -٣ ، ٠)\bullet(٢ ، ٠ ، ١)}{\sqrt{١ + ٩ + ١}\sqrt{٤ + ٠ + ١}} = \frac{٢}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

(٤) طول نصف قطر الكرة :

$س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٢س - ٢ص - ٤ع - ٣ = ٠$

يساوي = ...

الحل

مركز الكرة : $م = (-١ ، ١ ، ٢)$ ، $حـ = -٣$

∴ طول نصف قطر الكرة : $نق = \sqrt{١ + ١ + ٤ + ٣} = \sqrt{٩} = ٣$ وحدة طول

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، ك)$ متجه وحدة فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ $\overrightarrow{أ}$ متجه وحدة ∴ $\|\overrightarrow{أ}\| = ١$

∴ $\frac{١}{٤} + \frac{٩}{١٦} + ك^٢ = ١$ ∴ $ك^٢ = \frac{٣}{١٦}$ ∴ $ك = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (ك ، -٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٣ ، -ك)$ متعامدان فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ المتجهان متعامدان ∴ $(ك ، -٣ ، ١)\bullet(٢ ، ٣ ، -ك) = ٠$

∴ $٢ك - ٩ - ك = ٠$ ∴ $ك = ٩$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، – ٢ ، ك) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، م ، ٢)

و كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن : ك = ... ، م = ...

الحل

∵ المتجهان متوازيان ∴ $\frac{٣}{١} = \frac{-٢}{م} = \frac{ك}{٢}$ ∴ ك = ٦ ، م = $-\frac{٢}{٣}$

(٤) إذا كان : قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٤ ، ك) مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى ٤٥° فإن : ك = ...

الحل

متجه الاتجاه الموجب لمحور الصادات = (٠ ، ١ ، ٠)

، ∵ قياس الزاوية = ٤٥°

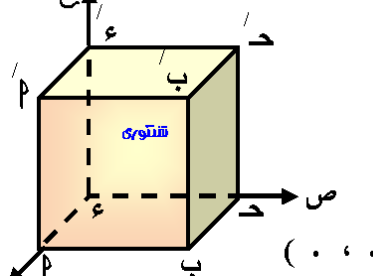
∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{(٢ ، ٤ ، ك) \bullet (٠ ، ١ ، ٠)}{\sqrt{٤ + ١٦ + ك^٢}\ \sqrt{٠ + ١ + ٠}}$ و منها و بالتربيع ينتج :

٢٠ + ك^٢ = ٣٢ ∴ ك^٢ = ١٢ ∴ ك = ± ٢$\sqrt{٣}$

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أ/ ب/ حـ/ ء/ مكعب طول ضلعه الوحدة فإن :

$\overrightarrow{أ ب/}$ • $\overrightarrow{ب ء}$ = ...



الحل

نعتبر ء نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠) ∴ أ (١ ، ٠ ، ٠)

، ب/ (١ ، ١ ، ١) ، ء (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (١ ، ١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، ٠ ، ٠) – (١ ، ١ ، ٠) = (–١ ، –١ ، ٠)

، $\overrightarrow{أ ب/}$ = (١ ، ١ ، ١) – (١ ، ٠ ، ٠) = (٠ ، ١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{أ ب/}$ • $\overrightarrow{ب ء}$ = (٠ ، ١ ، ١) • (–١ ، –١ ، ٠) = –١

الاختبار العاشر

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٤) قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٤ ، $\sqrt{١١}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى ....

الحل

متجه الاتجاه الموجب لمحور السينات = (١ ، ٠ ، ٠)

، بفرض أن : قياس الزاوية المطلوبة = θ

∴ حتا θ = $\frac{(٣ ، ٤ ، \sqrt{١١}) \bullet (١ ، ٠ ، ٠)}{\sqrt{٩ + ١٦ + ١١}\ \sqrt{١ + ٠ + ٠}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٤) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، – ٢ ، ١) و طول نصف قطرها = ٥ سم هى ....

(أ) (س + ٣)^٢ + (ص – ٢)^٢ + (ع + ١)^٢ = ٥

(ب) (س + ٣)^٢ + (ص – ٢)^٢ + (ع + ١)^٢ = ٢٥

(حـ) (س – ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع – ١)^٢ = ٢٥

(ء) (س – ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع – ١)^٢ = $\sqrt{٥}$

الحل

(س – ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع – ١)^٢ = ٢٥

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء أ' ب' جـ' ء' متوازى مستطيلات ، و كان : أ (٤ ، ٠ ، ٠)

، جـ (٠ ، ٩ ، ٠) ، ء' (٠ ، ٠ ، ٧)

فإن : $\| \overrightarrow{\text{أجـ'}} \|$ = ...

الحل

(أ) $\sqrt{١٤٦}$ (ب) $\sqrt{١١٤}$

(جـ) ٥ (ء) $\sqrt{٢٠}$

الحل

من الشكل : جـ' (٠ ، ٩ ، ٧)

$\overrightarrow{\text{أجـ'}}$ = (٠ ، ٩ ، ٧) – (٤ ، ٠ ، ٠)

= (– ٤ ، ٩ ، ٧)

∴ $\| \overrightarrow{\text{أجـ'}} \| = \sqrt{١٦ + ٨١ + ٤٩} = \sqrt{١٤٦}$ وحدة طول

السؤال الخامس :

(٢) أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ حيث : أ (٢ ، ١ ، ٠)

، ب (٣ ، ١ ، $\sqrt{٣}$) فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ حيث

$\overrightarrow{\text{م}}$ = (٣ ، ٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

الحل

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٣ ، ١ ، $\sqrt{٣}$) – (٢ ، ١ ، ٠) = (١ ، ٠ ، $\sqrt{٣}$)

متجه الاتجاهية $\overrightarrow{\text{أب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$ =

مركبة $\overrightarrow{\text{أب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$ (متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$) =

$$= \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{م}}}{\|\overrightarrow{\text{م}}\|}\left(\frac{\overrightarrow{\text{م}}}{\|\overrightarrow{\text{م}}\|}\right) = \frac{(١ ، ٠ ، \sqrt{٣}) \bullet (٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})}{٥}\left(\frac{(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})}{٥}\right)$$

$$= \frac{٩}{٥}\left(\frac{(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})}{٥}\right) = \left(\frac{٢٧}{٢٥} ، \frac{١٨}{٢٥} ، \frac{١٨}{٢٥}\sqrt{٣}\right)$$





أحمد الشنتورى

المتميز

الجزء النظرى
و
حلول تمارين
الوحدة الثانية

فى
الرياضيات البحتة
الهندسة الفراغية

(س ، ص ، ع)	م ح	م • ب	سـ

إعداد : أحمد الشنتورى

٢٠١٧ / ٢٠١٨

الوحدة الثانية .... الخطوط المستقيمة و المستويات فى الفراغ

٢ – ١ معادلة المستقيم فى الفراغ

متجه اتجاه المستقيم فى الفراغ :

إذا كانت : $\theta_{س}$ ، حتا$\theta_{ص}$ ، حتا$\theta_{ع}$
هى زوايا اتجاه مستقيم فى الفراغ فإن :
حتا$\theta_{س}$ ، حتا$\theta_{ص}$ ، حتا$\theta_{ع}$ هى جيوب تمام الاتجاه لهذا المستقيم و يرمز لها
بالرموز : ل ، م ، ن على الترتيب أى أن :
ل = حتا$\theta_{س}$ ، م = حتا$\theta_{ص}$ ، ن = حتا$\theta_{ع}$

، ∵ حتا$^2\theta_{س}$ + حتا$^2\theta_{ص}$ + حتا$^2\theta_{ع}$ = ١ ∴ ل^2 + م^2 + ن^2 = ١

و يكون : $\overleftarrow{ى}$ = ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$
هو متجه الوحدة في اتجاه المستقيم
و يكون : أى متجه موازياً لمتجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ يسمى متجه اتجاه المستقيم
و يرمز له بالرمز $\overleftarrow{هـ}$
أى أن : $\overleftarrow{هـ}$ = ك (ل $\overleftarrow{س}$ + م $\overleftarrow{ص}$ + ن $\overleftarrow{ع}$) = (٢ ، ب ، حـ)
حيث : ٢ ، ب ، حـ تتناسب مع ل ، م ، ن ، ك ∈ ح*
، و تسمى : ٢ ، ب ، حـ نسب اتجاه المستقيم

ملاحظات :

(١) ∵ (٢ ، ب ، حـ) = ك (ل ، م ، ن) ، ك ∈ ح*
∴ لكل قيمة لـ ك تتعين لـ (ل ، م ، ن)
أى أن : الخط المستقيم له عدد لا نهائى من متجهات الاتجاه الموازية ، و كل منها يوازى هذا المستقيم

(٢) إذا علمت نقطتان ٢ ، ب على المستقيم فإن :
١) متجه اتجاه المستقيم = $\overleftarrow{٢ب}$ = $\overleftarrow{ب}$ – $\overleftarrow{٢}$
٢) ك $\overleftarrow{٢ب}$ حيث : ك ∈ ح* هو أيضاً متجه اتجاه لهذا المستقيم

(٣) متجه اتجاه المستقيم المار بنقطة الأصل و بالنقطة ٢ ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$)
هو : $\overleftarrow{٢}$ = ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$)

(٤) متجه اتجاه محور س هو : (١ ، ٠ ، ٠) ، متجه اتجاه محور ص هو : (٠ ، ١ ، ٠) ، متجه اتجاه محور ع هو : (٠ ، ٠ ، ١)

(٥) المستقيم الذى متجه اتجاهه هو : (٢ ، ب ، ٠) يقع فى مستوى يوازى المستوى (س ص) ، المستقيم الذى متجه اتجاهه هو : (٢ ، ٠ ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى (س ع) ، المستقيم الذى متجه اتجاهه هو : (٠ ، ب ، حـ) يقع فى مستوى يوازى المستوى (ص ع)

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٥١

أوجد متجه اتجاه كُل من المستقيمات الآتية :
(٢) المستقيم المار بنقطة الأصل و النقطة (–١ ، ٢ ، –٢)
(ب) المستقيم المار بالنقطتين حـ (٠ ، –٢ ، ٣) ، ء (١ ، ١ ، –١)

الحل

(٢) متجه اتجاه المستقيم = (–١ ، ٢ ، –٢) – (٠ ، ٠ ، ٠) = (–١ ، ٢ ، –٢)
(ب) متجه اتجاه المستقيم = $\overleftarrow{حـء}$ = $\overleftarrow{ء}$ – $\overleftarrow{حـ}$
= (١ ، ١ ، –١) – (٠ ، –٢ ، ٣) = (١ ، ٣ ، –٤)

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٥١

(١) ماذا يمكن أن تقول عن المستقيم الذى متجه اتجاهه :
$\overrightarrow{\text{هـ}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{صفر})$

(٢) أوجد متجه اتجاه لكل من محاور الاحداثيات

الحل

(١) المستقيم الذى متجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{هـ}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{صفر})$ هو مستقيم يقع فى مستوى يوازى المستوى (س ص)

(٢) متجه اتجاه محور س هو : (١ ، ٠ ، ٠) ، متجه اتجاه محور ص هو : (٠ ، ١ ، ٠) ، متجه اتجاه محور ع هو : (٠ ، ٠ ، ١)

الصور المختلفة لمعادلة المستقيم فى الفراغ :

إذا كان : ل مستقيم فى الفراغ يمر بالنقطة أ متجه موضعها $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$
، متجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{هـ}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$
فإن : متجه موضع أى نقطة أخرى عليه ب هو : $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع})$
يتعين من العلاقة : $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ ب}}$
، ∵ $\overrightarrow{\text{أ ب}} \parallel \overrightarrow{\text{هـ}}$ أى أن : $\overrightarrow{\text{أ ب}} = \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}$ حيث : $\text{ك} \in \text{ح}^*$
فإن : **الصورة المتجهة لمعادلة للخط المستقيم فى الفراغ**
هى : $\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1) + \text{ك}\,(\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$
، و منها تكون : **المعادلات البارامترية للخط المستقيم فى الفراغ**
هى : $(\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1) + \text{ك}\,(\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$
∴ $\text{س} = \text{س}_1 + \text{ك}\,\text{أ}$ ، $\text{ص} = \text{ص}_1 + \text{ك}\,\text{ب}$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1 + \text{ك}\,\text{حـ}$

∴ $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \text{ك}$ ، $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \text{ك}$ ، $\frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}} = \text{ك}$

∴ **المعادلة الاحداثية (العامة) للخط المستقيم فى الفراغ** هى :

$$\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}}$$

حيث كل من : أ ، ب ، حـ لا يساوى الصفر

ملاحظات :

(١) لتعين معادلة المستقيم يتعين معرفة متجه اتجاه المستقيم و نقطة واقعة عليه

(١) ك عدد حقيقى لا يعبر عن عدد ثابت وحيد بل يأخذ قيماً حقيقية مختلفة ، و يسمى في هذه الحالة بارامتر و عند كل قيمة للبارامتر ك يمكن ايجاد نقطة على المستقيم

(٢) فى الصورة الاحداثية للمستقيم : معاملات س ، ص ، ع هى الواحد الصحيح

(٣) فى حالة : أ = صفر مثلاً فإن المعادلة الاحداثية للمستقيم تأخذ الصورة : $\text{س} = \text{س}_1$ ، $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}}$

كذلك فى حالة : ب = صفر فإن المعادلة الاحداثية للمستقيم تأخذ الصورة : $\text{ص} = \text{ص}_1$ ، $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{حـ}}$

أيضاً فى حالة : حـ = صفر فإن المعادلة الاحداثية للمستقيم تأخذ الصورة : $\text{ع} = \text{ع}_1$ ، $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{أ}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{ب}}$

(٤) حيث أن : نسب الاتجاه : أ ، ب ، حـ تتناسب مع جيوب تمام الاتجاه ل ، م ، ن لذا فإنه يمكن كتابة الصورة الاحداثية لمعادلة الخط

المستقيم على الصورة : $\frac{\text{س} - \text{س}_1}{\text{ل}} = \frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - \text{ع}_1}{\text{ن}}$

(٥) معادلة محور س هى : ص = ٠ ، ع = ٠ ،

معادلة محور ص هى : س = ٠ ، ع = ٠ ،

معادلة محور ع هى : س = ٠ ، ص = ٠ .

(٦) معادلة أى مستقيم يوازى محور س و يمر بالنقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$

هى : $\text{ص} = \text{ص}_1$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1$ ،

معادلة أى مستقيم يوازى محور ص و يمر بالنقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$

هى : $\text{س} = \text{س}_1$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1$ ،

معادلة أى مستقيم يوازى محور ع و يمر بالنقطة $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1 ، \text{ع}_1)$

هى : $\text{س} = \text{س}_1$ ، $\text{ص} = \text{ص}_1$

(٧) الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و متجه الاتجاه له (أ ، ب ، حـ) هى :

المتجهة : $\vec{\text{ر}}$ = ك (أ ، ب ، حـ)

البارامترية : س = ك أ ، ص = ك ب ، ع = ك حـ

الاحداثية : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{حـ}}$

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٥٢

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، −٢ ، ٥) و المتجه (١ ، −٢ ، ٢) متجه اتجاه له ، ثم أوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم

الحل

المعادلة المتجهة هى : $\vec{\text{ر}}$ = (٤ ، −٢ ، ٥) + ك (١ ، −٢ ، ٢)

، بوضع : ك = ١ فإن : $\vec{\text{ر}}$ = (٤ ، −٢ ، ٥) + (١ ، −٢ ، ٢) = (٥ ، −٤ ، ٧)

∴ النقطة (٥ ، −٤ ، ٧) تقع على المستقيم

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٥٢

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل ، و المتجه (−٢ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه له

الحل

∵ المعادلة المتجهة هى : $\vec{\text{ر}}$ = ك (−٢ ، ٣ ، ١)

∴ المعادلات البارامترية هى : س = −٢ ك ، ص = ٣ ك ، ع = ك

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٥٣

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٠) ، (−١ ، ٣ ، ٤)

الحل

∵ $\vec{\text{هـ}}$ = (−١ ، ٣ ، ٤) − (٣ ، ٢ ، ٠) = (−٤ ، ١ ، ٤)

، المستقيم يمر بالنقطة (−١ ، ٣ ، ٤)

∴ المعادلة المتجهة هى : $\vec{\text{ر}}$ = (−١ ، ٣ ، ٤) + ك (−٤ ، ١ ، ٤)

، المعادلات البارامترية هى : س = −١ − ٤ ك ، ص = ٣ + ك

، ع = ٤ + ٤ ك

، الصورة الاحداثية هى : $\frac{\text{س} + ١}{-٤} = \frac{\text{ص} - ٣}{١} = \frac{\text{ع} - ٤}{٤}$

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٥٤

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم : $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٢} = \frac{٤ - \text{ع}}{٤}$ ثم أوجد نقطة تقع على هذا المستقيم

الحل

بفرض أن : $\frac{س + ٤}{٣} = \frac{٢ ص + ٥}{٢} = \frac{٤ - ع}{٤} = ل$

∴ س + ٤ = ٣ ل ، ٢ ص + ٥ = ٢ ل ، ٤ − ع = ٤ ل

و منها الصور البارمترية للمستقيم هى :

س = − ٤ + ٣ ل ، ص = $- \frac{٥}{٢}$ + ل ، ع = ٤ − ٤ ل

و منها ينتج : (س ، ص ، ع) = (− ٤ ، $- \frac{٥}{٢}$ ، ٤) + ل (٣ ، ١ ، − ٤)

أى أن الصورة المتجهة للمستقيم هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (− ٤ ، $- \frac{٥}{٢}$ ، ٤) + ل (٣ ، ١ ، − ٤)

و بوضع : س = ٢ ، ∵ س = − ٤ + ٣ ل ∴ ل = ٢

، ∵ ص = $- \frac{٥}{٢}$ + ل ∴ ص = $- \frac{١}{٢}$ ، ∵ ع = ٤ − ٤ ل

∴ ع = − ٤ ∴ النقطة (٤ ، $- \frac{١}{٢}$ ، − ٤) تقع على المستقيم

الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ :

إذا كان : $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمين فى الفراغ متجهى اتجاهيهما $\overrightarrow{هـ_1}$ = ($أ_1$ ، $ب_1$ ، $حـ_1$) ،

$\overrightarrow{هـ_2}$ = ($أ_2$ ، $ب_2$ ، $حـ_2$) فإن : قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ تعطى بالعلاقة :

$$حتا\ \theta = \frac{| \overrightarrow{هـ_1} \bullet \overrightarrow{هـ_2} |}{\| \overrightarrow{هـ_1} \| \, \| \overrightarrow{هـ_2} \|}$$

حيث : θ قياس الزاوية بين المستقيمين

و إذا كان : ($ل_1$ ، $م_1$ ، $ن_1$) ، ($ل_2$ ، $م_2$ ، $ن_2$) هى جيوب تمام الاتجاه للمستقيمين فإن : حتا θ = | $ل_1 ل_2$ + $م_1 م_2$ + $ن_1 ن_2$ |

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٥٤

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

$ل_1$: س = ٢ − ٥ ل ، ص = ١ − ل ، ع = ٣ + ٤ ل

$ل_2$: $\frac{س + ١}{٣} = \frac{٢ - ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$

الحل

∵ $ل_1$: س = ٢ − ٥ ل ، ص = ١ − ل ، ع = ٣ + ٤ ل

∴ $\overrightarrow{هـ_1}$ = (− ٥ ، − ١ ، ٤)

، ∵ $\frac{س + ١}{٣} = \frac{ص - ٢}{- ٤} = \frac{ع}{٢}$ ∴ $\overrightarrow{هـ_2}$ = (٣ ، − ٤ ، ٢)

$$∴ حتا\ \theta = \frac{| \overrightarrow{هـ_1} \bullet \overrightarrow{هـ_2} |}{\| \overrightarrow{هـ_1} \| \, \| \overrightarrow{هـ_2} \|} = \frac{| - ١٥ + ٤ + ٨ |}{\sqrt{٢٥ + ١ + ١٦} \sqrt{٩ + ١٦ + ٨}} = \frac{٣}{\sqrt{٤٢} \sqrt{٢٩}}$$

∴ θ = ٨٥° ٤′

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ١٥٥

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام اتجاههما هى :

($\frac{٢}{٣}$ ، $- \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠)

الحل

∵ ($ل_1$ ، $م_1$ ، $ن_1$) = ($\frac{٢}{٣}$ ، $- \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$) ، ($ل_2$ ، $م_2$ ، $ن_2$) = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ٠)

، ∵ حتا θ = | $ل_1 ل_2$ + $م_1 م_2$ + $ن_1 ن_2$ | = | $\frac{٢}{٣\sqrt{٢}} - \frac{٢}{٣\sqrt{٢}}$ + ٠ |

= صفر ، ∴ θ = ٩٠°

المستقيمان المتوازيان و المستقيمان المتعامدان فى الفراغ :

إذا كان : $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ = (أ$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$) ، $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ = (أ$_2$ ، ب$_2$ ، حـ$_2$)

هما متجها اتجاهى المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$

(١) فإن : ل$_1$ // ل$_2$ إذا كان : $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ // $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$

و هذا الشرط يمكن تحققه بعدة صور مختلفة

١) $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ = ك $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$　　٢) $\frac{\text{أ}_1}{\text{أ}_2} = \frac{\text{ب}_1}{\text{ب}_2} = \frac{\text{حـ}_1}{\text{حـ}_2}$　　٣) $\overrightarrow{\text{هـ}}_1 \times \overrightarrow{\text{هـ}}_2 = \overrightarrow{\text{و}}$

(٢) فإن : ل$_1$ ⊥ ل$_2$ إذا و فقط إذا كان : $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ • $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ = صفر

أى : أ$_1$ أ$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + حـ$_1$ حـ$_2$ = صفر

ملاحظات :

(١) إذا كان : المستقيمان متوازيين و كانت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإن : المستقيمين منطبقان

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ لا يوازى $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ (لا تتحقق إحدى صور التوازى)
فإن : المستقيمين ل$_1$ ، ل$_2$ إما أن يكونا متقطعان أو متخالفان

(٣) المستقيمان المتوازيان يجمعهما مستوى واحد

(٤) المستقيمان المتقاطعان يجمعهما مستوى واحد

(٥) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد

(٦) فى المستقيمين غير المتوازيين :

$\overrightarrow{\text{ر}}_1$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) + ك$_1$ (أ$_1$ ، ب$_1$ ، حـ$_1$)

$\overrightarrow{\text{ر}}_2$ = (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) + ك$_2$ (أ$_2$ ، ب$_2$ ، حـ$_2$)

١) لاثبات أن المستقيمين متقاطعان نبحث عن قيمة لـ ك$_1$ ، قيمة لـ ك$_2$ تجعلان : $\overrightarrow{\text{ر}}_1 = \overrightarrow{\text{ر}}_2$

٢) لاثبات أن المستقيمين متخالفان نثبت لا توجد قيمة لـ ك$_1$ ، ك$_2$ تجعل $\overrightarrow{\text{ر}}_1 = \overrightarrow{\text{ر}}_2$

(٧) المستقيمان المتعامدان يكونان :

١) متقاطعين على التعامد و بالتالى يجمعهما مستوى واحد

٢) متخالفان و بالتالى لا يجمعهما مستوى واحد

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ١٥٦

أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{\text{ر}}_1$ = (٣ ، –٣ ، ٥) + ك$_1$ (٠ ، –٥ ، ٥)
$\overrightarrow{\text{ر}}_2$ = (–٢ ، ٣ ، ١) + ك$_2$ (٥ ، –١ ، –١) متعامدان و متقاطعان فى نقطة واحدة ، و أوجد احداثيات نقطة تقاطعهما

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ = (٠ ، –٥ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ = (٥ ، –١ ، –١)

∴ $\overrightarrow{\text{هـ}}_1$ • $\overrightarrow{\text{هـ}}_2$ = (٠ ، –٥ ، ٥) • (٥ ، –١ ، –١) = صفر

∴ المستقيمان متعامدان ، و بوضع : $\overrightarrow{\text{ر}}_1 = \overrightarrow{\text{ر}}_2$ نجد :

(٣ ، –٣ ، ٥) + ك$_1$ (٠ ، –٥ ، ٥) = (–٢ ، ٣ ، ١) + ك$_2$ (٥ ، –١ ، –١)

∴ ٣ = –٢ + ٥ ك$_2$ و منها : ك$_2$ = ١　　(١)

، –٣ – ٥ ك$_1$ = ٣ – ك$_2$ و منها : ٥ ك$_1$ – ك$_2$ = – ٦　　(٢)

، ٥ + ٥ ك$_1$ = ١ – ك$_2$ و منها : ٥ ك$_1$ + ك$_2$ = – ٤　　(٣)

بجمع (٢) ، (٣) ينتج : ك$_1$ = – ١ ، بالتعويض فى (٢) ينتج : ك$_2$ = ١

، بالتعويض فى (١) نجد أن هذه القيم تحقق المعادلة (١)

∴ المستقيمان متقاطعان و متعامدان " متقاطعان على التعامد "

، (س ، ص ، ع) = (٣ ، –٣ ، ٥) – ١ × (٠ ، –٥ ، ٥) = (٣ ، ٢ ، ٠)

∴ احداثيات نقطة التقاطع هى : (٣ ، ٢ ، ٠)

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ١٥٧

أثبت أن المستقيمين : ر١ = (٣ ، −١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣)
ر٢ = (٠ ، ٤ ، −١) + ك٢ (١ ، −١ ، ٢) متخالفان

الحل

بوضع : ر١ = ر٢ نجد :
(٣ ، −١ ، ٢) + ك١ (٤ ، ١ ، ٣) = (٠ ، ٤ ، −١) + ك٢ (١ ، −١ ، ٢)
∴ ٣ + ٤ك١ = ك٢ و منها : ٤ك١ − ك٢ = −٣ (١)
، −١ + ك١ = ٤ − ك٢ و منها : ك١ + ك٢ = ٥ (٢)
، ٢ + ٣ك١ = −١ + ٢ك٢ و منها : ٣ك١ − ٢ك٢ = −٣ (٣)
بضرب (٢) × ٢ و جمعها مع (٣) ينتج : ك١ = ٧/٥
، بالتعويض فى (٣) ينتج : ك٢ = ١٨/٥
، بالتعويض فى (١) نجد أن : ٤ × ٧/٥ − ١٨/٥ = −٢ ≠ −٣
أى أن هذه القيم لا تحقق المعادلة (١) ∴ المستقيمان متخالفان

إجابة حاول أن تحل (١٠) صفحة ١٥٧

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و يقطع المستقيم
ر = (٣ ، ١ ، ٤) + ك (٢ ، ١ ، ٣) على التعامد

الحل

نفرض أن : المستقيمين يتقاطعان فى نقطة حـ
∴ حـ ∈ ل١ " المستقيم المعطى " و منه :
∴ حـ = (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)
، ∵ ل٢ " المستقيم المطلوب " يمر بالنقطة و (٠ ، ٠ ، ٠)
∴ متجه اتجاه ل٢ هو : هـ٢ = وحـ = حـ − و
∴ هـ٢ = (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)
− (٠ ، ٠ ، ٠)
= (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك)
، ∵ هـ١ متجه اتجاه المستقيم المعطى ل١ = (٣ ، ١ ، ٤)
، المستقيمان متعامدان ∴ هـ١ • هـ٢ = ٠
∴ (٢ ، ١ ، ٣) • (٣ + ٢ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ك) = ٠
∴ ٦ + ٤ك + ١ + ك + ١٢ + ٩ك = ٠ ∴ ١٤ك = ١٩ ∴ ك = −١٩/١٤
∴ هـ٢ = (٣ + ٢ × (−١٩/١٤) ، ١ − ١٩/١٤ ، ٤ + ٣ × (−١٩/١٤))
= (٢/٧ ، −٥/١٤ ، −١/١٤) = (٤ ، −٥ ، −١)
∴ معادلة المستقيم المطلوب ل٢ هى : ر٢ = ك٢ (٤ ، −٥ ، −١)

إجابة حاول أن تحل (١١) صفحة ١٥٨

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، ١ ، −٤) على المستقيم
ر = (١ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، ٣ ، −٢)

الحل

متجه اتجاه المستقيم هـ = (٢ ، ٣ ، −٢) ،
بفرض أن : أ (١ ، −١ ، ٢) ، ب (٢ ، ١ ، −٤)
∴ أب = (٢ ، ١ ، −٤) − (١ ، −١ ، ٢) = (١ ، ٢ ، −٦)
، ∵ أحـ مسقط أب على المستقيم ل
= |أب • هـ| / ||هـ|| ∴ أحـ = |٢ + ٦ + ١٢| / √(٤ + ٩ + ٤) = ٢٠ / √١٧
، ∵ ||أب|| = √(١ + ٤ + ٣٦) = √٤١
∴ من △ أبحـ نجد : $(بحـ)^2 = (أب)^2 - (أحـ)^2$

$\therefore$ (ب حـ)^2 = ٤١ − $\frac{٢٠}{١٧}$ = $\frac{٢٩٧}{١٧}$ = ١٧,٤٧

$\therefore$ أ حـ " طول العمود " = ٤,١٨ وحدة طول

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٥٨

هل يمكنك اثبات الصيغة التالية التى تعين بعد النقطة ب عن المستقيم

$\overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{أ}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، البعد العمودى = $\frac{|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$

الحل

من △ أ ب حـ فى الشكل المقابل نجد :

طول العمود ب حـ = أ ب حا θ (١)

، $\because \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\| = \|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|$ حا θ

$\therefore \frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|} = \|\overrightarrow{\text{أب}}\|$ حا θ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج : البعد العمودى = $\frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|}$

حل آخر لحاول أن تحل (١١) صفحة ١٥٨

بفرض أن : أ (١ ، −١ ، ٢) ، ب (٢ ، ١ ، −٤)

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ١ ، −٤) − (١ ، −١ ، ٢) = (١ ، ٢ ، −٦)

، $\because \overrightarrow{\text{هـ}}$ = (٢ ، ٣ ، −٢)

$$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & -٦ \\ ٢ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = ١٤\,\overrightarrow{\text{س}} - ٦\,\overrightarrow{\text{ص}} - \overrightarrow{\text{ع}}$$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\| = \sqrt{١٩٦ + ٣٦ + ١} = \sqrt{٢٩٧}$

$\therefore$ طول العمود = $\frac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|} = \frac{\sqrt{٢٩٧}}{\sqrt{١٧}}$ = ٤,١٨ وحدة طول

حل تمارين (٢ − ١) صفحة ١٥٨ بالكتاب المدرسى

أكمل :

(١) المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١ ، ٣) و المتجه (−١ ، ٤ ، ٢) متجه اتجاه له هى ....

الحل

المعادلة المتجهة هى : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (−١ ، ٤ ، ٢)

(٢) قياس الزاوية بين المستقيمين : ٢ س = ٣ ص = − ع ، ٦ س = − ص = − ٤ ع يساوى ....

الحل

$\because$ ٢ س = ٣ ص = − ع بالقسمة ÷ ٦ ينتج :

$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{\text{ع}}{-٦}$ $\therefore \overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (٣ ، ٢ ، −٦)

، $\because$ ٢ س = − ص = − ٤ ع بالقسمة ÷ ١٢ ينتج :

$\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص}}{-١٢} = \frac{\text{ع}}{-٣}$ $\therefore \overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = (٢ ، −١٢ ، −٣)

$\therefore$ حتا θ = $\frac{|\overrightarrow{\text{هـ}_1} \bullet \overrightarrow{\text{هـ}_2}|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}_1}\|\,\|\overrightarrow{\text{هـ}_2}\|} = \frac{|٦ - ٢٤ + ١٨|}{\sqrt{٩ + ٤ + ٣٦}\,\sqrt{٤ + ١٤٤ + ٩}}$

= $\frac{\text{صفر}}{\sqrt{٤٩}\,\sqrt{١٥٧}}$ $\therefore$ θ = ٩٠°

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين نسب اتجاههما هى :

(١ ، ١ ، ٢) ، ($\sqrt{٣}$ − ١ ، − $\sqrt{٣}$ − ١ ، ٤) يساوى ....

الحل

$\because$ نسب اتجاه المستقيمين هما : (١ ، ١ ، ٢) ، ($\sqrt{٣}$ − ١ ، − $\sqrt{٣}$ − ١ ، ٤)

$\therefore \overrightarrow{\text{هـ}_1}$ = (١ ، ١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{هـ}_2}$ = ($\sqrt{٣}$ − ١ ، − $\sqrt{٣}$ − ١ ، ٤)

$\therefore$ حتا $\theta = \frac{|\overleftarrow{هـ_١} \bullet \overleftarrow{هـ_٢}|}{||\overleftarrow{هـ_١}||\ ||\overleftarrow{هـ_٢}||} = \frac{|\sqrt{٣} - ١ - \sqrt{٣} + ١ + ٨|}{\sqrt{٦}\ \sqrt{٢٤}}$

$= \frac{٦}{\sqrt{٦}\ \sqrt{٢٤}} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \theta = ٦٠^\circ$

(٤) إذا كانت : $\theta_ع$ هى الزاوية التى يصنعها المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١ ، ١) و نقطة الأصل و الاتجاه الموجب لمحور ع فإن : حتا $\theta_ع$ = ...

الحل

$\because \overleftarrow{هـ_١}$ = (٠ ، ٠ ، ٠) − (٣ ، −١ ، ١) = (٣ ، −١ ، ١) ، $\overleftarrow{هـ_٢}$ = (٠ ، ٠ ، ١)

$\therefore$ حتا $\theta_ع = \frac{|\overleftarrow{هـ_١} \bullet \overleftarrow{هـ_٢}|}{||\overleftarrow{هـ_١}||\ ||\overleftarrow{هـ_٢}||} = \frac{١}{\sqrt{١١}\ \sqrt{١}} = \frac{١}{\sqrt{١١}}$

(٥) متجه اتجاه المستقيم المار بالنقطتين : (٧ ، −٥ ، ٤) ، (٥ ، −٣ ، ٣) هو ....

الحل

متجه اتجاه المستقيم = (٧ ، −٥ ، ٤) − (٥ ، −٣ ، ٣) = (٢ ، −٢ ، ١)

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٦) أوجد جيوب تمام الاتجاه للمستقيم الذى نسب اتجاهه

(أ) −١ ، ٢ ، ٣ (ب) ١ ، ١ ، ١

الحل

(أ) بفرض أن : أ (−١ ، ٢ ، ٣)

$\therefore$ جيوب تمام $\overleftarrow{أ} = \frac{\overleftarrow{أ}}{||\overleftarrow{أ}||} = \frac{(-١ ، ٢ ، ٣)}{\sqrt{١ + ٤ + ٩}} = \left(\frac{-١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}}\right)$

(ب) بفرض أن : أ (١ ، ١ ، ١)

$\therefore$ جيوب تمام $\overleftarrow{أ} = \frac{\overleftarrow{أ}}{||\overleftarrow{أ}||} = \frac{(١ ، ١ ، ١)}{\sqrt{١ + ١ + ١}} = \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

(٧) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

(أ) المار بالنقطة (٤ ، −٢ ، ٥) ، و المتجه $\overleftarrow{هـ}$ = (٢ ، ١ ، −١) متجه اتجاه له

(ب) المار بالنقطة (٣ ، −١ ، ٥) ، و يوازى $\overleftarrow{أب}$ حيث : $\overleftarrow{أب}$ = (٤ ، −٢ ، ٢)

(حـ) المار بالنقطتين : (٣ ، −٢ ، ٠) ، (٠ ، ٤ ، ١)

(ء) المار بالنقطة (٣ ، ٢ ، ٥) ، و يصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور اللاحداثيات زوايا متساوية

الحل

(أ) الصورة المتجهة للمستقيم هى : $\overleftarrow{ر}$ = (٤ ، −٢ ، ٥) + ك (٢ ، ١ ، −١)

، الصور البارامترية هى : س = ٤ + ٢ك ، ص = −٢ + ك

، ع = ٥ − ك

، الصورة الاحداثية هى : $\frac{س - ٤}{٢} = \frac{ص + ٢}{١} = \frac{ع - ٥}{-١}$

(ب) $\because$ المستقيم // $\overleftarrow{أب}$ $\therefore \overleftarrow{أب}$ = (٤ ، −٢ ، ٢) هو متجه اتجاه المستقيم

$\therefore$ الصورة المتجهة للمستقيم هى : $\overleftarrow{ر}$ = (٣ ، −١ ، ٥) + ك (٤ ، −٢ ، ٢)

، الصور البارامترية هى : س = ٣ + ٤ك ، ص = −١ − ٢ك

، ع = ٥ + ٢ك

، الصورة الاحداثية هى : $\frac{س - ٣}{٤} = \frac{ص + ١}{-٢} = \frac{ع - ٥}{٢}$

(حـ) ∵ هـ⃗ = (٣ ، −٢ ، ٠) − (٠ ، ٤ ، ١) = (٣ ، −٦ ، −١)

∴ الصورة المتجهة للمستقيم هى : ر⃗ = (٣ ، −٢ ، ٠) + ك (٣ ، −٦ ، −١)

، الصور البارامترية هى : س = ٣ + ٣ ك ، ص = − ٢ − ٦ ك

، ع = − ك

، الصورة الاحداثية هى : (س − ٣) / ٣ = (ص + ٢) / −٦ = ع / −١

(ء) ∵ المستقيم يصنع مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الاحداثيات زوايا متساوية

∴ حتا² θ س + حتا² θ ص + حتا² θ ع = ١

∴ حتا θ س = حتا θ ص = حتا θ ع = ١ / √٣

∴ هـ⃗ = (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣) = (١ ، ١ ، ١)

∴ الصورة المتجهة للمستقيم هى : ر⃗ = (٣ ، ٢ ، ٥) + ك (١ ، ١ ، ١)

، الصور البارامترية هى : س = ٣ + ك ، ص = ٢ + ك

، ع = ٥ + ك ، الصورة الاحداثية هى : س − ٣ = ص − ٢ = ع − ٥

(٨) أوجد الصورة المتجهة للمستقيم

س − ٣ = (ص + ٢) / ٤ = (٢ − ع) / ٣

الحل

بفرض أن : (ص + ٢) / ٤ = (٢ − ع) / ٣ = ك

∴ س = ٣ ، ص + ٢ = ٤ ك ، ٢ − ع = ٣ ك

هى المعادلات البارمترية للمستقيم و منها :

س = ٣ ، ص = − ٢ + ٤ ك ، ع = ٢ − ٣ ك

∴ الصورة المتجهة للمستقيم هى :

ر⃗ = (٣ ، −٢ ، ٢) + ك (٠ ، ٤ ، −٣)

(٩) إذا كان : و⃗أ = س⃗ − ٢ ص⃗ + ع⃗ ،

و⃗ب = − س⃗ − ٣ ع⃗

و⃗حـ = ٣ س⃗ + ص⃗ − ٢ ع⃗

و⃗ء = ٨ س⃗ + ص⃗ + ٤ ع⃗

أوجد المعادلة المتجهة لكل من المستقيمات :

(أ) المار بالنقطتين أ ، ب (ب) المار بالنقطة ء موازياً ب حـ↔

(حـ) المار بالنقطة حـ يقطع أ ب↔ على التعامد

الحل

أ = (١ ، −٢ ، ١) ، ب = (−١ ، ٠ ، −٣) ، حـ = (٣ ، ١ ، −٢)

، ء = (٨ ، ١ ، ٤)

(أ) ∵ أ ب⃗ = (−١ ، ٠ ، −٣) − (١ ، −٢ ، ١) = (−٢ ، ٢ ، −٤)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم هى : ر⃗ = (١ ، −٢ ، ١) + ك (−٢ ، ٢ ، −٤)

(ب) ∵ ب حـ⃗ = (٣ ، ١ ، −٢) − (−١ ، ٠ ، −٣) = (٤ ، ١ ، ١)

، المستقيم // ب حـ↔ ∴ المعادلة ب حـ⃗ هو متجه اتجاه المستقيم

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم هى : ر⃗ = (٨ ، ١ ، ٤) + ك (٤ ، ١ ، ١)

(حـ) نفرض أن : المستقيمين يتقاطعان فى نقطة ء ∴ ء ∈ أ ب↔

، ∵ معادلة أ ب↔ هى ر⃗ = (١ ، −٢ ، ١)

+ ك (−٢ ، ٢ ، −٤)

∴ ء = (١ − ٢ ك ، −٢ + ٢ ك ، ١ − ٤ ك)

∴ حـ ء⃗ = ء⃗ − حـ⃗

= (١ − ٢ ك ، −٢ + ٢ ك ، ١ − ٤ ك)

− (٣ ، ١ ، −٢)

= (−٢ − ٢ ك ، −٣ + ٢ ك ، ٣ − ٤ ك)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ أ ب⃗ ⊥ حـ ء⃗

∴ (−٢ ، ٢ ، −٤) • (−٢ − ٢ك ، −٣ + ٢ك ، ٣ − ٤ك) = ٠

∴ ٤ + ٤ك − ٦ + ٤ك − ١٢ + ١٦ك = ٠ ∴ ٢٤ك = ١٤

∴ ك = ٧/١٢ ∴ حـء→ = (−٢ − ٢ × ٧/١٢ ، −٣ + ٢ × ٧/١٢ ، ٣ − ٤ × ٧/١٢)

= (−١٩/٦ ، −١١/٦ ، ٢/٣) = (−١٩ ، −١١ ، ٤)

∴ معادلة المستقيم المطلوب ل٢ هى :

ر→ = (٣ ، ١ ، −٢) + ك (−١٩ ، −١١ ، ٤)

(١٠) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين :

(أ) ل١ يمر بالنقطتين (−٣ ، ٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥ ، −٢)

ل٢ يمر بالنقطتين (١ ، −٢ ، ٢) ، (٤ ، ٢ ، ٣)

(ب) ل١ : ر→١ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك١ (−١ ، ٤ ، ٢)

ل٢ : ر→٢ = (٠ ، ٢ ، −١) + ك٢ (١ ، ١ ، ٣)

(حـ) ل١ : ٢س = ٣ص = ٤ع

ل٢ : (س − ١)/٣ = (ص + ٢)/−٢ = ع/−٥

الحل

(أ) ∵ هـ→١ = (−٣ ، ٢ ، ٤) − (٢ ، ٥ ، −٢) = (−٥ ، −٣ ، ٦)

، هـ→٢ = (١ ، −٢ ، ٢) − (٤ ، ٢ ، ٣) = (−٣ ، −٤ ، −١)

∴ حتا θ = | هـ→١ • هـ→٢ | / (||هـ→١|| ||هـ→٢||) = | ١٥ + ١٢ − ٦ | / (√(٢٥ + ٩ + ٣٦) √(٩ + ١٦ + ١)) = ٢١ / (√٧٠ √٢٦)

∴ θ = ٦٠° ٣١′

(ب) ∵ هـ→١ = (−١ ، ٤ ، ٢) ، هـ→٢ = (١ ، ١ ، ٣)

∴ حتا θ = | −١ + ٤ + ٦ | / (√(١ + ١٦ + ٤) √(١ + ١ + ٩)) = ٩ / (√٢١ √١١)

∴ θ = ٣٥° ٤١′

(حـ) ∵ ٢س = ٣ص = ٤ع بالقسمة ÷ ١٢ ينتج :

س/٦ = ص/٤ = ع/٣ ∴ هـ→١ = (٦ ، ٤ ، ٣)

، هـ→٢ = (٣ ، −٢ ، −٥)

∴ حتا θ = | ١٨ − ٨ − ١٥ | / (√(٣٦ + ١٦ + ٩) √(٩ + ٤ + ٢٥)) = ٥ / (√٦١ √٣٨)

∴ θ = ٨٤° ٢′

(١١) أذكر الشرط (الشروط) اللازم لكى يكون المستقيمان :

ل١ : س = س١ + أ١ك١ ، ص = ص١ + ب١ك١

، ع = ع١ + حـ١ك١

ل٢ : س = س٢ + أ٢ك٢ ، ص = ص٢ + ب٢ك٢

، ع = ع٢ + حـ٢ك٢

(أ) متوازيان (ب) متعامدان (حـ) متقاطعان في نقطة

الحل

(أ) الشرط اللازم لكى المستقيمان ل١ ، ل٢ متوازيان هو :

أ١/أ٢ = ب١/ب٢ = حـ١/حـ٢ أو : (أ١ ، ب١ ، حـ١) = ك (أ٢ ، ب٢ ، حـ٢)

(ب) الشرط اللازم لكى المستقيمان ل١ ، ل٢ متعامدان هو :

أ١أ٢ + ب١ب٢ + حـ١حـ٢ = صفر

(حـ) الشرط اللازم لكى المستقيمان ل١ ، ل٢ متقاطعان فى نقطة هو :

قيمة لكل من ك١ ، ك٢ تحقق كلاً المعادلات الآتية :

$س_1 + أ_1 ك_1 = س_2 + أ_2 ك_2$ ، $ص_1 + ب_1 ك_1 = ص_2 + ب_2 ك_2$

$ع_1 + حـ_1 ك_1 = ع_2 + حـ_2 ك_2$

(١٢) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة أ (١ ، −١ ، ٠) ، و يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (−٣ ، ٢ ، ١) ، حـ (٢ ، ١ ، ٠) ثم بين أن النقطة ء (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على هذا المستقيم

الحل

$\overrightarrow{ب حـ}$ = (٢ ، ١ ، ٠) − (−٣ ، ٢ ، ١) = (٥ ، −١ ، −١)

، ∵ المستقيمان متوازيان ∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٥ ، −١ ، −١)

، معادلته المتجهة هى : $\vec{ر}$ = (١ ، −١ ، ٠) + ك (٥ ، −١ ، −١)

∴ (س ، ص ، ع) = (١ ، −١ ، ٠) + ك (٥ ، −١ ، −١)

، ∵ س = ١ + ٥ ك ، و عندما : س = −١٤ فإن : ك = −٣

، ص = −١ − ك ، و عندما : ص = ٢ فإن : ك = −٣

، ع = − ك ، و عندما : ع = ٣ فإن : ك = −٣

∴ النقطة ء (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على هذا المستقيم

(١٣) أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين :

$ل_1$: $\vec{ر}_1$ = (٣ ، −١ ، ن) + $ك_1$ (٤ ، ١ ، ٣)

$ل_2$: س = $\frac{ص - ٤}{-١}$ = $\frac{ع + ١}{٢}$

متقاطعين فى نقطة و أوجد نقطة تقاطعهما

الحل

∵ $\vec{ر}_1$ = (٣ ، −١ ، ن) + $ك_1$ (٤ ، ١ ، ٣) ،

$\vec{ر}_2$ = (٠ ، ٤ ، −١) + $ك_2$ (١ ، −١ ، ٢) متقاطعان فى نقطة ∴ $\vec{ر}_1 = \vec{ر}_2$

∴ (٣ ، −١ ، ن) + $ك_1$ (٤ ، ١ ، ٣) = (٠ ، ٤ ، −١) + $ك_2$ (١ ، −١ ، ٢)

∴ ٣ + ٤ $ك_1$ = $ك_2$ ، −١ + $ك_1$ = ٤ − $ك_2$ بالجمع ينتج :

٢ + ٥ $ك_1$ = ٤ و منها : $ك_1$ = $\frac{٢}{٥}$ ، و بالتعويض ينتج : $ك_2$ = $\frac{٢٣}{٥}$

، ∵ ن + ٣ $ك_1$ = −١ + ٢ $ك_2$ ∴ ن + ٣ × $\frac{٢}{٥}$ = −١ + ٢ × $\frac{٢٣}{٥}$

و منها : ن = ٧ ، نقطة التقاطع هى :

(س ، ص ، ع) = (٠ ، ٤ ، −١) + $\frac{٢٣}{٥}$ (١ ، −١ ، ٢) = ($\frac{٢٣}{٥}$ ، −$\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤١}{٥}$)

(١٤) أكتشف الخطأ :

(أ) مجموع مربعات نسب الاتجاه لأى مستقيم يساوى ١

(ب) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين : ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) هى :

($س_2 - س_1$ ، $ص_2 - ص_1$ ، $ع_2 - ع_1$)

(حـ) إذا كان : ($أ_1$ ، $ب_1$ ، $حـ_1$) ، ($أ_2$ ، $ب_2$ ، $حـ_2$) هى نسب الاتجاه للمستقيمين : $ل_1$ ، $ل_2$ فإن : قياس الزاوية بينهما تعطى بالعلاقة

حتا θ = | $أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + حـ_1 حـ_2$ |

الحل

(أ) مجموع مربعات جيوب تمام الاتجاه لأى مستقيم = ١

(ب) جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين : ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) هى :

$$\frac{(س_2 - س_1 ، ص_2 - ص_1 ، ع_2 - ع_1)}{\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2 + (ع_2 - ع_1)^2}}$$

(حـ) حتا θ = $\frac{| أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + حـ_1 حـ_2 |}{\sqrt{أ_1^2 + ب_1^2 + حـ_1^2}\ \sqrt{أ_2^2 + ب_2^2 + حـ_2^2}}$

٢ – ٢ معادلة المستوى فى الفراغ

الصور المختلفة لمعادلة المستوى فى الفراغ :

إذا كانت : النقطة أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) تقع على المستوى س ، متجه موضعها $\overrightarrow{أ}$

و كان : $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى ، و كانت ب (س ، ص ، ع) أى نقطة على المستوى س متجه موضعها $\overrightarrow{ر}$ فإن :

$\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أب}$ = صفر

∴ $\overrightarrow{ن} \bullet (\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}) = ٠$ ، ∵ $\overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ر}$

∴ $\overrightarrow{ن} \bullet (\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{أ}) = ٠$ (١)

و منها : $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أ}$

و هى **الصورة المتجهة لمعادلة المستوى**

من (١) : ∵ $\overrightarrow{ن}$ = (أ ، ب ، حـ) ، $\overrightarrow{ر}$ = (س ، ص ، ع) ، $\overrightarrow{أ}$ = (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$)

∴ (أ ، ب ، حـ) • (س – س$_1$ ، ص – ص$_1$ ، ع – ع$_1$) = ٠

∴ أ (س – س$_1$) + ب (ص – ص$_1$) + حـ (ع – ع$_1$) = ٠

و هى **الصورة القياسية لمعادلة المستوى**

و بفك الأقواس

∴ أ س + ب ص + حـ ع + (– أ س$_1$ – ب ص$_1$ – حـ ع$_1$) = ٠

و بفرض أن : (– أ س$_1$ – ب ص$_1$ – حـ ع$_1$) = ء فإن :

∴ أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

و هى **الصورة القياسية لمعادلة المستوى**

ملاحظات :

(١) لتعين معادلة المستوى يتعين معرفة متجه عمودى على المستوى و نقطة واقعة عليه

(٢) مركبات متجه الاتجاه العمودى للمستوى هى معاملات : س ، ص ، ع فى المعادلة العامة للمستوى

(٣) من المعادلة العامة للمستوى يكون : – (أ ، ب ، حـ) متجه اتجاه عمودى على المستوى

(٤) المتجه (أ ، ب ، حـ) هو متجه الاتجاه العمودى لأى مستويين متوازيين

(٥) $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أ}$ فى المعادلة المتجهة للمستوى يساوى – ء فى المعادلة العامة أى أن : (أ ، ب ، حـ) • (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) = – ء

(٦) لايجاد المعادلة المتجهة للمستوى المار بالنقط : أ (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$ ، ع$_2$) ، حـ (س$_3$ ، ص$_3$ ، ع$_3$)

نوجد : $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ثم نتأكد أن هذه النقط ليست على استقامة واحدة و ذلك باثبات أن : $\overrightarrow{أب} \neq \overrightarrow{أحـ}$ (غير متوازيين)

ثم نوجد $\overrightarrow{ن}$ حيث :

$$\overrightarrow{ن} = \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أحـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix}$$

(٥) المعادلة العامة للمستوى المار بالنقط : أ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$)
، ب ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) ، جـ ($س_3$ ، $ص_3$ ، $ع_3$) هي :

$$\begin{vmatrix} س - س_1 & ص - ص_1 & ع - ع_1 \\ س_2 - س_1 & ص_2 - ص_1 & ع_2 - ع_1 \\ س_3 - س_1 & ص_3 - ص_1 & ع_3 - ع_1 \end{vmatrix} = ٠$$

(٦) في المعادلة العامة للمستوى إذا كانت : ء = ٠ .
فإن : المستوى يحوي نقطة الأصل

(٧) إذا كانت : هـ ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) ، ز ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) ،
ح ($س_3$ ، $ص_3$ ، $ع_3$) و كان : أ $س_1$ + ب $ص_1$ + جـ $ع_1$ = ٠ .
فإن : هـ تنتمي للمستوى
أما إذا كان : أ $س_2$ + ب $ص_2$ + جـ $ع_2$ > ٠ ،
أ $س_3$ + ب $ص_3$ + جـ $ع_3$ < ٠ .
فإن : ز ، ح لا تنتميان للمستوى و تقعان في جهتين مختلفتين من المستوى

(٨) في المعادلة العامة للمستوى إذا كانت :
١) أ = ٠ . فإن المعادلة تكون : ب ص + جـ ع + ء = ٠ و هي
معادلة مستوى يوازي محور س و عمودي على المستوى (ص ع)
٢) ب = ٠ . فإن المعادلة تكون : أ س + جـ ع + ء = ٠ و هي
معادلة مستوى يوازي محور ص و عمودي على المستوى (س ع)
٣) جـ = ٠ . فإن المعادلة تكون : أ س + ب ص + ء = ٠ و هي
معادلة مستوى يوازي محور ع و عمودي على المستوى (س ص)

(٩) في المعادلة العامة للمستوى إذا كانت :
١) أ = ء = ٠ . فإن المعادلة تكون : ب ص + جـ ع = ٠ و هي
معادلة مستوى يحوي محور س و عمودي على المستوى (ص ع)
٢) ب = ء = ٠ . فإن المعادلة تكون : أ س + جـ ع = ٠ و هي
معادلة مستوى يحوي محور ص و عمودي على المستوى (س ع)
٣) جـ = ء = ٠ . فإن المعادلة تكون : أ س + ب ص = ٠ و هي
معادلة مستوى يحوي محور ع و عمودي على المستوى (س ص)

(١٠) حالات خاصة :
١) معادلة المستوى (س ص) هي : ع = ٠ .
٢) معادلة مستوى يوازي المستوى (س ص) هي : ع = ك
٣) معادلة المستوى (ص ع) هي : س = ٠ .
٤) معادلة مستوى يوازي المستوى (ص ع) هي : س = ل
٥) معادلة المستوى (س ع) هي : ص = ٠ .
٦) معادلة مستوى يوازي المستوى (س ع) هي : ص = م

(١١) خطوات ايجاد معادلة مستوى يحوي مستقيمين متقاطعين :
حيث : $\overrightarrow{ر_1}$ = ($س_1$ ، $ص_1$ ، $ع_1$) + $ك_1$ ($أ_1$ ، $ب_1$ ، $جـ_1$)
$\overrightarrow{ر_2}$ = ($س_2$ ، $ص_2$ ، $ع_2$) + $ك_2$ ($أ_2$ ، $ب_2$ ، $جـ_2$)
١) نبحث عن قيمة لـ $ك_1$ ، قيمة لـ $ك_2$ تجعلان : $\overrightarrow{ر_1}$ = $\overrightarrow{ر_2}$
٢) نوجد متجه الاتجاه العمودي على المستوى $\overrightarrow{ن}$ باستخدام حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهي المستقيمين
٣) نوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى

(١٢) لايجاد نقطة تقاطع مستقيم مع مستوى :
نحل معادلتى المستقيم و المستوى معاً لايجاد نقطة التقاطع

(١٣) عند حل معادلتى مستقيمين معاً إذا كانت :
١) مجموعة الحل = ∅ فإن : المستقيمين متوازيان أو متخالفان
٢) مجموعة الحل = نقطة وحيدة فإن : المستقيمين متقاطعان و يحويهما مستوى واحد
٣) مجموعة الحل أكثر من نقطة فإن : المستقيمين منطبقان

(١٤) عند حل معادلتى مستقيم و مستوى معاً إذا كانت :
١) مجموعة الحل = ∅ فإن : المستقيم يوازى المستوى
٢) مجموعة الحل = نقطة وحيدة فإن : المستقيم يقطع المستوى فى هذه النقطة
٣) مجموعة الحل أكثر من نقطة فإن : المستوى يحوى هذا المستقيم

(١٥) علاقات خاصة :
١) إذا احتوى مستوى مستقيم يمر بنقطة ما فإن هذه النقطة تنتمى للمستوى
٢) إذا كان مستوى عمودى على مستقيم فإن متجه اتجاه المستقيم هو متجه الاتجاه العمودى على المستوى
٣) المستوى الذى يحوى مستقيم و يوازى مستقيم آخر يكون متجه الاتجاه العمودى عليه مساوياً حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهى المستقيمين
٤) متجه الاتجاه العمودى على مستوى عمودى على مستويين معلومين يساوى حاصل الاتجاهى لمتجهى الاتجاه العمودى للمستويين

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٦١

أوجد الصورة المتجهة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، –٣ ، ١) ، و المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، –٢ ، ٣) عمودى على المستوى

الحل

∵ المعادلة المتجهة للمستوى هى : $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أ}$
حيث : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، –٣ ، ١) ∴ المعادلة المتجهة للمستوى هى :
(١ ، –٢ ، ٣) • $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، –٢ ، ٣) • (٢ ، –٣ ، ١)
(١ ، –٢ ، ٣) • $\overrightarrow{ر}$ = ١١

إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٦١

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (–٣ ، ٤ ، ٢) ، و المتجه $\overrightarrow{ن}$ = (١ ، –١ ، ٣) عمودى على المستوى

الحل

∵ المعادلة المتجهة للمستوى هى : $\overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ن} \bullet \overrightarrow{أ}$
حيث : $\overrightarrow{أ}$ = (–٣ ، ٤ ، ٢) ∴ المعادلة المتجهة للمستوى هى :
(١ ، –١ ، ٣) • $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، –١ ، ٣) • (–٣ ، ٤ ، ٢)
(١ ، –١ ، ٣) • $\overrightarrow{ر}$ = –١ ، المعادلة القياسية للمستوى هى :
١ (س + ٣) – ١ (ص – ٤) + ٣ (ع – ٢) = ٠
∴ س + ٣ – ص + ٤ + ٣ع – ٦ = ٠ و منها :
المعادلة العامة للمستوى هى : س – ص + ٣ع + ١ = ٠

إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٦٢

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط (١ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢ ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ٣)

الحل

بفرض أن : أ = (١ ، ٠ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٢ ، ٠) ، حـ = (٠ ، ٠ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٠ ، ٢ ، ٠) − (١ ، ٠ ، ٠) = (−١ ، ٢ ، ٠)

، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (٠ ، ٠ ، ٣) − (١ ، ٠ ، ٠) = (−١ ، ٠ ، ٣)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ≠ ك $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ أى أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ لا يوازى $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

∴ النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

$$\therefore \vec{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}} = \begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6 \text{ ، } 3 \text{ ، } 2)$$

، ∵ المعادلة المتجهة للمستوى هى : $\vec{\text{ن}} \bullet \vec{\text{ر}} = \vec{\text{ن}} \bullet \vec{\text{أ}}$

∴ (٦ ، ٣ ، ٢) • $\vec{\text{ر}}$ = (٦ ، ٣ ، ٢) • (١ ، ٠ ، ٠)

∴ المعادلة المتجهة للمستوى هى : (٦ ، ٣ ، ٢) • $\vec{\text{ر}}$ = ٦

، المعادلة القياسية للمستوى هى : ٦ (س − ١) + ٣ ص + ٢ ع = ٠

∴ ٦ س − ٦ + ٣ ص + ٢ ع = ٠ و منها :

المعادلة العامة للمستوى هى : ٦ س + ٣ ص + ٢ ع − ٦ = ٠

حل آخر لايجاد الصورة العامة للمستوى

بفرض أن : أ = (١ ، ٠ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٢ ، ٠) ، حـ = (٠ ، ٠ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٠ ، ٢ ، ٠) − (١ ، ٠ ، ٠) = (−١ ، ٢ ، ٠)

، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (٠ ، ٠ ، ٣) − (١ ، ٠ ، ٠) = (−١ ، ٠ ، ٣)

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ≠ ك $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ أى أن : $\overrightarrow{\text{أب}}$ لا يوازى $\overrightarrow{\text{أحـ}}$

، ∵ معادلة المستوى المار بثلاث نقط هى :

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_1 & \text{ص} - \text{ص}_1 & \text{ع} - \text{ع}_1 \\ \text{س}_2 - \text{س}_1 & \text{ص}_2 - \text{ص}_1 & \text{ع}_2 - \text{ع}_1 \\ \text{س}_3 - \text{س}_1 & \text{ص}_3 - \text{ص}_1 & \text{ع}_3 - \text{ع}_1 \end{vmatrix} = 0$$

∴ المعادلة العامة للمستوى هى :

$$\begin{vmatrix} \text{س} - 1 & \text{ص} & \text{ع} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

أى : ٦ س + ٣ ص + ٢ ع − ٦ = ٠

إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٦٣

أثبت أن المستقيمين ل_1 : ٢ س = ٣ ص = ٤ ع ، ل_2 : ٣ س = ٢ ص = ٥ ع متقاطعان ثم أوجد معادلة المستوى الذى يحويهما

الحل

∵ ل_1 : ٢ س = ٣ ص = ٤ ع بالقسمة ÷ ١٢ ينتج :

$\frac{\text{س}}{6} = \frac{\text{ص}}{4} = \frac{\text{ع}}{3}$ ∴ ل_1 يمر بنقطة الأصل ، $\vec{\text{هـ}}_1$ = (٦ ، ٤ ، ٣)

، ∵ ل_2 : ٣ س = ٢ ص = ٥ ع بالقسمة ÷ ٣٠ ينتج :

$\frac{\text{س}}{10} = \frac{\text{ص}}{15} = \frac{\text{ع}}{6}$ ∴ ل_2 يمر بنقطة الأصل ، $\vec{\text{هـ}}_2$ = (١٠ ، ١٥ ، ٦)

∴ المستقيمان ل_1 ، ل_2 يتقاطعان فى نقطة الأصل ، المستوى يمر بها

$$\therefore \vec{\text{ن}} = \vec{\text{هـ}}_1 \times \vec{\text{هـ}}_2 = \begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ 6 & 4 & 3 \\ 10 & 15 & 6 \end{vmatrix} = (-21 \text{ ، } -6 \text{ ، } 50)$$

∴ معادلة المستوى هى : (−٢١ ، −٦ ، ٥٠) • $\vec{\text{ر}}$ = ٦

إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٦٤

أوجد نقطة تقاطع المستقيم : $\vec{\text{ر}}$ = (١ ، ٤ ، ٢) + ك (٣ ، ٢ ، ٢)

مع المستوى : (٣ ، ٢ ، ٢) • $\vec{\text{ر}}$ = −٢

الحل

$\because$ $\overrightarrow{ر} = (١ ، ٤ ، ٢) + ل (٣ ، ٢ ، ٢)$ ، $(٣ ، ٢ ، ٢) \bullet \overrightarrow{ر} = -٢$

$\therefore$ $(٣ ، ٢ ، ٢) \bullet [(١ ، ٤ ، ٢) + ل (٣ ، ٢ ، ٢)] = -٢$

$\therefore$ $(٣ ، ٢ ، ٢) \bullet (١ + ٣ ل ، ٤ + ٢ ل ، ٢ + ٢ ل) = -٢$

$\therefore$ $٣ + ٩ ل + ٨ + ٤ ل + ٤ + ٤ ل = -٢$

$\therefore$ $١٧ ل = -١٧$ و منها : $ل = -١$ $\therefore$ نقطة التقاطع هى :

$(١ + ٣ \times (-١) ، ٤ + ٢ \times (-١) ، ٢ + ٢ \times (-١))$

أى : $(-٢ ، ٢ ، ٠)$

الزاوية بين مستويين :

قياس الزاوية بين مستويين هو قياس الزاوية بين متجهى الاتجاه العمودين عليهما

فإذا كان : $\overrightarrow{ن_١}$ ، $\overrightarrow{ن_٢}$ هما المتجهين العمودين على المستويين فإن : قياس الزاوية بين المستويين يعطى من العلاقة :

$$حتا \theta = \frac{| \overrightarrow{ن_١} \bullet \overrightarrow{ن_٢} |}{\| \overrightarrow{ن_١} \| \| \overrightarrow{ن_٢} \|} \quad \text{حيث : } ٠° \le \theta \le ٩٠°$$

ملاحظات :

(١) إذا كان : $\overrightarrow{ن_١} \bullet \overrightarrow{ن_٢} = ٠$ فإن : $\theta = ٩٠°$

و يكون المستويان متعامدين

أى أن : شرط تعامد مستويين هو : $\overrightarrow{ن_١} \bullet \overrightarrow{ن_٢} = ٠$

و إذا كانت المعادلة العامة لكلا المستويين هما :

$أ_١ س + ب_١ ص + حـ_١ ع + ء_١ = ٠$ ، $أ_٢ س + ب_٢ ص + حـ_٢ ع + ء_٢ = ٠$ فإن :

شرط تعامد مستويين يكون هو : $أ_١ أ_٢ + ب_١ ب_٢ + حـ_١ حـ_٢ = ٠$

(٢) شرط توازى مستويين هو : $\overrightarrow{ن_١} // \overrightarrow{ن_٢}$ أى :

$\overrightarrow{ن_١} = ل \overrightarrow{ن_٢}$ أو $\overrightarrow{ن_١} \times \overrightarrow{ن_٢} = \overrightarrow{و}$ أو

$\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢}$ من المعادلة العامة لكلا المستويين

(٣) من المعادلة العامة لكلا المستويين إذا كان :

$\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢} \ne \frac{ء_١}{ء_٢}$ فإن المستويين متوازيان و غير منطبقين

(٤) من المعادلة العامة لكلا المستويين إذا كان :

$\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{حـ_١}{حـ_٢} = \frac{ء_١}{ء_٢}$ فإن المستويين منطبقان

(٥) من المعادلة العامة لكلا المستويين إذا كان :

$\frac{أ_١}{أ_٢} \ne \frac{ب_١}{ب_٢} \ne \frac{حـ_١}{حـ_٢} \ne \frac{ء_١}{ء_٢}$ فإن المستويين متقاطعان

(٦) طرق ايجاد معادلة خط تقاطع مستويين :

نثبت أن المستويين غير متوازيين من (٥)

ثم نتبع إحدى الطرق التالية :

[أ] خطوات الطريقة الأولى :

(١) نحل معادلتى المستويين معاً لحذف أحد المتغيرات و ليكن ص فتنتج معادلة نجعلها على صورة س بدلالة ع

(٢) نحل معادلتى المستويين معاً لحذف أحد المتغيرات و ليكن ع

فتنتج معادلة نجعلها على صورة س بدلالة ص

٣) من الخطوتين السابقتين تنتج المعادلة العامة لخط تقاطع المستويين

٢] خطوات الطريقة الثانية :

١) نحل معادلتى المستويين معاً لحذف أحد المتغيرات و ليكن ص
نفرض أن : ع = ك فتنتج قيمة س بدلالة ك

٢) بالتعويض عن قيمتى س ، ع بدلالة ك فى إحدى معادلتى المستويين فنستنتج قيمة ص بدلالة ك

٣) من الخطوتين السابقتين تنتج المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين

٣] خطوات الطريقة الثالثة :

١) نوجد متجه اتجاه خط تقاطع المستويين الذى يساوى حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهى الاتجاه العمودين على المستويين
حيث : خط تقاطع المستويين عمودى على متجهى الاتجاه العمودين على المستويين

٢) نوجد نقطة تنتمى لخط تقاطع المستويين بفرض قيمة لأحد المتغرات و ليكن س ، و نعوض بها فى كلا معادلتى المستويين

٣) بحل المعادلتين الناتجتين فى الخطوة السابقة نحصل على قيمتى المتغيرين ص ، ع ، و بالتالى تنتج النقطة المطلوبة

٤) من الخطوتين ١) ، ٣) نوجد المعادلة المتجهة لخط تقاطع المستويين

إجابة حاول أن تحل (٦) صفحة ١٦٤

أوجد قياس الزاوية بين المستويين : س − ٣ ص + ٢ ع = ٠
، ٢ س + ص − ع = ٣

الحل

$\because \overrightarrow{ن_1} = (١ ، -٣ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ن_2} = (٢ ، ١ ، -١)$

$$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{|\overrightarrow{ن_1} \bullet \overrightarrow{ن_2}|}{\|\overrightarrow{ن_1}\|\,\|\overrightarrow{ن_2}\|} = \frac{|٢ - ٣ - ٢|}{\sqrt{١+٩+٤}\,\sqrt{٤+١+١}} = \frac{٣}{\sqrt{١٤}\,\sqrt{٦}}$$

$\therefore \theta = ٧٠^\circ\ ٥٤'$

إجابة حاول أن تحل (٧) صفحة ١٦٥

إذا كان المستوى : س − ٣ ص + ع = ٤ عمودى على المستوى أ س + ٢ ص + ٣ ع = ٢ ، فما قيمة أ

الحل

$\because \overrightarrow{ن_1} = (١ ، -٣ ، ١)$ ، $\overrightarrow{ن_2} = (أ ، ٢ ، ٣)$ ، المستويان متعامدان

$\therefore (١ ، -٣ ، ١) \bullet (أ ، ٢ ، ٣) = ٠$ $\therefore$ أ − ٦ + ٣ = ٠ $\therefore$ أ = ٣

إجابة حاول أن تحل (٨) صفحة ١٦٦

أوجد معادلة خط تقاطع المستويين : ٣ س − ص + ٢ ع = ٣
، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢

الحل

$\because$ ٣ س − ص + ٢ ع = ٣ (١) ، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢ (٢)

$\therefore \overrightarrow{ن_1} = (٣ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ن_2} = (١ ، -٢ ، ٥)$

، $(٣ ، -١ ، ٢) \neq$ ك $(١ ، -٢ ، ٥)$ أو : $\frac{٣}{١} \neq \frac{٢}{٥}$ $\therefore$ المستويان متقاطعان

بضرب (١) × (−٢) و جمعها مع (٢) ينتج :

− ٥ س + ع = − ٤ $\therefore$ ع = ٥ س − ٤ (٣)

، بضرب (٢) × (−٣) و جمعها مع (١) ينتج :

٥ ص − ١٣ ع = − ٣ ∴ $\text{ع} = \frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣}$ (٤)

من (٣) ، (٤) ∴ المعادلة العامة لخط تقاطع المستويين هى :

$$\frac{\text{٥ س} - ٤}{١} = \frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣} = \frac{\text{ع}}{١}$$

حل آخر

بضرب (١) × (− ٢) و جمعها مع (٢) ينتج : − ٥ س + ع = − ٤

بفرض أن : س = ك (٣) ∴ ع = ٥ ك − ٤ (٤)

، بالتعويض فى (١) ينتج : ٣ ك − ص + ٢ × (٥ ك − ٤) = ٣

∴ ٣ ك − ص + ١٠ ك − ٨ = ٣ و منها : ص = ١٣ ك − ٥ (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين هى :

س = ك ، ص = ١٣ ك − ١١ ، ع = ٥ ك − ٤

أى أن : $\text{س} = \frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣} = \frac{\text{ع} + ٤}{٥}$

و بالضرب × ٥ ، و اضافة (− ٤) ينتج :

$\frac{\text{٥ س} - ٤}{١} = \frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣} = \frac{\text{ع}}{١}$ و هى نفس المعادلة بالحل الأول

حل ثالث

∵ $\overrightarrow{\text{ن}_١} = (٣ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (١ ، -٢ ، ٥)$

$$\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{ن}_١} \times \overrightarrow{\text{ن}_٢} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = -\overrightarrow{\text{س}} - ١٣\overrightarrow{\text{ص}} - ٥\overrightarrow{\text{ع}}$$

، بوضع : س = ١ " مثلاً " و بالتعويض فى (١) ، (٢) ينتج :

− ص + ٢ ع = ٠ (٣) ، − ٢ ص + ٥ ع = ١ (٤)

، بضرب (٣) × (− ٢) و جمعها مع (٤) ينتج : ع = ١

، بالتعويض فى (٤) ينتج : ص = ٢

∴ النقطة (١ ، ٢ ، ١) تقع على خط تقاطع المستويين

، المعادلة المتجهة لخط تقاطع المستويين هى :

$\overrightarrow{\text{ر}} = (١ ، ٢ ، ١) + \text{ك} (-١ ، -١٣ ، -٥)$

أى أن : س = ١ − ك ، ص = ٢ − ١٣ ك ، ع = ١ − ٥ ك

$$\therefore \frac{\text{س} - ١}{-١} = \frac{\text{ص} - ٢}{-١٣} = \frac{\text{ع} - ١}{-٥}$$

و بالضرب × (− ٥) ، و اضافة (١) ينتج :

$\frac{\text{٥ س} - ٤}{١} = \frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣} = \frac{\text{ع}}{١}$ و هى نفس المعادلة بالحل الأول

طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى :

إذا كانت : أ ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$ ، $\text{ع}_١$) نقطة خارج المستوى سـ حيث :

سـ : أ س + ب ص + جـ ع + ء = ٠ .

، و كانت ب ($\text{س}_٢$ ، $\text{ص}_٢$ ، $\text{ع}_٢$) نقطة على المستوى سـ ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ متجه الاتجاه العمودى المستوى سـ

فإن : بعد (طول العمود المرسوم من) النقطة أ المستوى سـ

يساوى طول مسقط $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ على $\overrightarrow{\text{ن}}$ و يرمز له بالرمز : ل

$$\text{أى أن : ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|}$$

و هى الصورة المتجهة لطول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

، ∵ $\overrightarrow{\text{ب أ}} = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١) - (\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$

$= (\text{س}_١ - \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ ، \text{ع}_١ - \text{ع}_٢)$

$$\therefore \text{ل} = \frac{|(\text{س}_١ - \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ ، \text{ع}_١ - \text{ع}_٢) \bullet (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$$

$$= \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{حـ}\text{ع}_١ + (-\text{أ}\text{س}_٢ - \text{ب}\text{ص}_٢ - \text{حـ}\text{ع}_٢)|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$$

، ∵ ب ($\text{س}_٢$ ، $\text{ص}_٢$ ، $\text{ع}_٢$) تقع على المستوى س

، س : أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

$\therefore \text{ل} = \text{أ}\text{س}_٢ + \text{ب}\text{ص}_٢ + \text{حـ}\text{ع}_٢ = -\text{ء}$

$$\therefore \text{ل} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{حـ}\text{ع}_١ + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$$

و هى الصورة الاحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى

خطوات ايجاد المسافة بين مستويين متوازيين :

(١) نوجد نقطة تقع على أحدهما و ذلك بفرض قيمتين لأى متغيرين و ليكونا س ، ص و بالتعويض فى معادلة المستوى نحصل على قيمة المتغير ع

(٢) نحسب طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر

إجابة حاول أن تحل (٩) صفحة ١٦٧

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، ١ ، ٤) على المستوى الذى معادلته : $\overrightarrow{\text{ر}} \bullet (١ ، −٣ ، ٢) = ٤$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{ر}} \bullet (١ ، −٣ ، ٢) = ٤$ ∴ $\overrightarrow{\text{ن}} = (١ ، −٣ ، ٢)$

نفرض أن : المستوى يقطع محور ع فى النقطة (٠ ، ٠ ، ع)

∴ (٠ ، ٠ ، ع) • (١ ، −٣ ، ٢) = ٤ و منها : ع = ٢

∴ النقطة ب (٠ ، ٠ ، ٢) تقع على المستوى ، ∵ أ = (−٢ ، ١ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ = (−٢ ، ١ ، ٤) − (٠ ، ٠ ، ٢) = (−٢ ، ١ ، ٢)

$$\therefore \text{طول العمود} = \text{ل} = \frac{|\overrightarrow{\text{ب أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ن}}|}{\|\overrightarrow{\text{ن}}\|} = \frac{|-٢ - ٣ + ٤|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{١٤}} \text{ وحدة طول}$$

حل آخر

∵ $\overrightarrow{\text{ر}} \bullet (١ ، −٣ ، ٢) = ٤$ ∴ س − ٣ ص + ٢ ع − ٤ = ٠

، ∵ ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$ ، $\text{ع}_١$) = (−٢ ، ١ ، ٤)

$$\therefore \text{طول العمود} = \text{ل} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{حـ}\text{ع}_١ + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$$

$$= \frac{|-٢ - ٣ + ٨ - ٤|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{١٤}} \text{ وحدة طول}$$

إجابة حاول أن تحل (١٠) صفحة ١٦٧

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−١ ، ٤ ، ٠) على المستوى الذى معادلته : س − ٢ ص − ع = ٤

الحل

∵ ($\text{س}_١$ ، $\text{ص}_١$ ، $\text{ع}_١$) = (−١ ، ٤ ، ٠) ، س − ٢ ص − ع − ٤ = ٠

$$\therefore \text{طول العمود} = \text{ل} = \frac{|\text{أ}\text{س}_١ + \text{ب}\text{ص}_١ + \text{حـ}\text{ع}_١ + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢ + \text{حـ}^٢}}$$

$$= \frac{|-١ - ٨ + ٠ - ٤|}{\sqrt{١ + ٤ + ١}} = \frac{١٣}{\sqrt{٦}} \text{ وحدة طول}$$

إجابة حاول أن تحل (١١) صفحة ١٦٨

أثبت أن المستويين : ٣ س + ٦ ص + ٦ ع = ٤ ،
س + ٢ ص + ٢ ع = ١ متوازيان ، و أوجد البعد بينهما

الحل

∵ ٣ س + ٦ ص + ٦ ع = ٤ (١) ، س + ٢ ص + ٢ ع = ١ (٢)

∴ $\overrightarrow{\text{ن}_1}$ = (٣ ، ٦ ، ٦) ، $\overrightarrow{\text{ن}_2}$ = (١ ، ٢ ، ٢)

، (٣ ، ٦ ، ٦) = ل (١ ، ٢ ، ٢) أو : $\frac{٣}{١} = \frac{٦}{٢} = \frac{٦}{٢}$ ∴ المستويان متوازيان

نفرض أن : س = ٠ ، ص = ٠

، و بالتعويض فى معادلة المستوى الثانى ينتج : ع = $\frac{١}{٢}$

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$) تقع على المستوى الثانى

، ∵ (س_1 ، ص_1 ، ع_1) = (٠ ، ٠ ، $\frac{١}{٢}$) ، ٣ س + ٦ ص + ٦ ع − ٤ = ٠

∴ طول العمود = ل = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ ع}_1 + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2}}$

= $\frac{|٠ + ٠ + ٣ - ٤|}{\sqrt{٩ + ٣٦ + ٣٦}}$ = $\frac{١}{٩}$ وحدة طول

معادلة المستوى باستخدام الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات :

إذا قطع المستوى محاور الاحداثيات فى النقط (س_1 ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص_1 ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع_1) فإن معادلة المستوى تكون الصورة : $\frac{\text{س}}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}_1} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}_1} = ١$

و هى معادلة المستوى بدلالة الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات

البرهان :

∵ المستوى يمر بالنقط : (س_1 ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ص_1 ، ٠) ، (٠ ، ٠ ، ع_1)

∴ معادلة المستوى هى : $\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_1 & \text{ص} & \text{ع} \\ -\text{س}_1 & \text{ص}_1 & ٠ \\ -\text{س}_1 & ٠ & \text{ع}_1 \end{vmatrix} = ٠$

∴ $\text{ص}_1 \text{ع}_1$ (س − س_1) − ص (− $\text{س}_1 \text{ع}_1$) + ع ($\text{س}_1 \text{ص}_1$) = ٠

∴ $\text{ص}_1 \text{ع}_1$ س − $\text{س}_1 \text{ص}_1 \text{ع}_1$ + ص $\text{س}_1 \text{ع}_1$ + ع $\text{س}_1 \text{ص}_1$ = ٠

∴ $\text{ص}_1 \text{ع}_1$ س + ص $\text{س}_1 \text{ع}_1$ + ع $\text{س}_1 \text{ص}_1$ = $\text{س}_1 \text{ص}_1 \text{ع}_1$

، بالقسمة : $\text{س}_1 \text{ص}_1 \text{ع}_1$ ينتج : $\frac{\text{س}}{\text{س}_1} = \frac{\text{ص}}{\text{ص}_1} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}_1} = ١$

إجابة حاول أن تحل (١٢) صفحة ١٦٨

أوجد الأجزاء التى يقطعها المستوى : ٢ س + ٣ ص − ع = ٦ من محاور الاحداثيات

الحل

∵ ٢ س + ٣ ص − ع = ٦ بالقسمة ÷ ٦ ينتج :

$\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص}}{٢} = \frac{\text{ع}}{-٦} = ١$

∴ المستوى يقطع من محاور الاحداثيات : س ، ص ، ع الأجزاء :
٣ ، ٢ ، −٦ على الترتيب

إجابة تفكير ناقد صفحة ١٦٨

إذا قطع المستوى : ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢ محاور الاحداثيات فى النقط أ ، ب ، حـ على الترتيب أحسب مساحة المثلث أ ب حـ

الحل

∵ ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢

بالقسمة ÷ ١٢ ينتج :

س/٤ = ص/٦ = ع/٣ = ١

∴ المستوى يقطع من محاور الاحداثيات :

س ، ص ، ع الأجزاء :

٤ ، ٦ ، ٣ على الترتيب

∴ أ = (٤ ، ٠ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٦ ، ٠)

، حـ = (٠ ، ٠ ، ٣)

∴ أب← = (٠ ، ٦ ، ٠) − (٤ ، ٠ ، ٠) = (−٤ ، ٦ ، ٠)

، أحـ← = (٠ ، ٠ ، ٣) − (٤ ، ٠ ، ٠) = (−٤ ، ٠ ، ٣)

∴ أب← × أحـ← = | س← ص← ع← ؛ −٤ ٦ ٠ ؛ −٤ ٠ ٣ | = (١٨ ، ١٢ ، ٢٤)

∴ || أب← × أحـ← || = √(٣٢٤ + ١٤٤ + ٥٧٦) = ٦ √٢٩

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = ½ × ٦ √٢٩ = ٣ √٢٩ وحدة مربعة

تذكر :

معيار حاصل الضرب الاتجاهى لمتجهين يساوى ضعف مساحة المثلث الذى فيه هذين المتجهين ضلعان

حل تمارين (٢ − ٢) صفحة ١٦٩ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) أى من النقط تقع فى المستوى : ٢ س + ٣ ص − ع = ٥

(أ) (١ ، ١ ، ١)   (ب) (١ ، ٢ ، ٠)

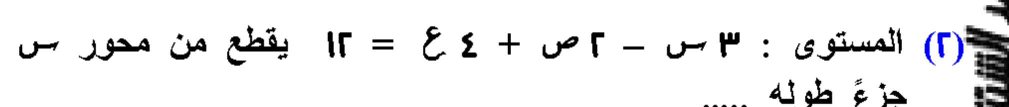
(حـ) (٠ ، ٢ ، ١)   (ء) (٣ ، ٢ ، −١)

الحل

بالتعويض المباشر عن كل نقطة فى معادلة المستوى نجد أن :

النقطة (٠ ، ٢ ، ١) تقع على المستوى لأن : ٠ + ٦ − ١ = ٥

" تحقق عن النقط الأخرى بنفسك "



(٢) المستوى : ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ١٢ يقطع من محور س جزءً طوله .....

(أ) ٣   (ب) −٤   (حـ) ٤   (ء) ٦

الحل

∵ ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ١٢   بالقسمة ÷ ١٢ ينتج :

س/٤ = ص/−٦ = ع/٣ = ١

∴ المستوى يقطع من محور : س ، ص ، ع جزءً طوله ٤ وحدات

(٣) إذا كانت الأجزاء المقطوعة من محاور الاحداثيات بواسطة المستوى :

س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠ هى : أ ، ب ، حـ فإن :

أ + ب + حـ = ...

(أ) صفر   (ب) ٣٠   (حـ) ٣٠   (ء) ٤١

الحل

∵ س + ٥ ص − ٦ ع = ٣٠   بالقسمة ÷ ٣٠ ينتج :

$\frac{س}{٣٠} = \frac{ص}{٦} = \frac{ع}{-٥} = ١$ ∴ أ = ٣٠ ، ب = ٦ ، حـ = – ٥

∴ أ + ب + حـ = ٣٠ + ٦ – ٥ = ٣٠

(٤) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣) و يوازى محورى الاحداثيات : س ، ص هى ....

(أ) س + ٢ ص = ٣ (ب) ع = ٣

(حـ) س = ١ (ء) ص = ٢

الحل

∵ معادلة المستوى الذى يوازى محورى الاحداثيات : س ، ص هى معادلة مستوى يوازى المستوى (س ص) ، ∵ المستوى يمر بالنقطة (١ ، ٢ ، ٣)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ع = ٣

(٥) معادلة المستوى المار بالنقط (٢ ، ٣ ، ٥) ، (–١ ، ٣ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، –٢) هى ....

(أ) س + ص – ع = ٠ (ب) س = –١

(حـ) ص = ٣ (ء) ع = –٢

الحل

∵ المستوى يمر بالنقط : (٢ ، ٣ ، ٥) ، (–١ ، ٣ ، ١) ، (٤ ، ٣ ، –٢)

∴ معادلة المستوى هى :

$$\begin{vmatrix} س - ٢ & ص - ٣ & ع - ٥ \\ -١ - ٢ & ٣ - ٣ & ١ - ٥ \\ ٤ - ٢ & ٣ - ٣ & -٢ - ٥ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ معادلة المستوى هى :

$$\begin{vmatrix} س - ٢ & ص - ٣ & ع - ٥ \\ -٣ & ٠ & -٤ \\ ٢ & ٠ & -٧ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ معادلة المستوى هى : ص – ٣ = ٠ أى ص = ٣

(٦) معادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، –٢ ، ٥) و المتجه (٢ ، ١ ، ٣) عمودى عليه هى ....

(أ) ٢ س + ص + ٣ ع = ١ (ب) ٢ س + ص + ٣ ع = ١٥

(حـ) س + ٢ ص – ٦ ع = ١٥ (ء) س + ص + ع = ٤

الحل

∵ (أ ، ب ، حـ) = (١ ، –٢ ، ٥) ، (س١ ، ص١ ، ع١) = (٢ ، ١ ، ٣)

، ∵ (أ ، ب ، حـ) • (س١ ، ص١ ، ع١) = – ء

∴ ء = – [(١ ، –٢ ، ٥) • (٢ ، ١ ، ٣)] = – ١٥

، ∵ أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

∴ معادلة المستوى هى : ٢ س + ص + ٣ ع – ١٥ = ٠

أى : ٢ س + ص + ٣ ع = ١٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

(٧) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (١ ، –١ ، ٤) و المتجه $\overleftarrow{ن}$ = (٢ ، –٣ ، ٤) عمودى عليه ثم بين :

(أ) هل النقطة (٢ ، ٢ ، ١) تقع فى المستوى ؟

(ب) هل المتجه $\overleftarrow{ى}$ = (٣ ، –٥ ، –٢) يوازى المستوى ؟

الحل

∵ المعادلة المتجهة للمستوى هى : $\overleftarrow{ن}$ • $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{ن}$ • $\overleftarrow{أ}$

حيث : $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، –١ ، ٤) ∴ المعادلة المتجهة للمستوى هى :

(٢ ، –٣ ، ٤) • $\overleftarrow{ر}$ = (٢ ، –٣ ، ٤) • (١ ، –١ ، ٤)

(٢ ، –٣ ، ٤) • $\overleftarrow{ر}$ = ٢١ ، المعادلة القياسية للمستوى هى :

٢ (س – ١) – ٣ (ص + ١) + ٤ (ع – ٤) = ٠

∴ ٢ س – ٦ – ٣ ص – ٣ + ٤ ع – ١٦ = ٠ و منها :

المعادلة العامة للمستوى هى : ٢ س − ٣ ص + ٤ ع − ٢١ = ٠

(أ) عندما : س = ٢ ، ص = ٢ ، ع = ١

∴ ٢ × ٢ − ٣ × ٢ + ٤ × ١ − ٢١ = − ١٩ ≠ ٠

∴ النقطة (٢ ، ٢ ، ١) لا تقع فى المستوى

(ب) ∵ ن ≠ ك ى حيث : (٢ ، −٣ ، ٤) ≠ ك (٣ ، −٥ ، −٢)

∴ المتجه ى = (٣ ، −٥ ، −٢) لا يوازى المستوى

(٨) أوجد ثلاث نقط فى الفراغ تقع على كل من المستويات الآتية :

(أ) س = ٣   (ب) ص = −٢

(حـ) س + ٣ ص = ٥   (ء) ٢ س − ص + ٣ ع = ٤

الحل

(أ) ∵ معادلة المستوى هى : س = ٣

∴ النقط : (٣ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، −٥ ، −٢) ، (٣ ، −٣ ، ٤)

(ب) ∵ معادلة المستوى هى : ص = −٢

∴ النقط : (٠ ، −٢ ، ٣) ، (−٢ ، −٢ ، −٢) ، (١ ، −٢ ، ٠)

(حـ) ∵ معادلة المستوى هى : س + ٣ ص = ٥

∴ النقط : (٥ ، ٠ ، ٤) ، (−١ ، ٢ ، −٢) ، (−٤ ، ٣ ، ٤)

(ء) ∵ معادلة المستوى هى : ٢ س − ص + ٣ ع = ٤

∴ النقط : (١ ، ١ ، ١) ، (−١ ، ٢ ، −٢) ، (−٤ ، ٣ ، ٤)

توجد حلول أخرى بحيث تحقق كل نقطة معادلة المستوى

(٩) أوجد الصورة العامة لمعادلة المستوى المار بنقطة الأصل
و المتجه ن = س + ٢ ص − ٣ ع عمودى عليه

الحل

∵ (أ ، ب ، حـ) = (١ ، ٢ ، −٣) ، (س١ ، ص١ ، ع١) = (٠ ، ٠ ، ٠)

، ∵ (أ ، ب ، حـ) • (س١ ، ص١ ، ع١) = − ء

∴ ء = − [(١ ، ٢ ، −٣) • (٠ ، ٠ ، ٠)] = ٠

، ∵ أ س + ب ص + حـ ع + ء = ٠

∴ معادلة المستوى هى : س + ٢ ص − ٣ ع = ٠

(١٠) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، −١ ، ٠)
و المتجه ن = ٤ س + ١٠ ص − ٧ ع عمودى عليه

الحل

∵ المعادلة المتجهة للمستوى هى : ن • ر = ن • أ

حيث : أ = (٢ ، −١ ، ٠)   ∴ المعادلة المتجهة للمستوى هى :

(٤ ، ١٠ ، −٧) • ر = (٤ ، ١٠ ، −٧) • (٢ ، −١ ، ٢)

(٤ ، ١٠ ، −٧) • ر = −٢ ، المعادلة القياسية للمستوى هى :

٤ (س − ٢) + ١٠ (ص + ١) − ٧ (ع − ٠) = ٠

∴ ٤ س − ٨ + ١٠ ص + ١٠ − ٧ ع = ٠   و منها :

المعادلة العامة للمستوى هى : ٤ س + ١٠ ص − ٧ ع + ٢ = ٠

(١١) أوجد الصور المختلفة للمستوى المار بالثلاث نقط أ (٢ ، −١ ، ٠) ،
ب (−١ ، ٣ ، ٤) ، حـ (٣ ، ٠ ، ٢)

الحل

∵ أ = (٢ ، −١ ، ٠) ، ب = (−١ ، ٣ ، ٤) ، حـ = (٣ ، ٠ ، ٢)

∴ أب = (−١ ، ٣ ، ٤) − (٢ ، −١ ، ٠) = (−٣ ، ٤ ، ٤)

، أحـ = (٣ ، ٠ ، ٢) − (٢ ، −١ ، ٠) = (١ ، ١ ، ٢)

، ∵ أب ≠ ك أحـ أى أن : أب لا يوازى أحـ

∴ النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

∴ ن = أب × أحـ = | س ص ع ؛ −٣ ٤ ٤ ؛ ١ ١ ٢ | = (٤ ، ١٠ ، −٧)

، ∵ المعادلة المتجهة للمستوى هى : ن • ر = ن • أ

∴ (٤ ، ١٠ ، −٧) • ر = (٤ ، ١٠ ، −٧) • (٢ ، −١ ، ٠)

∴ المعادلة المتجهة للمستوى هى : (٤ ، ١٠ ، −٧) • ر = −٢ ،

المعادلة القياسية للمستوى هى : ٤ (س − ٢) + ١٠ (ص + ١) − ٧ (ع − ٠) = ٠

∴ ٤ س − ٨ + ١٠ ص + ١٠ − ٧ ع = ٠ و منها :

المعادلة العامة للمستوى هى : ٤ س + ١٠ ص − ٧ ع + ٢ = ٠

(١٢) أثبت أن المستقيم : ر = ع + ك (٢ س + ٣ ص + ٤ ع)

عمودى على المستوى : س + $\frac{٣}{٢}$ ص + ٢ ع = ٥

الحل

∵ المتجه : هـ = (٢ ، ٣ ، ٤) هو متجه اتجاه المستقيم

، المتجه : ن = (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢) هو متجه الاتجاه العمودى على المستوى

، ∵ (٢ ، ٣ ، ٤) = ٢ (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢) ∴ هـ // ن

∴ المستقيم عمودى على المستوى

(١٣) أثبت أن النقطة (٢ ، ٣ ، ١) و المستقيم :

ل : ر = (٣ س + ص + ٣ ع) + ك (س − ٢ ص + ٢ ع)

يقعان فى المستوى الذى معادلته : ر • (٢ س − ع) = ٣

الحل

بالتعويض بالنقطة فى معادلة المستوى نجد : (٢ ، ٣ ، ١) • (٢ ، ٠ ، −١) = ٣

∴ النقطة تحقق معادلة المستوى ∴ النقطة تقع فى المستوى

، ∵ المتجه : هـ = (١ ، −٢ ، ٢) هو متجه اتجاه المستقيم

، المتجه : ن = (٢ ، ٠ ، −١) هو متجه الاتجاه العمودى على المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) • (٢ ، ٠ ، −١) = ٠ ∴ هـ ⊥ ن

∴ المستقيم يوازى المستوى (١)

، ∵ النقطة (٣ ، ١ ، ٣) تقع على المستقيم و بالتعويض بها فى معادلة المستوى

نجد : (٣ ، ٢ ، ٣) • (٢ ، ٠ ، −١) = ٣

∴ النقطة تحقق معادلة المستوى ∴ النقطة تقع فى المستوى (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : المستقيم يقع فى المستوى

(١٤) أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) و يحقق الشروط الآتية :

(أ) يوازى المستوى : ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١

(ب) عمودى على المستقيم المار بالنقطتين : (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

(حـ) عمودى على كل من المستويين : ٧ س + ص + ٢ ع = ٦ ، ٣ س + ٥ ص − ٦ ع = ٨

الحل

(أ) ∵ المستوى المطلوب يوازى المستوى : ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١

الذى متجه الاتجاه العمودى له = (٢ ، ٣ ، ٥)

∴ متجه الاتجاه العمودى للمستوى المطلوب = (٢ ، ٣ ، ٥)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ل

، ∵ المستوى المطلوب يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) فهى تحقق معادلته

∴ ٢ × ٢ + ٣ × ١ + ٥ × ٤ = ل و منها : ل = ٢٧

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ٢٧

(ب) ∵ المستوى المطلوب عمودى على المستقيم المار بالنقطتين :

(٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

، ∵ متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، ٢ ، ٥) − (١ ، ٦ ، ٤) = (٢ ، −٤ ، ١)

∴ متجه الاتجاه العمودى للمستوى المطلوب = (٢ ، −٤ ، ١)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ٢ س − ٤ ص + ع = ل

، ∵ المستوى المطلوب يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) فهى تحقق معادلته

∴ ٢ × ٢ − ٤ × ١ + ١ × ٤ = ل　　و منها : ل = ٤

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ٢ س − ٤ ص + ع = ٤

(حـ) ∵ المستوى المطلوب عمودى على كل من المستويين :

٧ س + ص + ٢ ع = ٦ ، ٣ س + ٥ ص − ٦ ع = ٨

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب يوازى هذين المستويين

، ∵ متجه الاتجاه العمودى على المستوى الأول = (٧ ، ١ ، ٢)

، متجه الاتجاه العمودى على المستوى الثانى = (٣ ، ٥ ، −٦)

، متجه الاتجاه الموازى لهذين المستويين =

س⃗	ص⃗	ع⃗
٧	١	٢
٣	٥	−٦

= (−١٦ ، ٤٨ ، ٣٢) = (−١ ، ٣ ، ٢)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب = (−١ ، ٣ ، ٢)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : − س + ٣ ص + ٢ ع = م

، ∵ المستوى المطلوب يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، ٤) فهى تحقق معادلته

∴ (−١) × ٢ + ٣ × ١ + ٢ × ٤ = م　　و منها : م = ٩

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : − س + ٣ ص + ٢ ع = ٩

(١٥) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم :

ل : ر⃗ = ع⃗ + ك (٢ س⃗ + ص⃗ + ع⃗) مع المستوى :

ر⃗ • س⃗ = ٤

الحل

∵ معادلة المستقيم هى : ر⃗ = (٠ ، ٠ ، ١) + ك (٢ ، ١ ، ١)

= (٢ ك ، ك ، ١ + ك)

، معادلة المستوى هى : ر⃗ • (١ ، ٠ ، ٠) = ٤

بالتعويض من معادلة المستقيم فى معادلة المستوى ينتج :

(٢ ك ، ك ، ١ + ك) • (١ ، ٠ ، ٠) = ٤　∴ ٢ ك = ٤　و منها : ك = ٢

∴ نقطة التقاطع هى : (٢ × ٢ ، ٢ ، ١ + ٢) = (٤ ، ٢ ، ٣)

(١٦) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى الذى يقطع من محاور الاحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء : ٢ ، ٤ ، ٥ على الترتيب

الحل

معادلة المستوى هى : س/٢ + ص/٤ + ع/٥ = ١ ، بالضرب × ٢٠ ينتج :

الصورة العامة هى : ١٠ س + ٥ ص + ٤ ع = ٢٠

حيث : متجه الاتجاه العمودى عليه = (١٠ ، ٥ ، ٤)

، بوضع : س = ٠ ، ص = ٠ ، و التعويض فى معادلة المستوى ينتج :

ع = ٥　∴ المستوى يمر بالنقطة (٠ ، ٠ ، ٥)

∴ الصورة المتجهة هى : (١٠ ، ٥ ، ٤) • ر⃗ = (١٠ ، ٥ ، ٤) • (٠ ، ٠ ، ٥)

أى : (١٠ ، ٥ ، ٤) • ر⃗ = ٢٠

، الصورة القياسية هى : ١٠ س + ٥ ص + ٤ (ع − ٥) = ٠

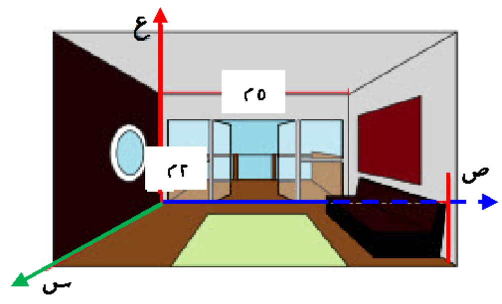
(١٧) فى الشكل المقابل :

أوجد معادلة كل من :

(أ) مستوى أرضية الحجرة

(ب) مستوى سقف الحجرة

(حـ) مستويات الحوائط الجانبية



الحل

(أ) مستوى أرضية الحجرة هو المستوى (س ص) و معادلته هى : ع = ٠ .

(ب) مستوى سقف الحجرة هو مستوى يوازى المستوى (س ص)
و معادلته هى : ع = ٢

(جـ) مستويات الحوائط الجانبية هى :
المستوى (س ع) و معادلته هى : ص = ٠ ،
مستوى يوازى المستوى (س ع) و معادلته هى : ص = ٥ ،
المستوى (ص ع) و معادلته هى : س = ٠ .

(١٨) أوجد معادلة المستوى الذى يحوى المستقيم :
ل١ : ر⃗ = (٠ ، ٣ ، –٥) + ك١ (٦ ، –٢ ، –١) ، و يوازى
المستقيم ل٢ : ر⃗ = (١ ، ٧ ، –٤) + ك٢ (١ ، –٣ ، ٣)

الحل

∵ المستوى يحوى المستقيم ل١ المار بالنقطة (٠ ، ٣ ، –٥)
، الذى متجه اتجاهه = (٦ ، –٢ ، –١)
∴ المستوى يمر بالنقطة (٠ ، ٣ ، –٥)
، ∵ المستوى يوازى المستقيم ل٢ الذى متجه اتجاهه = (١ ، –٣ ، ٣)
∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى =

س⃗	ص⃗	ع⃗
٦	–٢	–١
١	–٣	٣

= (–٩ ، –١٩ ، –١٦) = (٩ ، ١٩ ، ١٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ٩ س + ١٩ ص + ١٦ ع = م
، ∵ المستوى المطلوب يمر بالنقطة (٠ ، ٣ ، –٥) فهى تحقق معادلته
∴ ٩ × ٠ + ١٩ × ٣ + ١٦ × (–٥) = م و منها : م = –٢٣
∴ معادلة المستوى المطلوب هى : ٩ س + ١٩ ص + ١٦ ع + ٢٣ = ٠ .

(١٩) أوجد قياس الزاوية بين كل زوج من المستويات الآتية :

(أ) ل١ : ٢ س – ص + ع = ٥ ،
ل٢ : ٣ س + ٢ ص – ٢ ع = ١

(ب) ل١ : ر⃗ • (٢ ، ١ ، –١) = ٤ ،
ل٢ : ر⃗ • (٣ ، –٢ ، ٠) = ٧

(جـ) ل١ : ص = ٤ ، ل٢ : س – ٣ ص + ٥ ع = ١

الحل

(أ) ∵ ن⃗١ = (٢ ، –١ ، ١) ، ن⃗٢ = (٣ ، ٢ ، –٢)

∴ جتا θ = | ٦ – ٢ – ٢ | ÷ (√(٤ + ١ + ١) √(٩ + ٤ + ٤)) = ٢ ÷ (√٦ √١٧)

∴ θ = ٧٨° ٣٥′

(ب) ∵ ن⃗١ = (٢ ، ١ ، –١) ، ن⃗٢ = (٣ ، –٢ ، ٠)

∴ جتا θ = | ٦ – ٢ + ٠ | ÷ (√(٤ + ١ + ١) √(٩ + ٤ + ٠)) = ٤ ÷ (√٦ √١٣)

∴ θ = ٦٣° ٤′

(جـ) ∵ ن⃗١ = (٠ ، ١ ، ٠) ، ن⃗٢ = (١ ، –٣ ، ٥)

∴ جتا θ = | ٠ – ٣ + ٠ | ÷ (√(٠ + ١ + ٠) √(١ + ٩ + ٢٥)) = ٣ ÷ (√١ √٣٥)

∴ θ = ٥٩° ٣٢′

(٢٠) إذا كانت النقط : أ ، ب ، حـ فى الفراغ متجهات موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هى : $-\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $2\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + 3\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $-\overrightarrow{\text{س}} - 2\overrightarrow{\text{ص}} + 2\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $7\overrightarrow{\text{س}} - 4\overrightarrow{\text{ص}} + 2\overrightarrow{\text{ع}}$

(أ) أوجد متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

(ب) بين أن طول العمود من ء على مستوى أ ب حـ يساوى $2\sqrt{6}$

(حـ) بين أن المستويين أ ب حـ ، ء ب حـ متعامدان

(ء) أوجد معادلة خط تقاطع المستويين أ ب حـ ، و ء ب

الحل

أ(٠ ، −١ ، ١) ، ب (٢ ، −١ ، ٣) ، حـ(−١ ، −٢ ، ٢) ، ء (٧ ، −٤ ، ٢)

(أ) ∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (٠ ، −١ ، ١) = (٢ ، ٠ ، ٢)

، $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (−١ ، −٢ ، ٢) − (٠ ، −١ ، ١) = (−١ ، −١ ، ١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ = $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 ، -4 ، -2) = (1 ، -2 ، -1)$$

(ب) ∵ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ هو (١ ، −٢ ، −١)

∴ معادلة المستوى أ ب حـ هى : س − ٢ ص − ع + م = ٠

، ∵ المستوى أ ب حـ يمر بالنقطة أ(٠ ، −١ ، ١) فهى تحقق معادلته

∴ ١ × ٠ − ٢ × (−١) − ١ × ١ + م = ٠ و منها : م = −١

∴ معادلة المستوى أ ب حـ هى : س − ٢ ص − ع − ١ = ٠

، طول العمود من ء على مستوى أ ب حـ = $\frac{|7 + 8 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4 + 1}}$

$$= \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

(حـ) ∵ $\overrightarrow{\text{ءب}}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (٧ ، −٤ ، ٢) = (−٥ ، ٣ ، ١)

، $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$ = (−١ ، −٢ ، ٢) − (٧ ، −٤ ، ٢) = (−٨ ، ٢ ، ٠)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى ء ب حـ = $\overrightarrow{\text{ءب}} \times \overrightarrow{\text{ءحـ}}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -5 & 3 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2 ، -8 ، 14) = (-1 ، -4 ، 7)$$

، ∵ (١ ، −٢ ، −١) • (−١ ، −٤ ، ٧) = ٠

∴ المستويان أ ب حـ ، و ب متعامدين

(ء) معادلة المستوى و ء ب هى :
$$\begin{vmatrix} \text{س} - 0 & \text{ص} - 0 & \text{ع} - 0 \\ 7 - 0 & -4 - 0 & 2 - 0 \\ 2 - 0 & -1 - 0 & 3 - 0 \end{vmatrix} = 0$$

∴ معادلة المستوى و ء ب هى : − ١٠ س − ١٧ ص + ع = ٠ (١)

، ∵ معادلة المستوى أ ب حـ هى : س − ٢ ص − ع = ١ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج : − ٩ س − ١٩ ص = ١

بفرض أن : س = ك (٣) ∴ ص = $-\frac{9}{19}$ ك $-\frac{1}{19}$ (٤)

، بالتعويض فى (١) ينتج : − ١٠ ك − ١٧ × ($-\frac{9}{19}$ ك $-\frac{1}{19}$) + ع = ٠

∴ − ١٠ ك + $\frac{153}{19}$ ك + $\frac{17}{19}$ + ع = ٠ و منها : ع = $-\frac{37}{19}$ ك + $\frac{17}{19}$ (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين هى :

س = ك ، ص = $-\frac{9}{19}$ ك $-\frac{1}{19}$ ، ع = $\frac{37}{19}$ ك $-\frac{17}{19}$

أى أن : س = $\frac{19 \text{ص} + 1}{-9} = \frac{19\text{ع} + 17}{37}$

أو : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، $-\frac{1}{19}$ ، $-\frac{17}{19}$) + ك (١ ، $-\frac{9}{19}$ ، $\frac{37}{19}$)

= (٠ ، $-\frac{1}{19}$ ، $-\frac{17}{19}$) + ك (١ ، − ٩ ، ٣٧)

(٢١) إذا كان المستوى س~ يحوى النقط : أ(١ ، ٤ ، ٢) ، ب(١ ، ٠ ، ٥) ، حـ(٠ ، ٨ ، −١) ، و كان المستوى ص~ يحوى النقطة ء(٢ ، ٢ ، ٣) ، المتجه ن→ = س→ + ٢ص→ + ٢ع→ عمودى عليه ، أوجد

(أ) المعادلة الاحداثية للمستوى س~

(ب) المعادلة الاحداثية للمستوى ص~

(حـ) إذا كانت النقطة (ط ، ٠ ، ف) تقع على كل من المستويين س~ ، ص~ فما قيمة كل من : ط ، ف ؟

(ء) إذا كانت النقطة (١ ، ١ ، ك) على أبعاد متساوية من المستويين س~ ، ص~ أوجد قيم ك الممكنة

الحل

أ(١ ، ٤ ، ٢) ، ب(١ ، ٠ ، ٥) ، حـ(٠ ، ٨ ، −١) ، ء(٢ ، ٢ ، ٣)

(أ) ∵ أب→ = (١ ، ٠ ، ٥) − (١ ، ٤ ، ٢) = (٠ ، −٤ ، ٣)

، أحـ→ = (٠ ، ٨ ، −١) − (١ ، ٤ ، ٢) = (−١ ، ٤ ، −٣)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى س~ = أب→ × أحـ→

= | س→ ص→ ع→ ؛ ٠ −٤ ٣ ؛ −١ ٤ −٣ | = (٠ ، −٣ ، −٤)

∴ معادلة المستوى س~ هى : − ٣ ص − ٤ ع + م = ٠

، ∵ المستوى س~ يمر بالنقطة أ(١ ، ٤ ، ٢) فهى تحقق معادلته

∴ ٠ × ١ − ٣ × ٤ − ٤ × ٢ + م = ٠ و منها : م = ٢٠

∴ معادلة المستوى س~ هى : − ٣ ص − ٤ ع + ٢٠ = ٠

أى : ٣ ص + ٤ ع − ٢٠ = ٠

(ب) ∵ متجه الاتجاه العمودى على المستوى ص~ هو (١ ، ٢ ، ٢)

∴ معادلة المستوى ص~ هى : س + ٢ ص + ٢ ع + ل = ٠

، ∵ المستوى ص~ يمر بالنقطة ء(٢ ، ٢ ، ٣) فهى تحقق معادلته

∴ ١ × ٢ + ٢ × ٢ + ٢ × ٣ + ل = ٠ و منها : ل = − ١٢

∴ معادلة المستوى س~ هى : س + ٢ ص + ٢ ع − ١٢ = ٠

(حـ) ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع على المستوى س~ فهى تحقق معادلته

∴ ٠ × ط + ٣ × ٠ + ٤ × ف − ٢٠ = ٠

و منها : ف = ٥

، ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع على المستوى ص~ فهى تحقق معادلته

∴ ١ × ط + ٢ × ٠ + ٢ × ف − ١٢ = ٠

، ∵ ف = ٥ ∴ ط = ٢

(ء) ∵ النقطة (١ ، ١ ، ك) على أبعاد متساوية من المستويين س~ ، ص~

، بفرض أن : بعدى النقطة (١ ، ١ ، ك) عن المستويين س~ ، ص~

هما : ل١ ، ل٢ على الترتيب ∴ ل١ = ل٢

$$\therefore \frac{|٣ + ٤ك - ٢٠|}{\sqrt{٠ + ٩ + ١٦}} = \frac{|١ + ٢ + ٢ك - ١٢|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$$

∴ ٣ (٢ك − ٩) = ± ٥ (٤ك − ١٧)

∴ ٣ (٤ك − ١٧) = ٥ (٢ك − ٩)

و منها : ك = ٣

أو : ٣ (٤ك − ١٧) = − ٥ (٢ك − ٩)

و منها : ك = $\frac{٤٨}{١١}$

حل تمارين عامة صفحة ١٧٣ بالكتاب المدرسى

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (−١ ، ٠ ، ٢) ، و المتجه : $\overrightarrow{هـ}$ = (١ ، −١ ، ٣) هى ....

(أ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ١}{-١}$

(ب) $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع - ٢}{٣}$

(جـ) $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع}{١}$

(د) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع}{٢}$

الحل

∵ الصورة المتجهة للمستقيم هى : $\overrightarrow{ر}$ = (−١ ، ٠ ، ٢) + ك (١ ، −١ ، ٣)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص}{-١} = \frac{ع - ٢}{٣}$

(٢) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (١ ، −١ ، ٢) ، ب (−١ ، ٠ ، ١) هى ....

(أ) $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{١} = \frac{ع - ٢}{١}$

(ب) $\frac{س + ١}{-٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ٢}{-١}$

(جـ) $\frac{س - ٢}{٢} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$

(د) $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص + ١}{٣} = \frac{ع - ٢}{-١}$

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = (−١ ، ٠ ، ١) − (١ ، −١ ، ٢) = (−٢ ، ١ ، −١) = (٢ ، −١ ، ١)

∴ الصورة المتجهة للمستقيم هى : $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، −١ ، ٢) + ك (٢ ، −١ ، ١)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ١}{-١} = \frac{ع - ٢}{١}$

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س - ٣}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، ص = ١ ، $\frac{س + ١}{١} = \frac{ص - ٢}{٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ يساوى ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

الحل

∵ $\overrightarrow{هـ_١}$ = (٢ ، ٠ ، −٢) ، $\overrightarrow{هـ_٢}$ = (١ ، ٢ ، −٢)

∴ جتا θ = $\frac{|\overrightarrow{هـ_١} \bullet \overrightarrow{هـ_٢}|}{\|\overrightarrow{هـ_١}\| \, \|\overrightarrow{هـ_٢}\|} = \frac{|٢ + ٠ + ٤|}{\sqrt{٤ + ٠ + ٤}\sqrt{١ + ٤ + ٤}}$

$= \frac{٦}{\sqrt{٨}\sqrt{٩}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ θ = ٤٥°

(٤) إذا كان المستقيمان $ل_١$: $\frac{س}{٢} = \frac{ص - ١}{-١} = \frac{ع - ٢}{م}$ ، $ل_٢$: $\frac{س - ١}{م} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{-١}$ متعامدين فإن قيمة م = ...

(أ) −١ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −٣

الحل

∵ $\overrightarrow{هـ_١}$ = (٢ ، −١ ، م) ، $\overrightarrow{هـ_٢}$ = (م ، ١ ، −١) ، $ل_١ \perp ل_٢$

∴ (٢ ، −١ ، م) • (م ، ١ ، −١) = ٠

∴ ٢م − ١ − م = ٠ ∴ م = ١

(٥) إذا كان المستقيمان ل$_1$: س = ٢ك − ١ ، ص = ك + ١ ، ع = ك − ١ ، ل$_2$: س = أك − ١ ، ص = ٢ك + ١ ، ع = ب ك − ٢ متوازيين فإن : أ + ب = ...

(أ) ٤   (ب) − ٢   (حـ) ٦   (ء) − ٣

الحل

∵ هـ$_1$ = (٢ ، ١ ، ١) ، هـ$_2$ = (أ ، ٢ ، ب) ، ل$_1$ // ل$_2$

∴ (٢ ، ١ ، ١) = م (أ ، ٢ ، ب) و منها : ٢ = م أ (١)

، ١ = م ب (٢) ، ١ = ٢ م ∴ م = $\frac{1}{2}$

، من (١) ينتج : أ = ٤ ، من (١) ينتج : ب = ٢

∴ أ + ب = ٤

حل آخر

∵ هـ$_1$ = (٢ ، ١ ، ١) ، هـ$_2$ = (أ ، ٢ ، ب) ، ل$_1$ // ل$_2$

∴ $\frac{٢}{أ}$ = $\frac{1}{2}$ = $\frac{١}{ب}$ و منها : أ = ٤ ، ب = ٢

∴ أ + ب = ٤

(٦) النقطة (٢ ، −١ ، ٣) تقع على المستوى ....

(أ) س + ص − ع = ٦

(ب) ٢ س − ٣ ص + ع = − ١٠

(حـ) ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٢٠

(ء) س − ٢ ص + ٥ ع = ٤

الحل

بالتعويض المباشر عن النقطة فى معادلات المستويات نجد أن النقطة تقع على المستوى : ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٢٠ لأن :

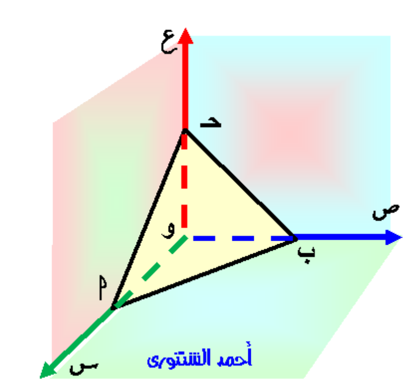
٣ × ٢ − ٢ × (− ١) + ٤ × ٣ = ٢٠

عوض بالنقطة فى معادلات المستويات بنفسك

(٧) إذا قطع المستوى : $\frac{س}{٤}$ = $\frac{ص}{٢}$ = $\frac{ع}{٢}$ = ١ محاور الاحداثيات فى النقط : أ ، ب ، حـ فإن : مساحة △ أ ب حـ = ...

(أ) ١٢   (ب) ١٠   (حـ) ٦   (ء) ٤

الحل



∵ $\frac{س}{٤}$ = $\frac{ص}{٣}$ = $\frac{ع}{٢}$ = ١

∴ المستوى يقطع من محاور الاحداثيات : س ، ص ، ع الأجزاء : ٤ ، ٣ ، ٢ على الترتيب

∴ أ = (٤ ، ٠ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٢ ، ٠)

، حـ = (٠ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overleftarrow{\text{أب}}$ = (٠ ، ٢ ، ٠) − (٤ ، ٠ ، ٠)

= (−٤ ، ٢ ، ٠)

، $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ = (٠ ، ٠ ، ٢) − (٤ ، ٠ ، ٠) = (−٤ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overleftarrow{\text{أب}}$ × $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ = $\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ -٤ & ٢ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٢ \end{vmatrix}$ = (٤ ، ٨ ، ٨)

∴ ‖ $\overleftarrow{\text{أب}}$ × $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ‖ = $\sqrt{١٦ + ٦٤ + ٦٤}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ وحدة مربعة

(٨) طول العمود من النقطة (٢ ، ١ ، ٣) إلى المستوى : ٢ س − ٢ ص + ع = ٥ هو ....

(أ) ١   (ب) ٢   (حـ) ٣   (ء) ٤

الحل

طول العمود = $\frac{\text{| ٤ − ٦ + ١ − ٥ |}}{\sqrt{\text{٤ + ٤ + ١}}}$ = ٢

(٩) معادلة خط تقاطع المستويين س_1 : ٢ س − ص + ع − ١ = ٠ ، س_2 : س − ٣ ص − ع + ٢ = ٠ هى ....

(أ) $\frac{\text{س − ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{٣}}$

(ب) $\frac{\text{س − ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع − ٥}}{\text{١}}$

(جـ) $\frac{\text{س − ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص − ٢}}{\text{− ٢}} = \frac{\text{ع}}{\text{− ١}}$

(د) $\frac{\text{س − ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص − ١}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع}}{\text{− ٥}}$

الحل

∵ س_1 : ٢ س − ص + ع − ١ = ٠ (١)

، س_2 : س − ٣ ص − ع + ٢ = ٠ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج : ٣ س − ٤ ص = − ١

بفرض أن : س = ك (٣) ∴ ص = $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ك + $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ (٤)

، بالتعويض فى (١) ينتج : ٢ ك − ١ × ($\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ك + $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$) + ع − ١ = ٠

∴ ٢ ك − $\frac{\text{٣}}{\text{٤}}$ ك − $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ + ع − ١ = ٠ و منها : ع = $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$ − $\frac{\text{٥}}{\text{٤}}$ ك (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ المعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين ينتج :

أى أن : س = $\frac{\text{٤ ص − ١}}{\text{− ٩}} = \frac{\text{٤ ع − ٥}}{\text{− ٥}}$

بإضافة (− ١) ، الضرب × ٤ ينتج :

معادلة خط تقاطع المستويين هى : $\frac{\text{س − ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص − ١}}{\text{٣}} = \frac{\text{ع}}{\text{− ٥}}$

(١٠) المستقيمان ل_1 : $\frac{\text{س + ١}}{\text{− ١}} = \frac{\text{ص − ٢}}{\text{− ١}} = \frac{\text{ع − ١}}{\text{٣}}$

، ل_2 : $\frac{\text{س + ١}}{\text{١}} = \frac{\text{ص − ٢}}{\text{− ٢}} = \frac{\text{ع − ١}}{\text{− ١}}$

يقعان فى المستوى ....

(أ) ٣ س − ٥ ص + ع − ١ = ٠

(ب) ٥ س − ٤ ص + ٢ ع − ٧ = ٠

(جـ) ٧ س − ٥ ص − ع − ٤ = ٠

(د) ٧ س + ٢ ص + ٣ ع = ٠

الحل

∵ ل_1 : $\vec{\text{ر}}$ = (−١ ، ٢ ، ١) + ك_1 (−١ ، −٢ ، ٣) ،

ل_2 : $\vec{\text{ر}}$ = (−١ ، ٢ ، ١) + ك_2 (١ ، −٢ ، −١)

∴ ل_1 ، ل_2 متقاطعان فى النقطة (−١ ، ٢ ، ١) ، و غير متوازيين

، بالتعويض عن النقطة (−١ ، ٢ ، ١) فى معادلات المستويات نجد أن :

المستقيمان يقعان فى المستوى : ٧ س + ٢ ص + ٣ ع = ٠ لأن :

٧ × (− ١) + ٢ × ٢ + ٤ × ١ = ٠

عوض بالنقطة فى معادلات المستويات الأخرى بنفسك

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١١) أوجد بُعد النقطة (− ٢ ، ٤ ، − ٥) عن المستقيم :

$\frac{\text{س + ٣}}{\text{٣}} = \frac{\text{ص − ٤}}{\text{٥}} = \frac{\text{ع + ٨}}{\text{٦}}$

الحل

بفرض أن : أ (− ٢ ، ٤ ، − ٥) ، ب (− ٣ ، ٤ ، − ٨) " تقع على المستقيم "

∴ أب→ = (−٣ ، ٤ ، −٨) − (−٢ ، ٤ ، −٥) = (−١ ، ٠ ، −٣)

، ∵ هـ→ = (٣ ، ٥ ، ٦) " متجه اتجاه المستقيم "

∴ أب→ × هـ→ = | س→ ص→ ع→ ؛ −١ ٠ −٣ ؛ ٣ ٥ ٦ | = ١٥ س→ − ٣ ص→ − ٥ ع→

∴ ‖ أب→ × هـ→ ‖ = √(٢٢٥ + ٩ + ٢٥) = √٢٥٩

∴ بُعد النقطة = ‖ أب→ × هـ→ ‖ ÷ ‖ هـ→ ‖ = √٢٥٩ ÷ √٧٠ = ١,٩٥ وحدة طول

(١٢) أوجد بُعد النقطة (٢ ، ١ ، −١) عن المستوى :

ر→ • (س→ − ٢ ص→ + ٤ ع→) = ٩

الحل

∵ (س ، ص ، ع) • (١ ، −٢ ، ٤) = ٩

∴ س − ٢ ص + ٤ ع − ٩ = ٠

∴ بُعد النقطة = | ٢ − ٢ − ٤ − ٩ | ÷ √(١ + ٤ + ١٦) = ٢,٨٤ وحدة طول

(١٣) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، −٤ ، −٥) ، (٢ ، −٣ ، ١) مع المستوى المار بالنقط (٢ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، ٠ ، ١) ، (٤ ، −١ ، ٠)

الحل

∵ المستقيم يمر بالنقطتين : (٣ ، −٤ ، −٥) ، (٢ ، −٣ ، ١)

∴ متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، −٤ ، −٥) − (٢ ، −٣ ، ١) = (١ ، −١ ، −٦)

، معادلته هى : ر→ = (٣ ، −٤ ، −٥) + ك (١ ، −١ ، −٦)

أى أن : س = ٣ + ك ، ص = −٤ − ك ، ع = −٥ − ٦ ك (١)

، ∵ المستوى يمر بالنقط : (٢ ، ٢ ، ١) ، (٣ ، ٠ ، ١) ، (٤ ، −١ ، ٠)

∴ معادلة المستوى هى : | س − ٢ ص − ٢ ع − ١ ؛ ٣ − ٢ ٠ − ٢ ١ − ٢ ؛ ٤ − ٢ −١ − ٢ ٠ − ٢ | = ٠

∴ معادلة المستوى هى : | س − ٢ ص − ٢ ع − ١ ؛ ١ −٢ ٠ ؛ ٢ −٣ −١ | = ٠

∴ ٢ (س − ٢) + ١ (ص − ٢) + ١ (ع − ١) = ٠

∴ ٢ س − ٤ + ص − ٢ + ع − ١ = ٠ و منها :

المعادلة العامة للمستوى هى : ٢ س + ص + ع − ٧ = ٠

، بالتعويض من (١) ينتج :

٢ (٣ + ك) + (−٤ − ك) + (−٥ − ٦ ك) − ٧ = ٠

∴ ٦ + ٢ ك − ٤ − ك − ٥ − ٦ ك − ٧ = ٠ و منها : ك = −٢

∴ س = ٣ − ٢ = ١ ، ص = −٤ + ٢ = −٢ ،

ع = −٥ + ١٢ = ٧ ∴ نقطة التقاطع هى : (١ ، −٢ ، ٧)

(١٤) أوجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيم :

ر→ = (٢ ، −١ ، ٢) + ك (٣ ، ٤ ، ٢) مع المستوى :

ر→ • (١ ، −١ ، ١) = ٥

الحل

∵ ر→ = (٢ ، −١ ، ٢) + ك (٣ ، ٤ ، ٢) ، ر→ • (١ ، −١ ، ١) = ٥

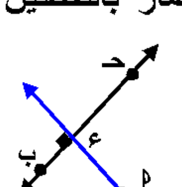
∴ [(٢ ، −١ ، ٢) + ك (٣ ، ٤ ، ٢)] • (١ ، −١ ، ١) = ٥

∴ (٢ + ٣ ك ، −١ + ٤ ك ، ٢ + ٢ ك) • (١ ، −١ ، ١) = ٥

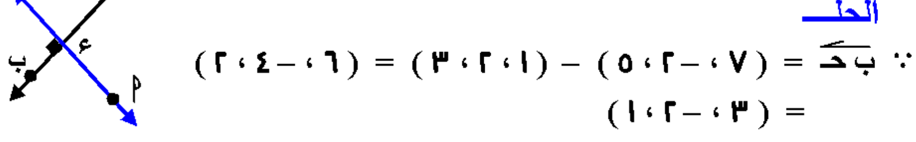
∴ ٢ + ٣ ك + ١ − ٤ ك + ٢ + ٢ ك = ٥

و منها : ل = −١ ∴ نقطة التقاطع هى : (٢ ، −١ ، ٢)

(١٥) أوجد مسقط النقطة أ (٠ ، ٩ ، ٦) على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢ ، ٣) ، حـ (٧ ، −٢ ، ٥)



الحل



∵ $\overrightarrow{\text{بحـ}}$ = (٧ ، −٢ ، ٥) − (١ ، ٢ ، ٣) = (٦ ، −٤ ، ٢)

= (٣ ، −٢ ، ١)

∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ هى : $\vec{ر}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ل (٣ ، −٢ ، ١)

= (١ + ٣ل ، ٢ − ٢ل ، ٣ + ل)

∴ ء مسقط نقطة أ على $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$ = (١ + ٣ل ، ٢ − ٢ل ، ٣ + ل)

∴ $\overrightarrow{\text{أء}}$ = (١ + ٣ل ، ٢ − ٢ل ، ٣ + ل) − (٠ ، ٩ ، ٦)

= (١ + ٣ل ، −٧ − ٢ل ، −٣ + ل) ، ∵ $\overrightarrow{\text{أء}} \perp \overrightarrow{\text{بحـ}}$

∴ (١ + ٣ل ، −٧ − ٢ل ، −٣ + ل) • (٣ ، −٢ ، ١) = ٠

∴ ٣ + ٩ل + ١٤ + ٤ل − ٣ + ل = ٠ و منها : ل = −١

∴ ء = (−٢ ، ٤ ، ٢)

(١٦) أثبت أن المستويين : ٢س + ص + ٢ع = ٨ ، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠ متوازيان ، و أوجد البعد بينهما

الحل

∵ ٢س + ص + ٢ع = ٨ (١) ، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠ (٢)

∴ $\vec{ن_1}$ = (٢ ، ١ ، ٢) ، $\vec{ن_2}$ = (٤ ، ٢ ، ٤)

، (٤ ، ٢ ، ٤) = ٢ (١ ، ٢ ، ٢) ∴ المستويان متوازيان

نفرض أن : س = ٠ ، ص = ٠

، و بالتعويض فى معادلة المستوى الثانى ينتج : ع = ٤

∴ النقطة (٠ ، ٠ ، ٤) تقع على المستوى الثانى

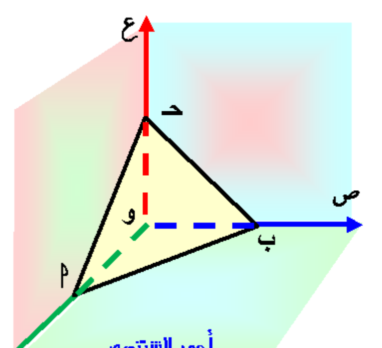
، ∵ (س١ ، ص١ ، ع١) = (٠ ، ٠ ، ٤) ، ٤س + ٢ص + ٤ع + ٥ = ٠

∴ طول العمود = ل = $\frac{|\text{أ}س_1 + \text{ب}ص_1 + \text{حـ}ع_1 + \text{ء}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 + \text{حـ}^2}}$

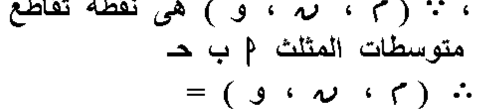
= $\frac{|٠ + ٠ + ١٦ + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}}$ = $\frac{٢١}{٦}$ = $\frac{٧}{٢}$ وحدة طول

(١٧) إذا قطع مستوى محاور الاحداثيات فى النقط : أ ، ب ، حـ ، و كانت النقطة (م ، ن ، و) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ ، أثبت أن : معادلة المستوى هى :

$\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{و} = ٣$



الحل



بفرض أن : احداثيات نقط تقاطع المستوى مع محاور الاحداثيات هى : أ (أ ، ٠ ، ٠)

، ب (٠ ، ب ، ٠) ، حـ (٠ ، ٠ ، حـ)

، ∵ (م ، ن ، و) هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ (م ، ن ، و) =

$\left(\frac{\text{أ} + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + \text{ب} + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + \text{حـ}}{٣}\right)$

و منها : أ = ٣م ، ب = ٣ن ، حـ = ٣و

∴ معادلة المستوى هى : $\frac{س}{٣م} + \frac{ص}{٣ن} + \frac{ع}{٣و} = ١$

و بالضرب × ٣ ينتج : $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ن} + \frac{ع}{و} = ٣$

حل اختبار تراكمى صفحة ١٧٤ بالكتاب المدرسى

أكمل ما يلى :

(١) قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم : $\frac{س - ١}{\sqrt{٢}} = \frac{ص - \sqrt{٢}}{١} = \frac{ع + ١}{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور ع تساوى ....

الحل

∵ هـ = (√٢ ، ١ ، ١) ، هـ٢ = (٠ ، ٠ ، ١)

$∴ حتا\ \theta = \frac{|هـ \cdot هـ_٢|}{||هـ||\ ||هـ_٢||} = \frac{|٠ + ٠ + ١|}{\sqrt{٢+١+١}\ \sqrt{٠+٠+١}} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠°

(٢) طول العمود المرسوم من النقطة (−١ ، ٠ ، ١) على المستقيم : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ١}{١} = \frac{ع + ١}{-١}$ يساوى ....

الحل

بفرض أن : أ (−١ ، ٠ ، ٠) ، ب (١ ، ١ ، −١) تنتمى للمستقيم

∴ أب = (١ ، ١ ، −١) − (−١ ، ٠ ، ١) = (٢ ، ١ ، −٢)

، ∵ هـ = (٢ ، ١ ، −١) متجه اتجاه المستقيم

$∴ أب \times هـ = \begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٢ & ١ & -٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix} = س - ٢ ص$

$∴ ||أب \times هـ|| = \sqrt{١ + ٤ + ٢} = \sqrt{٥}$

$∴ طول\ العمود = \frac{||أب \times هـ||}{||هـ||} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٦}} = ٠,٩١$ وحدة طول

(٣) المعادلات البارامترية لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (−١ ، ٠ ، ٣) ، (١ ، −١ ، ٠) هى ....

الحل

∵ هـ = (١ ، −١ ، ٠) − (−١ ، ٠ ، ٣) = (٢ ، −١ ، −٣)

، المستقيم يمر بالنقطة (−١ ، ٠ ، ٣)

∴ المعادلات البارامترية هى : س = −١ + ٢ ك ، ص = −ك

، ع = ٣ − ٣ ك

(٤) قياس الزاوية بين المستويين : − س − ص + √٢ ع + ١ = ٠ ، س − ص + √٢ ع − ٣ = ٠ يساوى ....

الحل

∵ ن١ = (−١ ، −١ ، √٢) ، ن٢ = (١ ، −١ ، √٢)

$∴ حتا\ \theta = \frac{|ن_١ \cdot ن_٢|}{||ن_١||\ ||ن_٢||} = \frac{|-١ + ١ + ٢|}{\sqrt{١+١+٢}\ \sqrt{١+١+٢}} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠°

(٥) معادلة المستوى المار بالنقطة (٢ ، ٣ ، −١) و المتجه ن = (٥ ، ٢ ، −٣) عمودى على المستوى هى ....

الحل

∵ ن = (٥ ، ٢ ، −٣) ، المستوى يمر بالنقطة (٢ ، ٣ ، −١)

∴ معادلة المستوى هى : ٥ (س − ٢) + ٢ (ص − ٣) − ٣ (ع + ١) = ٠

∴ ٥ س − ١٠ + ٢ ص − ٦ − ٣ ع − ٣ = ٠

أى : ٥ س + ٢ ص − ٣ ع − ١٩ = ٠

(٦) المستوى : ٣ س − ٤ ص + ع + ١٠ = ٠ يقطع من محور ص جزءاً طوله ....

الحل

∵ ٣ س − ٤ ص + ع = − ١٠ ، بالقسمة ÷ (− ١٠) ينتج :

$\frac{س}{-٠,٣} = \frac{ص}{٢,٥} = \frac{ع}{-١٠} = ١$

∴ المستوى يقطع من محور ص جزءاً طوله ٢,٥

(٧) نقطة تقاطع المستقيم : $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{٣}$

و المستوى : س − ٢ ص + ٣ ع + ٥ = ٠ هى ....

الحل

بفرض أن : $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{١} = \frac{ع}{٣} = ك$

∴ س = − ١ + ٢ ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٣ ك

، بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

− ١ + ٢ ك − ٢ (٢ + ك) + ٣ (٣ ك) + ٥ = ٠

∴ − ١ + ٢ ك − ٤ − ٢ ك + ٩ ك + ٥ = ٠ و منها : ك = ٠

∴ نقطة التقاطع هى : (− ١ + ٢ × ٠ ، ٢ + ٠ ، ٣ × ٠) = (− ١ ، ٢ ، ٠)

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(٨) البُعد بين النقطة (٩ ، ب ، حـ) و محور س يساوى ....

(٩) $\sqrt{٩^٢ + حـ^٢}$ (ب) $\sqrt{٩^٢ + ب^٢}$

(حـ) $\sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$ (٤) $\sqrt{ب^٢ - حـ^٢}$

الحل

∵ النقطة (٩ ، ٠ ، ٠) تقع على محور س

∴ البُعد بين النقطة (٩ ، ب ، حـ) و محور س يساوى البُعد بين النقطتين

(٩ ، ٠ ، ٠) ، (٩ ، ب ، حـ) ∴ البُعد = $\sqrt{ب^٢ + حـ^٢}$

(٩) معادلة محور س فى الفراغ هى ....

(٩) س = ٠ ، ص = ٠ (ب) س = ٠ ، ع = ٠

(حـ) ص = ٠ ، ع = ٠ (٤) س = ٠

الحل

معادلة محور س فى الفراغ هى : ص = ٠ ، ع = ٠

(١٠) معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، − ١ ، ٣) ، (٠ ، ٣ ، ١) هى ....

(٩) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، − ١ ، ٣) + ك (٢ ، − ٤ ، ٢)

(ب) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، − ١ ، ٣) + ك (٢ ، ٢ ، ٤)

(حـ) $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، − ٤ ، ٢) + ك (٢ ، − ١ ، ٣)

(٤) $\overrightarrow{ر}$ • (٢ ، − ٤ ، ٤) = صفر

الحل

∵ $\overrightarrow{ى}$ = (٢ ، − ١ ، ٣) − (٠ ، ٣ ، ١) = (٢ ، − ٤ ، ٢)

، المستقيم يمر بالنقطة (٢ ، − ١ ، ٣)

∴ معادلة المستقيم هى : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، − ١ ، ٣) + ك (٢ ، − ٤ ، ٢)

(١١) النقطة التى تقع على المستقيم :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، − ١ ، ٣) + ك (١ ، ٢ ، − ١) هى ....

(٩) (١ ، ١ ، ١) (ب) (٠ ، ٢ ، − ١)

(حـ) (٣ ، ١ ، ٢) (٤) (٤ ، − ٣ ، ٠)

الحل

∵ س = ٢ + ك ، ص = − ١ + ٢ ك ، ع = ٣ − ك

، بالتعويض المباشر عن النقطة (٣ ، ١ ، ٢) نحصل على نفس قيمة ك كما يلى :

٣ = ٢ + ك ، منها : ك = ١ ، ١ = −١ + ٢ك ، منها : ك = ١
، ٢ = ٣ − ك ، منها : ك = ١ ∴ النقطة (٣ ، ١ ، ٢) تقع على المستقيم
عوض بالنقط الأخرى بنفسك

(١٢) المسافة بين المستويين : ص = ٤ ، ص = −٢ هى ....

(أ) ٣ وحدات (ب) وحدتان

(جـ) ٦ وحدات (د) ٨ وحدات

الحل

المسافة بين المستويين = | ٤ − (−٢) | = ٦ وحدات

أجب عن الأسئلة الآتية :

(١٣) أكتب المعادلة الاحداثية لكل من المستقيمات الآتية :

(أ) $\vec{ر} = (١ ، ٣ ، ٩) + ك (٥ ، ٤ ، ٢)$

(ب) المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٢ ، ٠) ، و المتجه $\vec{هـ} = (٣ ، −١ ، ٤)$ متجه اتجاه له :

الحل

(أ) ∵ $\vec{هـ} = (٥ ، ٤ ، ٢)$ ، المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٣ ، ٩)

∴ المعادلة الاحداثية للمستقيم هى : $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص - ٣}{٤} = \frac{ع - ٩}{٢}$

(ب) ∵ $\vec{هـ} = (٣ ، −١ ، ٤)$ ، المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٢ ، ٠)

∴ المعادلة الاحداثية للمستقيم هى : $\frac{س}{٣} = \frac{ص - ٢}{−١} = \frac{ع}{٤}$

(١٤) أوجد قياس الزاوية بين :

(أ) المستقيمين $ل_١$: ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٣

، $ل_٢$: $\vec{ر} = (٢ ، −١ ، ٥) + ك (−١ ، ١ ، ٢)$

(ب) المستويين : ٣س − ص = ٥ ، س − ٢ص = ٤

الحل

(أ) ∵ ٢س = ٣ص − ١ = ع − ٣

∴ $\frac{س}{٣} = \frac{ص - \frac{١}{٣}}{٢} = \frac{ع - ٣}{٦}$

∴ $\vec{هـ_١} = (٣ ، ٢ ، ٦)$ ، $\vec{هـ_٢} = (−١ ، ١ ، ٢)$

∴ $حتا\,\theta = \frac{|\vec{هـ_١} \cdot \vec{هـ_٢}|}{\|\vec{هـ_١}\| \, \|\vec{هـ_٢}\|} = \frac{|−٣ + ٢ + ١٢|}{\sqrt{٩ + ٤ + ٣٦}\,\sqrt{١ + ١ + ٤}}$

$= \frac{١١}{\sqrt{٤٩}\,\sqrt{٦}}$ ∴ $\theta = ٥٠^\circ \; ٦'$

(ب) ∵ $\vec{ن_١} = (٣ ، −١ ، ٠)$ ، $\vec{ن_٢} = (١ ، −٢ ، ٠)$

∴ $حتا\,\theta = \frac{|\vec{ن_١} \cdot \vec{ن_٢}|}{\|\vec{ن_١}\| \, \|\vec{ن_٢}\|} = \frac{|٣ + ٢ + ٠|}{\sqrt{٩ + ١ + ٠}\,\sqrt{١ + ٤ + ٠}}$

$= \frac{٥}{\sqrt{١٠}\,\sqrt{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $\theta = ٤٥^\circ$

(١٥) أوجد المعادلة الاحداثية للمستوى الذى معادلته :

$(س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك_١ (−١ ، ٣ ، ٤)$
$+ ك_٢ (٦ ، ١ ، −٢)$ حيث : $ك_١$ ، $ك_٢$ بارامترات

الحل

∵ $(س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٥) + ك_١ (−١ ، ٣ ، ٤) + ك_٢ (٦ ، ١ ، −٢)$

∴ $س = ٢ - ك_١ + ٦ك_٢$ (١)

، $ص = ٣ + ٣ك_١ + ك_٢$ (٢)

، $ع = ٥ + ٤ك_١ - ٢ك_٢$ (٣)

بضرب (١) × ٣ ، جمعها مع (٢) ينتج : $٣ س + ص = ٩ + ١٩ ل_٢$

$\therefore ل_٢ = \frac{٣}{١٩} س + \frac{١}{١٩} ص - \frac{٩}{١٩}$ (٤)

بضرب (٢) × (−٦) ، جمعها مع (١) ينتج : $س - ٦ ص = -١٦ - ١٩ ل_١$

$\therefore ل_١ = -\frac{١}{١٩} س + \frac{٦}{١٩} ص - \frac{١٦}{١٩}$ (٥)

بالتعويض فى (٣) ينتج :

$$ع = ٥ + ٤ \times \left(-\frac{١}{١٩} س + \frac{٦}{١٩} ص - \frac{١٦}{١٩}\right) - ٢ \times \left(\frac{٣}{١٩} س + \frac{١}{١٩} ص - \frac{٩}{١٩}\right)$$

بالضرب × ١٩ ينتج :

$$١٩ ع = ٩٥ - ٤ س + ٢٤ ص - ٦٤ - ٦ س - ٢ ص + ١٨$$

∴ معادلة المستوى هى : $١٠ س - ٢٢ ص + ١٩ ع - ٤٩ = ٠$

(١٦) أوجد قياس الزاوية بين المستويين :

$$٢ س + ٢ ص + ٧ ع = ٨ \quad ، \quad ٣ س - ٤ ص + ٤ ع = ٥$$

الحل

$\because \overrightarrow{ن_١} = (٢ ، ٢ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (٣ ، -٤ ، ٤)$

$$\therefore حتا\ \theta = \frac{|\overrightarrow{ن_١} \cdot \overrightarrow{ن_٢}|}{||\overrightarrow{ن_١}||\ ||\overrightarrow{ن_٢}||} = \frac{|٦ - ٨ + ٢٨|}{\sqrt{٤ + ٤ + ٤٩}\ \sqrt{٩ + ١٦ + ١٦}}$$

$$= \frac{٢٦}{\sqrt{٥٧}\ \sqrt{٤١}} \qquad \therefore \theta = ٥٧^\circ\ ٢٨'$$

اجابة أسئلة الاختبارات الخاصة بالوحدة

الاختبار الأول

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٥) إذا كان $ل_١ : \frac{س - ٣}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$ يوازى $ل_٢ : \frac{س + ٥}{-٢} = \frac{ص}{ل + ١} = \frac{ع - ١}{٨}$ فإن : ل = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحل

$\because ل_١ \parallel ل_٢ \quad \therefore \frac{١}{-٢} = \frac{-٢}{ل + ١} = \frac{-٤}{٨}$

$\therefore ل + ١ = ٤$ و منها : $ل = ٣$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٦) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، −١ ، ٤) ، ب (−١ ، ٠ ، ٢) هى ....

الحل

$\because \overrightarrow{أب} = (-١ ، ٠ ، ٢) - (٢ ، -١ ، ٤) = (-٣ ، ١ ، -٢)$

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{س - ٢}{-٣} = \frac{ص + ١}{١} = \frac{ع - ٤}{-٢}$

السؤال الثالث :

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

$$\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ ص - ١}{٥} = \frac{٣ ع + ٢}{٤}$$

الحل

نفرض أن : $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{٢ ص - ١}{٥} = \frac{٣ ع + ٢}{٤} = ل$

∴ $\frac{\text{س} + ٣}{٢} = \text{ك}$ و منها : $\text{س} = -٣ + ٢\text{ك}$

، $\frac{٢\text{ص} - ١}{٥} = \text{ك}$ و منها : $\text{ص} = \frac{١}{٢} + \frac{٥}{٢}\text{ك}$

، $\frac{٣\text{ع} + ٢}{٤} = \text{ك}$ و منها : $\text{ع} = -\frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣}\text{ك}$

، $\vec{\text{ر}} = (-٣ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{٢}{٣}) + \text{ك}\,(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣})$

، $\frac{\text{س} + ٣}{٢} = \frac{\text{ص} - \frac{١}{٢}}{\frac{٥}{٢}} = \frac{\text{ع} + \frac{٢}{٣}}{\frac{٤}{٣}}$

السؤال الخامس :

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستويات : $٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = -١$ ، $\text{س} + \text{ص} + \text{ع} - ٢ = ٠$ ، $٣\text{س} - \text{ص} - \text{ع} = ٦$

الحل

$٢\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = -١$ (١) ، $\text{س} + \text{ص} + \text{ع} = ٢$ (٢)

، $٣\text{س} - \text{ص} - \text{ع} = ٦$ (٣)

بجمع (٢) ، (٣) ينتج : $٤\text{س} = ٨$ ∴ $\text{س} = ٢$

بجمع (١) ، (٢) ينتج : $٣\text{س} + ٢\text{ص} = ١$ (٤)

بالتعويض عن قيمة س ينتج : $٦ + ٢\text{ص} = ١$ ∴ $٢\text{ص} = -٥$

و منها : $\text{ص} = -\frac{٥}{٢}$ بالتعويض فى (٢) ينتج : $\text{ع} = \frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستويات هى : $(٢ ، -\frac{٥}{٢} ، \frac{٥}{٢})$

الاختبار الثانى

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٦) إذا كان $\text{ل}_١ : \frac{\text{س} - ٣}{٢} = \frac{-\text{ص} - ١}{٦} = \frac{\text{ع}}{\text{ك}}$ يوازى $\text{ل}_٢ : \frac{\text{س} + ٢}{٦} = \frac{\text{ص} - ٤}{\text{م}} = \frac{\text{ع} - ١}{٣}$ فإن $\text{ك} + \text{م} = ...$

(أ) -١٧ (ب) -١٠ (جـ) ١٠ (د) ١٧

الحل

∵ ميل $\text{ل}_١\,(\vec{\text{هـ}}_١) = (٢ ، -٦ ، \text{ك})$ ، ميل $\text{ل}_٢\,(\vec{\text{هـ}}_٢) = (٦ ، \text{م} ، ٣)$

، $\text{ل}_١ \parallel \text{ل}_٢$ ∴ $\frac{٢}{٦} = \frac{-٦}{\text{م}} = \frac{\text{ك}}{٣}$ و منها :

$٢\text{م} = -٣٦$ ∴ $\text{م} = -١٨$ ، $٦\text{ك} = ٦$ ∴ $\text{ك} = ١$

∴ $\text{ك} + \text{م} = -١٨ + ١ = -١٧$

حل آخر

∵ $\text{ل}_١ \parallel \text{ل}_٢$ ∴ $\vec{\text{هـ}}_١ = \text{ن}\,\vec{\text{هـ}}_٢$ ∴ $(٢ ، -٦ ، \text{ك}) = \text{ن}\,(٦ ، \text{م} ، ٣)$

∴ $٢ = ٦\text{ن}$ و منها : $\text{ن} = \frac{١}{٣}$

، $-٦ = \text{ن}\,\text{م}$ ∴ $-٦ = \frac{١}{٣}\text{م}$ و منها : $\text{م} = -١٨$

، $\text{ك} = ٣\text{ن}$ ∴ $\text{ك} = ٣ \times \frac{١}{٣}$ و منها : $\text{ك} = ١$

∴ $\text{ك} + \text{م} = -١٨ + ١ = -١٧$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٥) إذا كان : المستوى $٣\text{س} - \text{ص} + ٢\text{ع} + ٣ = ٠$ ، المستوى $\text{ك}\,\text{س} - ٤\text{ص} + \text{ع} - ٥ = ٠$ متعامدان فإن : قيمة $\text{ك} = ...$

الحل

∵ متجها الاتجاه العموديين على المستويين هما :

$\overrightarrow{ن_١} = (٣ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ن_٢} = (ك ، -٤ ، ١)$

∵ المستويان متعامدان ∴ $\overrightarrow{ن_١} \bullet \overrightarrow{ن_٢} = ٠$

∴ $(٣ ، -١ ، ٢) \bullet (ك ، -٤ ، ١) = ٠$

∴ $٣ك + ٤ + ٢ = ٠$ ∴ $٣ك = -٦$ ∴ $ك = -٢$

السؤال الثالث :

(٢) أثبت أن : المستقيم $\frac{س - ١}{٣} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى $٣س + ٢ص + ع - ٨ = ٠$ فى نقطة ثم أوجد زاوية ميل المستقيم على المستوى

الحل

نفرض أن : $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص + ٣}{-١} = \frac{ع}{٣} = ك$

∴ $س = ١ + ٢ك$ ، $ص = -٣ - ك$ ، $ع = ٣ك$

بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

$٣(١ + ٢ك) + ٢(-٣ - ك) + ٣ك - ٨ = ٠$

∴ $٣ + ٦ك - ٦ - ٢ك + ٣ك - ٨ = ٠$ ∴ $٧ك = ١١$ ∴ $ك = \frac{١١}{٧}$

∴ $س = ١ + ٢ \times \frac{١١}{٧} = \frac{٢٩}{٧}$ ، $ص = -٣ - \frac{١١}{٧} = -\frac{٣٢}{٧}$

، $ع = ٣ \times \frac{١١}{٧} = \frac{٣٣}{٧}$ ∴ نقطة التقاطع هى $(\frac{٢٩}{٧} ، -\frac{٣٢}{٧} ، \frac{٣٣}{٧})$

متجه الاتجاه العمودى على المستوى = (٣ ، ٢ ، ١)

، متجه اتجاه المستقيم = (٢ ، -١ ، ٣)

بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيم و العمودى على المستوى = θ

∴ $حتا\ \theta = \frac{(٣ ، ٢ ، ١) \bullet (٢ ، -١ ، ٣)}{\sqrt{١٤}\ \sqrt{١٤}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = ٦٠°$

∴ قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى = $٩٠° - ٦٠° = ٣٠°$

الاختبار الثالث

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة أ (٣ ، ٠ ، -٥) على المستوى $٢س + \sqrt{٥}\ ص + ٤ع - ٦ = ٠$ يساوى ....

(أ) ٤   (ب) ٥   (جـ) ١٦   (د) ٧

الحل

طول العمود $= \frac{| ٢ \times ٣ + \sqrt{٥} \times ٠ + ٤ \times (-٥) - ٦ |}{\sqrt{٢ + ٥ + ١٦}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٥) إذا كان : المستقيم $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ك}$ يوازى المستقيم $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ فإن : $ك + م = ...$

الحل

∵ المستقيمان متوازيان ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{-٦}{م} = \frac{ك}{٣}$ و منها :

$٢م = -٢٤$ ∴ $م = -١٢$ ، $٤ك = ٦$ ∴ $ك = ١,٥$

∴ $ك + م = -١٢ + ١,٥ = -١٠,٥$

(٦) إذا كان : المستقيم (س + ٢)/٦ = (ص − ١)/م = (ع − ١)/٣ عمودى على المستقيم (س − ٩)/(−٢) = (ص + ٨)/١ ، ع = ٣ فإن : م = ...

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (٦ ، م ، ٣) ، (−٢ ، ١ ، ٠)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (٦ ، م ، ٣) • (−٢ ، ١ ، ٠) = ٠

∴ −١٢ + م = ٠ ∴ م = ١٢

السؤال الرابع :

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (−٢ ، ٣ ، ١) على المستقيم (س + ٢)/٢ = (ص − ٣)/٤ = (ع − ١)/٤

الحل

نفرض أن : (س + ٢)/٢ = (ص − ٣)/٤ = (ع − ١)/٤ = ك

∴ (س + ٢)/٢ = ك و منها : س = −٢ + ٢ك

، (ص − ٣)/٤ = ك و منها : ص = ٣ + ٤ك

، (ع − ١)/٤ = ك و منها : ع = ١ + ٤ك

∴ ر = (−٢ ، ٣ ، ١) + ك (٢ ، ٤ ، ٤)

∴ النقطة (−٢ ، ٣ ، ١) تقع على المستقيم ∴ طول العمود = صفر

الاختبار الرابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(٤) إذا كان ل١ : (س + ٢)/(−١) = (ص + ٣)/٣ = (ع + ٥)/٢ عمودى على ل٢ : س/٢ = (ص − ٥)/ك = (ع − ٦)/م فإن : ٣ك + ٢م = ...

(أ) −١ (ب) ٠ (جـ) ٢ (د) ٤

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (−١ ، ٣ ، ٢) ، (٢ ، ك ، م)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (−١ ، ٣ ، ٢) • (٢ ، ك ، م) = ٠

∴ −٢ + ٣ك + ٢م = ٠ ∴ ٣ك + ٢م = ٢

(٥) قياس الزاوية بين المستقيمين س − ١ = (ص + ٢)/√٢ = −ع + ١ ، −س = ع + ٣ ، ص = ٤ يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

الحل

∵ (س − ١)/١ = (ص + ٢)/√٢ = (ع − ١)/(−١) ، س/(−١) = (ع + ٣)/١ ، ص = ٤

∴ متجها اتجاه المستقيمان هما : (١ ، √٢ ، −١) ، (−١ ، ١ ، ٠)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ

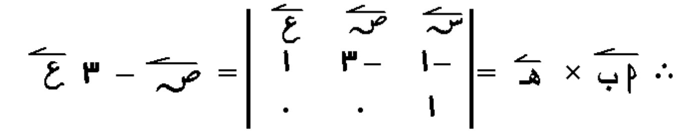
∴ حتا θ = |(١ ، √٢ ، −١) • (−١ ، ١ ، ٠)| / (√٤ √٢) = |−٢| / (٢√٢) = ١/√٢

∴ θ = ٤٥°

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٣ ، ١) على محور س يساوى ....

الحل

بفرض أن : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (−٢ ، −٣ ، ١)



∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = (-٢ ، -٣ ، ١) - (١ ، ٠ ، ٠) = (-١ ، -٣ ، ١)$

، ∵ $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{س}} = (١ ، ٠ ، ٠)$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & -٣ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{ص}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\| = \sqrt{٠ + ١ + ٩} = \sqrt{١٠}$

∴ طول العمود $= \dfrac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|} = \dfrac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١}} = \sqrt{١٠}$ وحدة طول

الاختبار الخامس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٠ ، ٢) على المستقيم $\dfrac{\text{س} - ٢}{٢} = \dfrac{\text{ص} + ١}{-١} = \dfrac{\text{ع} - ٣}{-٢}$ يساوى ....

(أ) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٤}$ (ب) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٥}$ (حـ) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٣}$ (ء) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٦}$

الحل

بفرض أن : أ (٢ ، −١ ، ٣) ، ب (١ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = (١ ، ٠ ، ٢) - (٢ ، -١ ، ٣) = (-١ ، ١ ، -١)$

، ∵ $\overrightarrow{\text{هـ}} = (٢ ، -١ ، -٢)$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ١ & -١ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{vmatrix} = (-٣ ، -٤ ، -١)$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١} = \sqrt{٢٦}$

∴ طول العمود $= \dfrac{\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{هـ}}\|}{\|\overrightarrow{\text{هـ}}\|} = \dfrac{\sqrt{٢٦}}{\sqrt{٩}} = \dfrac{\sqrt{٢٦}}{٣}$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) جيب تمام الزاوية المحصورة بين المستقيمين :

$\dfrac{\text{س}}{١} = \dfrac{\text{ص}}{-٢} = \dfrac{\text{ع} + ١}{-٢}$ ، $\dfrac{\text{س}}{١} = \dfrac{\text{ص} - ٢}{-٢} = \dfrac{\text{ع}}{٢}$

يساوى ....

الحل

متجه اتجاه المستقيمين هما : (١ ، −٢ ، −٢) ، (١ ، −٢ ، ٢)

بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ

∴ $\text{حتا}\,\theta = \dfrac{|(١ ، -٢ ، -٢) \bullet (١ ، -٢ ، ٢)|}{\sqrt{١ + ٤ + ٤}\,\sqrt{١ + ٤ + ٤}} = \dfrac{١}{٩}$

(٦) الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، −١ ، ٤) و متجه اتجاهه $\overrightarrow{\text{هـ}} = (٤ ، ٧ ، ١)$ هى ....

الحل

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : $\overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، -١ ، ٤) + \text{ك}\,(٤ ، ٧ ، ١)$

السؤال الثالث :

(٢) إذا كان : طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، −١ ، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}\,\text{س} + \text{ص} - \text{ع} + \text{ك} = ٠$ يساوى ٢ وحدة طول

أوجد قيمة ك

الحل

$\because$ طول العمود $= \dfrac{|\,٠ \times \sqrt{٢} - ١ \times ١ + ٢ \times -١ + ل\,|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$ $\therefore ٢ = \dfrac{|-٣ + ل|}{٢}$

$\therefore |-٣ + ل| = ٤$ $\therefore -٣ + ل = ٤$ و منها : ل $= ٧$

أو $-٣ + ل = -٤$ و منها : ل $= -١$

السؤال الخامس :

(٢) إذا قطع المستوى : ٢ س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة :

$(س + ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل

المستوى يقطع الكرة التى مركزها م

فى دائرة مركزها ن حيث : م (−٣ ، −٢ ، ١)

و يكون : ن أ = طول نصف قطر الدائرة

، متجه الاتجاه العمودى على المستوى (٢ ، −١ ، −٢)

$\therefore$ م ن = طول العمود المرسوم من م على المستوى

$= \dfrac{|\,٢ \times (-٣) - ١ \times (-٢) - ٢ \times ١ + ١٢\,|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}} = \dfrac{|-٦ + ٢ - ٢ + ١٢|}{\sqrt{٩}}$

$= \frac{٦}{٣} = ٢$ وحدة طول

، م أ = طول نصف قطر الكرة $= \sqrt{١٥}$ وحدة طول

من هندسة الشكل :

$(أ ن)^٢ = (أ م)^٢ - (م ن)^٢ = ١٥ - ٤ = ١١$

$\therefore$ أ ن $= \sqrt{١١}$ وحدة طول ، مساحة الدائرة $= \pi$ نق$^٢ = ١١\pi$ وحدة مربعة

الاختبار السادس

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س + ص − ١ = ٠ ، ص + ع − ١ = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠° (ء) ٧٥°

الحل

$\because$ متجه الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما : (١ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ١) ، بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين $= \theta$

$\therefore$ حتا $\theta = \dfrac{|(١،١،٠) \bullet (٠،١،١)|}{\sqrt{١ + ١ + ٠}\,\sqrt{٠ + ١ + ١}} = \frac{١}{٢}$ $\therefore \theta = ٦٠^\circ$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) متجه اتجاه المستقيم : $\dfrac{س + ٢}{٣} = \dfrac{ع - ١}{٢}$ يساوى ....

الحل

متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، ٠ ، ٢)

(٤) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\dfrac{س}{أ} = \dfrac{ص}{٢} = \dfrac{ع}{١}$ ، $\dfrac{س}{٢} = \dfrac{ص}{١} = \dfrac{ع}{-١}$ يساوى ٦٠° فإن : قيمة أ = ... يساوى = ...

الحل

$\because$ متجها اتجاه المستقيمين هما : (أ ، ٢ ، ١) ، (٢ ، ١ ، −١)

، بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين $= \theta$ $\therefore$ حتا θ = حتا $٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{١}{٢} = \dfrac{|(أ،٢،١) \bullet (٢،١،-١)|}{\sqrt{أ^٢ + ٤ + ١}\,\sqrt{٤ + ١ + ١}}$ و منها بالتربيع ينتج :

$\text{٤ (٢ أ + ١)}^{٢} = \text{٦ (أ}^{٢} \text{+ ٥)}$ ∴ $\text{١٦ أ}^{٢} \text{+ ١٦ أ + ٤ = ٦ أ}^{٢} \text{+ ٣٠}$

∴ $\text{١٠ أ}^{٢} \text{+ ١٦ أ − ٢٦ = ٠}$ ∴ $\text{٥ أ}^{٢} \text{+ ٨ أ − ١٣ = ٠}$

∴ (أ − ١) (٥ أ + ١٣) = ٠ ∴ أ = ١ أو أ = − $\frac{\text{١٣}}{\text{٥}}$

(٥) إذا كان : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١) ينتميان للمستوى
ل س + ص + م ع + ٢ = ٠ فإن : ل + م = ...

الحل

∵ أ تنتمى للمستقيم ∴ بالتعويض ينتج : ل + ٢ = ٠ ∴ ل = − ٢

، ∵ ب تنتمى للمستقيم ∴ بالتعويض ينتج : ١ + م + ٢ = ٠

∴ م = − ٣ ∴ ل + م = − ٥

السؤال الثالث :

(٢) كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى
س + ص + ع = ١ أوجد معادلة الكرة

الحل

∵ الكرة تمس المستوى

∴ نق (طول نصف قطر الكرة) = طول العمود المرسوم من مركز الكرة على المستوى

∴ نق = $\frac{|\text{١ × ١ + ٢ × ١ + ١ × ١ − ١}|}{\sqrt{\text{١ + ١ + ١}}} = \frac{\text{٣}}{\sqrt{\text{٣}}} = \sqrt{\text{٣}}$

∴ معادلة الدائرة هى : $\text{(س − ١)}^{٢} \text{+ (ص − ٢)}^{٢} \text{+ (ع − ١)}^{٢} \text{= ٣}$

السؤال الخامس :

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١ ، − ٣)
و يوازى المستقيم $\frac{\text{س − ١}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص + ٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{١ − ع}}{\text{٣}}$

الحل

معادلة المستقيم المعطى هى : $\frac{\text{س − ١}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص + ٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع − ١}}{\text{− ٣}}$

∵ المستقيم المطلوب // المستقيم المعطى

∴ ميل المستقيم المطلوب = ميل المستقيم المعطى = (٥ ، ٢ ، − ٣)

، ∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، − ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هى :

$\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، ١ ، − ٣) + ك (٥ ، ٢ ، − ٣)

و المعادلات البارامترية هى : س = ٢ + ٥ ك ، ص = ١ + ٢ ك
، ع = − ٣ − ٣ ك

و المعادلة الإحداثية هى : $\frac{\text{س − ٢}}{\text{٥}} = \frac{\text{ص − ١}}{\text{٢}} = \frac{\text{ع + ٣}}{\text{− ٣}}$

الاختبار السابع

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) طول العمود المرسوم بين المستويين ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = ٩
، ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = − ١٧ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (ء) ٥

الحل

بفرض نقطة تنتمى للمستوى الأول بوضع : ص = ٠ ، ع = ٠ .

∴ س = ٣ ∴ النقطة أ (٣ ، ٠ ، ٠) تنتمى للمستوى الأول

و يكون طول العمود المرسوم بين المستويين = طول العمود من أ على المستوى
الثانى = $\frac{|\text{٣ × ٣ + ١٢ × ٠ − ٤ × ٠ + ١٧}|}{\sqrt{\text{٩ + ١٤٤ + ١٦}}} = \frac{\text{٢٦}}{\text{١٣}}$ = ٢ وحدة طول

٥) إذا كان : المستقيم س = ٣ ص = م ع يوازى المستوى
س + ٣ ص + ٢ ع + ٤ = ٠ فإن : م = ...

(م) ٣ (ب) ٢ (حـ) ١ (ء) – ١

الحل

معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{س}}{\text{٣ م}} = \frac{\text{ص}}{\text{م}} = \frac{\text{ع}}{\text{٣}}$

∴ متجه اتجاه المستقيم = (٣ م ، م ، ٣) ،

متجه اتجاه العمودى على المستوى = (١ ، ٣ ، ٢)

، ∵ المستقيم // المستوى

∴ متجه اتجاه المستقيم ⊥ متجه اتجاه العمودى على المستوى

∴ (٣ م ، م ، ٣) • (١ ، ٣ ، ٢) = ٠

∴ ٣ م + ٣ م + ٦ = ٠ ∴ ٦ م = – ٦ و منها : م = – ١

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) إذا كان : المستوى سه١ : س – ع + ١ = ٠ و المستوى
سه٢ : ٢ س – ٢ ص – ع = ٠ فإن : قياس الزاوية بين
المستويين = ... °

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

(١ ، ٠ ، – ١) ، (٢ ، – ٢ ، – ١)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ حتا θ = $\frac{|(\text{١ ، ٠ ، – ١}) \bullet (\text{٢ ، – ٢ ، – ١})|}{\sqrt{\text{١ + ٠ + ١}}\ \sqrt{\text{٤ + ٤ + ١}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٣}\sqrt{\text{٢}}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$

∴ θ = ٤٥°

السؤال الخامس :

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى
س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢

الحل

∵ س = ص = ع بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ س + ٢ س + ٣ س = ١٢ ∴ ٦ س = ١٢ ∴ س = ٢

∴ ص = ٢ ، ص = ٢ ∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٢ ، ٢)

الاختبار الثامن

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين :

ر→ = (– ٢ ، ٥ ، – ٧) + ك (– ٦ ، ٦ ، ٨) ،

ر→ = (١ ، – ٢ ، ٣) + ك (٤ ، ١٢ ، – ٦) يساوى ....

الحل

متجها اتجاه المستقيمين هما : (– ٦ ، ٦ ، ٨) ، (٤ ، ١٢ ، – ٦)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ حتا θ = $\frac{|\text{– ٢٤ + ٧٢ – ٤٨}|}{\sqrt{\text{٣٦ + ٣٦ + ٦٤}}\ \sqrt{\text{١٦ + ١٤٤ + ٣٦}}}$ = صفر ∴ θ = ٩٠°

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٦) إذا كان ل١ : س = ٠ ، ص = ع ، ل٢ : ص = ٠ ، س = ع

مستقيمان فى الفراغ قياس الزاوية بينهما θ فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (حـ) ١٥٠° (ء) ١٦٥°

الحل

متجها اتجاه المستقمين هما : (٠ ، ١ ، ١) ، (١ ، ٠ ، ١)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ حتا θ = |(٠ ، ١ ، ١) • (١ ، ٠ ، ١)| ÷ (√٢ √٢) = ١/٢ ∴ θ = ٦٠°

السؤال الثالث :

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستويات : ٢س + ص − ع = −١ ،

س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٣س − ص − ع = ٦

الحل

٢س + ص − ع = −١ (١) ، س + ص + ع = ٢ (٢)

، ٣س − ص − ع = ٦ (٣)

بجمع (٢) ، (٣) ينتج : ٤س = ٨ ∴ س = ٢

بجمع (١) ، (٢) ينتج : ٣س + ٢ص = ١ (٤)

بالتعويض عن قيمة س ينتج : ٦ + ٢ص = ١ ∴ ٢ص = −٥

و منها : ص = −٥/٢ بالتعويض فى (٢) ينتج : ع = ٥/٢

∴ نقطة تقاطع المستويات هى : (٢ ، −٥/٢ ، ٥/٢)

الاختبار التاسع

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٥) إذا كان المستويان : س + ٢ص + ك ع = ٢ ،

٣س − ص + ٢ع + ٤ = ٠ متعامدان فإن : ك = ...

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

(١ ، ٢ ، ك) ، (٣ ، −١ ، ٢) ∵ المستويان متعامدان

∴ (١ ، ٢ ، ك) • (٣ ، −١ ، ٢) = ٠

∴ ٣ − ٢ + ٢ك = ٠ ومنها : ك = −١/٢

السؤال الثالث :

(٢) إذا مر المستوى : ٢أ س − ٣أ ص + ٤أ ع + ٦ = ٠

بمنتصف القطعة المستقيمة المارة بين مركزى الكرتين :

س² + ص² + ع² + ٦س − ٨ص − ٢ع = ١٣ ،

س² + ص² + ع² − ١٠س + ٤ص − ٢ع = ٨ فما قيمة أ

الحل

مركز الكرة الأولى : م١ = (−٣ ، ٤ ، ١)

مركز الكرة الثانية : م٢ = (٥ ، −٢ ، ١)

إحداثيات منتصف م١م٢ = ((−٣ + ٥)/٢ ، (٤ − ٢)/٢ ، (١ + ١)/٢)

= (١ ، ١ ، ١)

و هى تنتمى للمستوى أى تحقق معادلته ، و بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

٢أ × ١ − ٣أ × ١ + ٤أ × ١ + ٦ = ٠

∴ ٢أ − ٣أ + ٤أ + ٦ = ٠ ∴ ٣أ + ٦ = ٠ ∴ أ = −٢

السؤال الخامس :

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤ ، ١ ، ١) على المستقيم

$$\frac{س + ٣}{١} = \frac{ص - ١}{\sqrt{٥}} = \frac{ع + ٢}{٢}$$

الحل

بفرض أن : أ (−٣ ، ١ ، −٢) ، ب (−٤ ، ١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = (−٤ ، ١ ، ١) − (−٣ ، ١ ، −٢) = (−١ ، ٠ ، ٣)

، ∵ $\overrightarrow{هـ}$ = (٢ ، −١ ، −٢)

$$∴ \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -١ & ٠ & ٣ \\ ١ & \sqrt{٥} & ٢ \end{vmatrix} = (-٣\sqrt{٥} ، ٥ ، -\sqrt{٥})$$

$$∴ \| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ} \| = \sqrt{٤٥ + ٢٥ + ٥} = \sqrt{٧٥}$$

$$∴ \text{طول العمود} = \frac{\| \overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{هـ} \|}{\| \overrightarrow{هـ} \|} = \frac{\sqrt{٧٥}}{\sqrt{١٠}} = \frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$$

الاختبار العاشر

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(٥) إذا كان : المستوى س − ٣ ص + م ع = ٥ ، المستوى ٣ س + ك ص + ٦ ع = ١٠ متوازيان فإن : ك × م = ...

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما (١ ، −٣ ، م) ، (٣ ، ك ، ٦) ∵ المستويان متوازيان

$$∴ \frac{١}{٣} = \frac{-٣}{ك} = \frac{م}{٦}$$ ∴ ك = −٩ ، م = ٢ ∴ ك × م = −١٨

(٦) طول العمود المحصور بين المستويين المتوازيين

٤ س + ٦ ص + ١٢ ع + ١٨ = ٠ ،

٤ س + ٦ ص + ١٢ ع − ١٠ = ٠ يساوى ....

الحل

نفرض نقطة تقع على المستوى الأول بوضع : س = ٠ ، ع = ٠

∴ ص = −٣ ، أ (٠ ، −٣ ، ٠) تقع على المستوى الأول

∴ طول العمود المحصور بين المستويين = طول العمود المرسوم من أ على المستوى الثانى

$$= \frac{|٤ \times ٠ - ٦ \times ٣ + ١٢ \times ٠ - ١٠|}{\sqrt{١٦ + ٣٦ + ١٤٤}} = \frac{٢٨}{١٤} = ٢ \text{ وحدة طول}$$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(٣) إذا كان المستقيمان : $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٤}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{ع - ١}{ك}$ متعامدان فإن : ك = ...

(أ) ٤ (ب) − ٤ (حـ) $\frac{٩}{٢}$ (ء) − $\frac{٩}{٢}$

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (٢ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٤ ، ك)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (٢ ، ٣ ، ٤) • (٣ ، ٤ ، ك) = ٠

∴ ٦ + ١٢ + ٤ ك = ٠ ∴ ك = − $\frac{٩}{٢}$

(٥) قياس الزاوية بين المستويين : س + $\sqrt{٢}$ ص − ع = ٥ ، س − $\sqrt{٢}$ ص + ع = ١ يساوى ....

(أ) ٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٩٠° (ء) ١٣٥°

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

(١ ، $\sqrt{٢}$ ، − ١) ، (١ ، − $\sqrt{٢}$ ، ١)

نفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ حتا θ = $\frac{|(١ ، \sqrt{٢} ، -١) \bullet (١ ، -\sqrt{٢} ، ١)|}{\sqrt{١+٢+١}\ \sqrt{١+٢+١}}$ = $\frac{٠}{٤}$ = صفر

∴ θ = ٩٠°

السؤال الرابع :

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، − ١ ، ٠) و يقطع المستقيم $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ١ ، ١) + ك (١ ، ٢ ، − ١) على التعامد

الحل

نفرض أن : المستقيمين يتقاطعين فى نقطة حـ

∴ من معادلة المستقيم المعطى تكون إحداثيات نقطة حـ هى :

(٢ + ك ، ١ + ٢ ك ، ١ − ك)

، ∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة أ (٣ ، − ١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{حـ أ}$ = (٣ ، − ١ ، ٠) − (٢ + ك ، ١ + ٢ ك ، ١ − ك)

= (١ − ك ، − ٢ − ٢ ك ، − ١ + ك)

، ∵ متجه اتجاه المستقيم المعطى = (١ ، ٢ ، − ١) ، المستقيمان متعامدان

∴ (١ − ك ، − ٢ − ٢ ك ، − ١ + ك) • (١ ، ٢ ، − ١) = ٠

∴ ١ − ك − ٤ − ٤ ك + ١ − ك = ٠ ∴ ٦ ك = − ٢ ∴ ك = − $\frac{١}{٣}$

∴ $\overrightarrow{حـ أ}$ = ($\frac{٤}{٣}$ ، − $\frac{٤}{٣}$ ، − $\frac{٤}{٣}$) = (١ ، − ١ ، − ١)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : $\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، − ١ ، ٠) + ك (١ ، − ١ ، − ١)





اجابات اختبارات الجبر و الهندسة الفراغية

الاختبار الأول

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{ن}ق_{ن-٣} = ٢٠$ فإن : ن = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (د) ٦

الحل

∵ $^{ن}ق_{ن-٣} = ٢٠$ ∴ $^{ن}ق_{٣} = ٢٠$ ∴ $^{ن}ل_{٣} = ٢٠ \times \underline{|٣}$

∴ $^{ن}ل_{٣} = ١٢٠ = {}^{٦}ل_{٣}$ ∴ ن = ٦

(٢) ت + $ت^٢$ + $ت^٣$ + ... + $ت^{١٠٠}$ = ...

(أ) صفر (ب) ١ (حـ) ٢ (د) ١٠٠

الحل

المقدار = (ت + $ت^٢$ + $ت^٣$ + $ت^٤$) + ... + $ت^{١٠٠}$

= (ت − ١ − ت + ١) + (ت − ١ − ت + ١) + ... إلى ٢٥ حداً

= صفر + صفر + ... إلى ٢٥ حداً = صفر

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ت ، أساسها ر = ت

، حدها الأخير ل = $ت^{١٠٠}$ = $(ت^٤)^{٢٥}$ = ١

∴ $حـ_{١٠٠} = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} = \frac{١ \times ت - ت}{ت - ١} = \frac{صفر}{ت - ١}$ = صفر

(٣) إذا كان : أ (٧ ، −١ ، ٨) ، ب (١١ ، ٢ ، −٤) فإن :

طول $\overline{أ ب}$ = ... سم

(أ) ١٠ (ب) ١١ (حـ) ١٢ (د) ١٣

الحل

$(أ ب)^٢ = (١١ - ٧)^٢ + (٢ + ١)^٢ + (−٤ − ٨)^٢ = ١٦ + ٩ + ١٤٤$

∴ $(أ ب)^٢ = ١٦٩$ ∴ طول $\overline{أ ب}$ = ١٣ سم

(٤) إذا كان : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤ س - ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠$

معادلة كرة طول قطرها = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٠ (حـ) ١٥ (د) ٢٠

الحل

∵ معادلة الكرة هى : $س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٤ س - ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠$

∴ مركز الكرة ($-\frac{١}{٢}$ معامل س ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ص ، $-\frac{١}{٢}$ معامل ع)

= (−٢ ، ٣ ، −٤)

، $نق^٢ = (−١)^٢ + (٣)^٢ + (−٤)^٢ − ٤ = ٢٥$ ∴ نق = ٥

∴ طول قطر الكرة = ١٠

حل آخر

نكتب معادلة الكرة على الصورة القياسية باستخدام إكمال المربع كما يلى :

($س^٢$ + ٤ س + ٤) + ($ص^٢$ − ٦ ص + ٩) + ($ع^٢$ + ٨ ع + ١٦) + ٤

− (٤ + ٩ + ١٦) = ٠

∴ $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ + (ع + ٤)^٢ = ٢٥$

∴ نق = ٥ ∴ طول قطر الكرة = ١٠

(٥) إذا كان $ل_١$: $\frac{س - ١}{١} = \frac{ص + ٢}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٤}$ يوازى

$ل_٢$: $\frac{س + ٥}{-٢} = \frac{ص}{ك + ١} = \frac{ع - ١}{٨}$ فإن : ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (د) ٦

الحل

∵ $ل_١ // ل_٢$ ∴ $\frac{١}{-٢} = \frac{-٢}{ك + ١} = \frac{-٤}{٨}$

∴ ك + ١ = ٤ و منها : ك = ٣

(٦) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين $\overrightarrow{\text{أ}}$ (−٢ ، −٦ ، ١) $\overrightarrow{\text{ب}}$ (٢ ، ٦ ، −١) فإن θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

الحل

$$\text{حتا}\ \theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{(-٢ ، -٦ ، ١)\bullet(٢ ، ٦ ، -١)}{\sqrt{٤+٣٦+١}\ \sqrt{٤+٣٦+١}}$$

$$= \frac{-٤ - ٣٦ - ١}{\sqrt{٤١}\ \sqrt{٤١}} = \frac{-٤١}{٤١} = -١ \quad \therefore \theta = ١٨٠^\circ$$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) معامل $\text{س}^٥$ فى مفكوك $(٣ - ٢\text{س})^٧$ يساوى ....

الحل

$$\because \text{ح}_{\text{ر}+١} = {}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} \times (-٢\text{س})^{\text{ر}}(٣)^{٧-\text{ر}}$$

$$= {}^{٧}\text{ق}_{\text{ر}} \times (-٢)^{\text{ر}}(٣)^{٧-\text{ر}}(\text{س})^{\text{ر}} \quad \therefore \text{ر} = ٥$$

∴ الحد المشتمل على $\text{س}^٥$ هو $\text{ح}_٦$

∴ معامل $\text{س}^٥$ = معامل $\text{ح}_٦$ = ${}^{٧}\text{ق}_٥ \times (-٢)^٥(٣)^٢ = (-٣٢) \times ٩$

= −٦٠٤٨

(٢) مجموعة حل المعادلة $\begin{vmatrix} \text{س} & ١ & ٢ \\ ٠ & \text{س} & ٣ \\ ٠ & ٠ & \text{س} \end{vmatrix} - ٨ = ٠$ فى ح هى ....

الحل

∵ المحدد على الصورة القطرية ∴ $\Delta = \text{س}^٣$

∴ المعادلة هى : $\text{س}^٣ - ٨ = ٠$ ∴ $\text{س}^٣ = ٨$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = { ٢ }

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} + ٣\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ك}\,\overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = -٦\overrightarrow{\text{س}} - ٤\overrightarrow{\text{ص}} + ٤\overrightarrow{\text{ع}}$ و كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ فإن : ك = ...

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ ∴ (٢ ، ٣ ، ك) • (−٦ ، −٤ ، ٤) = ٠

∴ −١٢ − ١٢ + ٤ك = ٠ ∴ ٤ك = ٢٤ ∴ ك = ٦

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٠ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{س}} - ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ = ...

الحل

$$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ١ & -٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٨\overrightarrow{\text{س}} - ٥\overrightarrow{\text{ص}} - ٦\overrightarrow{\text{ع}}$$

(٥) معادلة الكرة التى مركزها (٢ ، −٣ ، ١) و طول نصف قطرها $٢\sqrt{٥}$ هى ....

الحل

معادلة الكرة هى : $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} + ٣)^٢ + (\text{ع} - ١)^٢ = ٢٠$

(٦) معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، −١ ، ٤) ، ب (−١ ، ٠ ، ٢) هى ....

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−١ ، ٠ ، ٢) − (٢ ، −١ ، ٤) = (−٣ ، ١ ، −٢)

∴ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{س} - ٢}{-٣} = \frac{\text{ص} + ١}{١} = \frac{\text{ع} - ٤}{-٢}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $\left(٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}^٢}\right)^{١٠}$ أوجد قيمة الحد الخالى من س

و أثبت أن هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^5$

الحل

نفرض أن الحد الخالى س هو الحد العام

$$∴ ع_{ر+1} = {}^{15}ق_ر \times \left(\frac{1}{س^2}\right)^ر (2س)^{15-ر}$$

$$= {}^{15}ق_ر \times (2)^{15-ر} (س)^{-2ر} (س)^{15-ر}$$

$$= {}^{15}ق_ر \times (2)^{15-ر} (س)^{15-3ر}$$

بوضع : $15 - 3ر = 0$ ∴ $ر = 5$

∴ الحد الخالى من س هو $ع_6 = {}^{15}ق_5 \times (2)^{10} = 3075072$

، بفرض أن الحد المشتمل على $س^5$ هو الحد العام

بوضع : $15 - 3ر = 5$ ∴ $ر = \frac{10}{3} \notin ص^+$

∴ هذا المفكوك لا يشتمل على حد يشتمل على $س^5$

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

$$\frac{س + 3}{2} = \frac{2ص - 1}{5} = \frac{3ع + 2}{4}$$

الحل

نفرض أن : $\frac{س + 3}{2} = \frac{2ص - 1}{5} = \frac{3ع + 2}{4} = ل$

∴ $\frac{س + 3}{2} = ل$ و منها : $س = -3 + 2ل$

، $\frac{2ص - 1}{5} = ل$ و منها : $ص = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}ل$

، $\frac{3ع + 2}{4} = ل$ و منها : $ع = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}ل$

، $\vec{ر} = (-3 ، \frac{1}{2} ، -\frac{2}{3}) + ل(2 ، \frac{5}{2} ، \frac{4}{3})$

، $\frac{س + 3}{2} = \frac{ص - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{ع + \frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$

السؤال الرابع :

(أ) أوجد المعكوس الضربى للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{pmatrix}$

الحل

$$|أ| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 21 \end{vmatrix} = 1(-63 - 5) + 1(42 - 1) + 2(10 + 3) = -1$$

العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ_{11}} = -63 - 5 = -68$ ،

$\overline{أ_{12}} = -(42 - 1) = -41$ ، $\overline{أ_{13}} = 10 + 3 = 13$ ،

$\overline{أ_{21}} = -(21 - 10) = 31$ ، $\overline{أ_{22}} = 21 - 2 = 19$ ، $\overline{أ_{23}} = -(5 + 1) = -6$ ،

$\overline{أ_{31}} = 1 + 4 = 5$ ، $\overline{أ_{32}} = -(1 - 4) = 3$ ، $\overline{أ_{33}} = -3 + 2 = -1$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} -68 & -41 & 13 \\ 31 & 19 & -6 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -68 & 31 & 5 \\ -41 & 19 & 3 \\ 13 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

$$∴ أ^{-1} = \frac{1}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -68 & 31 & 5 \\ -41 & 19 & 3 \\ 13 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & -31 & -5 \\ 41 & -19 & -3 \\ -13 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

(ب) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $ع = 2 - 2\sqrt{3}ت$ على الصورة المثلثية

الحل

∴ $ع = 2 - 2\sqrt{3}ت$ ∴ $س = 2$ ، $ص = -2\sqrt{3}$

∴ $ل^2 = (2)^2 + (-2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$ ∴ $ل = 4$

∴ $ظا θ = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$ ، ∵ $س > 0$ ، $ص < 0$

∴ ع يقع فى الربع الرابع ، ∴ θ = ظا$^{-١}$ (− $\sqrt{٣}$) = − $\frac{١}{٣}\pi$

∴ ع = ٤ (حتا (− $\frac{١}{٣}\pi$) + ت حا (− $\frac{١}{٣}\pi$))

، ع$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ (حتا $\frac{(-\frac{١}{٣}\pi) + ٢ ر \pi}{٢}$ + ت حا $\frac{(-\frac{١}{٣}\pi) + ٢ ر \pi}{٢}$) ، ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ ∴ الجذر الأول = ٢ (حتا (− $\frac{١}{٦}\pi$) + ت حا (− $\frac{١}{٦}\pi$)) ،

عندما : ر = ١ ∴ الجذر الثانى = ٢ (حتا $\frac{٥}{٦}\pi$ + ت حا $\frac{٥}{٦}\pi$)

السؤال الخامس :

(أ) حل المعادلات الآتية : س + ٣ ص + ٢ ع = ١٣ ،

٢ س − ص + ع = ٣ ، ٣ س + ص − ع = ٢

باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{pmatrix} \quad ، \quad س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} \quad ، \quad ب = \begin{pmatrix} ١٣ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$$

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٢ \\ ٢ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & -١ \end{vmatrix} = ١(١-١) - ٣(-٢-٣) + ٢(٢+٣) = ٢٥$$

العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ_{١١}}$ = ١ − ١ = ٠ ،

$\overline{أ_{٢١}}$ = − (− ٢ − ٣) = ٥ ، $\overline{أ_{٣١}}$ = ٢ + ٣ = ٥ ،

$\overline{أ_{١٢}}$ = − (− ٣ − ٢) = ٥ ، $\overline{أ_{٢٢}}$ = − ١ − ٦ = − ٧ ، $\overline{أ_{٣٢}}$ = − (١ − ٩) = − ٨ ،

$\overline{أ_{١٣}}$ = ٣ + ٢ = ٥ ، $\overline{أ_{٢٣}}$ = − (١ − ٤) = ٣ ، $\overline{أ_{٣١}}$ = − ١ − ٦ = − ٧

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ =
$$\begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٨ \\ ٥ & ٣ & -٧ \end{pmatrix}$$

$$، \quad أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix}$$

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix}$$

∴ س = أ$^{-١}$ ب

$$∴ \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٠ & ٥ & ٥ \\ ٥ & -٧ & ٣ \\ ٥ & ٨ & -٧ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١٣ \\ ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \frac{١}{٢٥} \begin{pmatrix} ٢٥ \\ ٥٠ \\ ٧٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = ٣ ، مجموعة الحل = { (١ ، ٢ ، ٣) }

(ب) أوجد نقطة تقاطع المستويات : ٢ س + ص − ع = − ١ ،

س + ص + ع − ٢ = ٠ ، ٣ س − ص − ع = ٦

الحل

٢ س + ص − ع = − ١ (١) ، س + ص + ع = ٢ (٢)

، ٣ س − ص − ع = ٦ (٣)

بجمع (٢) ، (٣) ينتج : ٤ س = ٨ ∴ س = ٢

بجمع (١) ، (٢) ينتج : ٣ س + ٢ ص = ١ (٤)

بالتعويض عن قيمة س ينتج : ٦ + ٢ ص = ١ ∴ ٢ ص = − ٥

و منها : ص = − $\frac{٥}{٢}$ بالتعويض فى (٢) ينتج : ع = $\frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستويات هى : (٢ ، − $\frac{٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

حل آخر

من (٤) بفرض أن : س = ك ∴ ٣ ك + ٢ ص = ١ ∴ ص = $\frac{١ - ٣ك}{٢}$ (٥)

بالتعويض فى (٢) ينتج : ٣ ل + $\frac{١ - ٣ ل}{٢}$ + ع = ٢   بالضرب × ٢

∴ ل + ١ − ٣ ل + ٢ ع = ٤   ∴ ٢ ع − ل = ٣

و منها : ع = $\frac{٣ + ل}{٢}$ (٦)   بالتعويض فى (٣) ينتج :

٣ ل − $\frac{١ - ٣ ل}{٢}$ − $\frac{٣ + ل}{٢}$ = ٦   بالضرب × ٢

٦ ل − ١ + ٣ ل − ٣ − ل = ١٢   ∴ ٨ ل = ١٦   ∴ ل = ٢

بالتعويض فى (٥) ، (٦) ∴ ص = − $\frac{٥}{٢}$ ، ع = $\frac{٥}{٢}$

الاختبار الثانى

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان للمعادلتين : ٢ س + ص = ١ ، ٤ س + ٢ ص = ل
عدد لا نهائى من الحلول فإن : ل = ...

(أ) صفر   (ب) ١   (حـ) ٢   (ء) ٣

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، أ* = $\left(\begin{array}{cc|c} ٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٢ & ل \end{array}\right)$ ، أ* على النظم ٢ × ٣

، و المعادلتان غير متجانستين ، و لهما عدد لا نهائى من الحلول

، و عدد المجاهيل = ٢   ∴ ر (أ) = ر (أ*) = ١

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من أ* هى ٢ ، و قيمته = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ل \end{vmatrix}$ = ٠   ∴ ل − ٢ = ٠   و منها : ل = ٢

(٢) إذا كان : ${}^{ن+١}ق_{٣}$: ${}^{ن}ق_{٤}$ = ٢ : ٣   فإن : ن = ...

(أ) ٢   (ب) ٣   (حـ) ٥   (ء) ١١

الحل

∵ $\frac{{}^{ن+١}ق_{٣}}{{}^{ن}ق_{٤}} = \frac{٢}{٣}$ ∴ $\frac{\lfloor ن+١}{\lfloor ٣ \lfloor ن-٢} \times \frac{\lfloor ٤ \lfloor ن-٤}{\lfloor ن} = \frac{٢}{٣}$

∴ $\frac{(ن+١) \lfloor ن}{(ن-٢)(ن-٣) \lfloor ن-٤ \lfloor ٣} \times \frac{٤ \lfloor ن-٤ \lfloor ٣}{\lfloor ن} = \frac{٢}{٣}$

و منها : (ن − ٢) (ن − ٣) = ٦ (ن + ١)

∴ $ن^{٢}$ − ٥ ن + ٦ = ٦ ن + ٦   أى : $ن^{٢}$ − ١١ ن = ٠

∴ ن (ن − ١١) = ٠   و منها : ن = ٠ مرفوض   ، ن = ١١

(٣) إذا كان : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + $ع^{٢}$ + ٦ س − ٤ ص + ١٠ ع − ٨ = ٠
معادلة كرة مركزها م فإن : م = ...

(أ) ١٠   (ب) ١١   (حـ) ١٢   (ء) ١٣

الحل

∵ معادلة الكرة هى : $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + $ع^{٢}$ + ٦ س − ٤ ص + ١٠ ع − ٨ = ٠

∴ مركز الكرة (− $\frac{١}{٢}$ معامل س ، − $\frac{١}{٢}$ معامل ص ، − $\frac{١}{٢}$ معامل ع)

= (− ٣ ، ٢ ، − ٥)

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (− ٢ ، ٤ ، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ل ، ٣) حيث ل ∈ $ص_{+}$ و كان || $\overrightarrow{أب}$ || = ٧ فإن : قيمة ل = ...

(أ) ١٠   (ب) ٨   (حـ) ٦   (ء) ٤

الحل

∵ || $\overrightarrow{أب}$ || = ٧ وحدة طول   ∴ $(\| \overrightarrow{أب} \|)^{٢}$ = ٤٩

∴ ٤ + $(ل - ٤)^{٢}$ + ٩ = ٤٩   ∴ $(ل - ٤)^{٢}$ = ٣٦

∴ ل − ٤ = ٦   أو   ل − ٤ = − ٦

∴ ل = ١٠   ∴ ل = − ٢ مرفوض لأن : ل ∈ $ص_{+}$

(٥) إذا كان θ قياس الزاوية المحصورة بين المتجهين أ→ (٢ ، ٠ ، ٢) ، ب→ (٠ ، ٠ ، ٤) فإن θ = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠° (ء) ٩٠°

الحل

حتا θ = (أ→ • ب→) / (‖أ→‖ ‖ب→‖) = ((٢ ، ٠ ، ٢) • (٠ ، ٠ ، ٤)) / (√٨ √١٦) = ٨ / (٨√٢) = ١ / √٢

∴ θ = ٤٥°

(٦) إذا كان ل١ : (س − ٣)/٢ = (−ص − ١)/٦ = ع/ك يوازى ل٢ : (س + ٢)/٦ = (ص − ٤)/م = (ع − ١)/٣ فإن ك + م = ...

(أ) −١٧ (ب) −١٠ (حـ) ١٠ (ء) ١٧

الحل

ل١ : (س − ٣)/٢ = (ص − (−١))/−٦ = ع/ك

∵ ميل ل١ (هـ١→) = (٢ ، −٦ ، ك) ، ميل ل٢ (هـ٢→) = (٦ ، م ، ٣)

، ل١ // ل٢ ∴ ٢/٦ = −٦/م = ك/٣ و منها :

٢م = −٣٦ ∴ م = −١٨ ، ٦ك = ٦ ∴ ك = ١

∴ ك + م = −١٨ + ١ = −١٧

حل آخر

∵ ل١ // ل٢ ∴ هـ١→ = ن هـ٢→ ∴ (٢ ، −٦ ، ك) = ن (٦ ، م ، ٣)

∴ ٢ = ٦ن و منها : ن = ١/٣

، −٦ = ن م ∴ −٦ = ١/٣ م و منها : م = −١٨

، ك = ٣ن ∴ ك = ٣ × ١/٣ و منها : ك = ١

∴ ك + م = −١٨ + ١ = −١٧

حل ثالث

∵ ل١ // ل٢ ∴ هـ١→ × هـ٢→ = و→ (٠→)

∴ | س→ ص→ ع→ ؛ ٢ −٦ ك ؛ ٦ م ٣ | = ٠→

∴ (−١٨ − م ك) س→ − (٦ − ٦ك) ص→ + (٢م − ٣٦) ع→ = ٠→

و منها : ٦ − ٦ك = ٠ و منها : ك = ١

، ٢م = −٣٦ و منها : م = −١٨

∴ ك + م = −١٨ + ١ = −١٧

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $\omega + \omega^{2} + \omega^{3} + \dots + \omega^{100}$ = ...

الحل

المقدار = ٣٣ $(\omega + \omega^{2} + \omega^{3}) + [(\omega^{3})^{33} \times \omega]$

= ٣٣ × ٠ + ١ × $\omega = \omega$

حل آخر

المقدار عبارة عن متسلسلة هندسية حدها الأول أ = ω ، أساسها ر = ω

، حدها الأخير ل = $\omega^{100} = (\omega^{3})^{33} \times \omega = 1 \times \omega = \omega$

∴ حـ١٠٠ = (ل ر − أ)/(ر − ١) = $\frac{\omega \times \omega - \omega}{\omega - 1} = \frac{\omega(\omega - 1)}{\omega - 1} = \omega$

(٢) إذا كان : أ′ ، ب′ ، حـ′ هى أطوال أضلاع مثلث فإن قيمة

| أ′ ب′ حـ′ ؛ ٥ ٧ ٨ ؛ حا أ حا ب حا حـ | = ...

الحل

∵ أ′/حا أ = ب′/حا ب = حـ′/حا حـ = ك

∴ أَ = ك حا أ ، بَ = ك حا ب ، حـَ = ك حا حـ

∴ | أَ بَ حـَ ; ٥ ٧ ٨ ; حا أ حا ب حا حـ | = | ك حا أ ك حا ب ك حا حـ ; ٥ ٧ ٨ ; حا أ حا ب حا حـ |

= ك | حا أ حا ب حا حـ ; ٥ ٧ ٨ ; حا أ حا ب حا حـ | = ٠ لأن : ص١ = ص٣

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (–١ ، ٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، ١) فإن : مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى إتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

الحل

مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = $\frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|}$ = $\frac{(-١ ، ٤ ، ٢) \bullet (٢ ، ٢ ، ١)}{\sqrt{٩}}$ = $\frac{٨}{٣}$

(٤) إذا كان : س٢ + ص٢ + ع٢ – ٤ ك س + ٤ ص – ٨ ك ع + ٢ ك = ٠ معادلة كرة طول نصف قطرها ٢ $\sqrt{٥}$ فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ مركز الكرة = (٢ ك ، –٢ ، ٤) ، نق = ٢ $\sqrt{٥}$ ، حـ = ٢ ك

∴ ٤ ك٢ + ٤ + ١٦ – ٢ ك = ٢٠ ∴ ٤ ك٢ – ٢ ك = ٠

∴ ٢ ك (٢ ك – ١) = ٠ و منها : ك = ٠ أ، ك = $\frac{١}{٢}$

(٥) إذا كان : المستوى ٣ س – ص + ٢ ع + ٣ = ٠ ، المستوى ك س – ٤ ص + ع – ٥ = ٠ متعامدان فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ متجها الاتجاه العموديين على المستويين هما :

$\overrightarrow{ن_١}$ = (٣ ، –١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ن_٢}$ = (ك ، –٤ ، ١)

، ∵ المستويان متعامدان ∴ $\overrightarrow{ن_١} \bullet \overrightarrow{ن_٢}$ = ٠

∴ (٣ ، –١ ، ٢) • (ك ، –٤ ، ١) = ٠

∴ ٣ ك + ٤ + ٢ = ٠ ∴ ٣ ك = –٦ ∴ ك = –٢

(٦) إذا كانت : حـ (–١ ، ٦ ، –٥) منتصف $\overline{أ ب}$ حيث

أ (ك – ٢ ، –١ ، م + ٣) ، ب (٢ ، ن – ٧ ، –٢)

فإن : ك + م – ن = ...

الحل

∵ حـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\frac{ك - ٢ + ٢}{٢}$ = –١ ∴ ك = –٢

، $\frac{-١ + ن - ٧}{٢}$ = ٦ ∴ ن – ٨ = ١٢ ∴ ن = ٢٠

، $\frac{م + ٣ - ٢}{٢}$ = –٥ ∴ م + ١ = –١٠ ∴ م = –١١

∴ ك + م – ن = –٢ – ١١ – ٢٠ = –٣٣

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) أوجد معامل س٥ فى مفكوك (١ – س + س٢) (١ + س)١١

الحل

المقدار = (١ – س + س٢) (١ + س)١١

= (١ – س + س٢) (١ + ١١ق١ س + ١١ق٢ س٢ + ١١ق٣ س٣ + ١١ق٤ س٤ + ١١ق٥ س٥ + ... + + س١١)

الحدود المشتملة على س٥ هى : ١ × ١١ق٥ س٥ ، –س × ١١ق٤ س٤ ، س٢ × ١١ق٣ س٣

∴ معامل س٥ = ١١ق٥ – ١١ق٤ + ١١ق٣ = ٤٦٢ – ٣٣٠ + ١٦٥ = ٢٩٧

(٢) أثبت أن : المستقيم $\frac{س - ١}{٣}$ = $\frac{ص + ٣}{-١}$ = $\frac{ع}{٣}$ يقطع المستوى ٣ س + ٢ ص + ع – ٨ = ٠ فى نقطة ثم أوجد

زاوية ميل المستقيم على المستوى

الحل

نفرض أن : $\frac{\text{س} - 1}{2} = \frac{\text{ص} + 3}{-1} = \frac{\text{ع}}{3} = \text{ك}$

∴ س = ١ + ٢ك ، ص = −٣ − ك ، ع = ٣ك

بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

٣(١ + ٢ك) + ٢(−٣ − ك) + ٣ك − ٨ = ٠

∴ ٣ + ٦ك − ٦ − ٢ك + ٣ك − ٨ = ٠ ∴ ٧ك = ١١ ∴ ك = $\frac{11}{7}$

∴ س = ١ + ٢ × $\frac{11}{7}$ = $\frac{29}{7}$ ، ص = −٣ − $\frac{11}{7}$ = $-\frac{32}{7}$

، ع = ٣ × $\frac{11}{7}$ = $\frac{33}{7}$ ∴ نقطة التقاطع هى ($\frac{29}{7}$ ، $-\frac{32}{7}$ ، $\frac{33}{7}$)

متجه الاتجاه العمودى على المستوى = (٣ ، ٢ ، ١)

، متجه اتجاه المستقيم = (٢ ، −١ ، ٣)

بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيم و العمودى على المستوى = θ

∴ حتا θ = $\frac{(3 ، 2 ، 1)\bullet(2 ، -1 ، 3)}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

∴ θ = ٦٠° ∴ قياس زاوية ميل المستقيم على المستوى = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

السؤال الرابع :

(أ) أحسب رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ و من ثم أثبت أن :

مجموعة حل المعادلات ٢س − ص − ٣ع = ٠ ،

س + ٢ص + ع = ١ ، ٣س − ٥ص + ٢ع = ١٣ لها حل وحيد و أوجد ذلك الحل باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2(4+5) + 1(2-3) - 3(-5-6) = 50 \neq 0$

∴ ر(أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ ، $\text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\text{أ}_{11} = 4 + 5 = 9$ ،

$\text{أ}_{12} = -(2 - 3) = 1$ ، $\text{أ}_{13} = -5 - 6 = -11$ ،

$\text{أ}_{21} = -(-2 - 15) = 17$ ، $\text{أ}_{22} = 4 + 9 = 13$ ، $\text{أ}_{23} = -(-10 + 3) = 7$ ،

$\text{أ}_{31} = -1 + 6 = 5$ ، $\text{أ}_{32} = -(2 + 3) = -5$ ، $\text{أ}_{33} = 4 + 1 = 5$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -11 \\ 17 & 13 & 7 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

، $\text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

∴ $\text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ ∴ س = أ^{-1} ب

∴ $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9 & 17 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -11 & 7 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 100 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = −١ ، ع = ١ ، مجموعة الحل = {(٢ ، −١ ، ١)}

(٢) أوجد الصورة الأسية للعدد ع = $\frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت}$ ثم أوجد كلاً من : ع$^{-١}$ ، $\overline{ع}$ ، $\sqrt{ع}$ على الصورة المثلثية

الحل

ع = $\frac{٢ + ٦ت}{٣ - ت} \times \frac{٣ + ت}{٣ + ت} = \frac{٦ + ٢٠ت - ٦}{٩ + ١}$ = ٢ ت

= ٢ (حتا $\frac{١}{٢}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٢}\pi$) = ٢ هـ$^{\frac{١}{٢}\pi ت}$

، ∵ ١ = حتا ٠ + ت حا ٠ .

∴ ع$^{-١}$ = $\frac{١}{ع}$ = $\frac{١}{٢}$ ($\frac{\text{حتا ٠ + ت حا ٠}}{\text{حتا } \frac{١}{٢}\pi \text{ + ت حا } \frac{١}{٢}\pi}$)

= $\frac{١}{٢}$ (حتا ($-\frac{١}{٢}\pi$) + ت حا ($-\frac{١}{٢}\pi$))

، $\overline{ع}$ = ٢ (حتا $\frac{١}{٢}\pi$ − ت حا $\frac{١}{٢}\pi$)

= ٢ (حتا (٠ − $\frac{١}{٢}\pi$) + ت حا (٠ − $\frac{١}{٢}\pi$))

= ٢ (حتا ($-\frac{١}{٢}\pi$) + ت حا ($-\frac{١}{٢}\pi$))

∴ ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{١}{٢}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٢}\pi$)$^{\frac{١}{٢}}$

= حتا $\frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢م\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢م\pi}{٢}$ ، م = ٠ ، −١

عندما : م = ٠ فإن : ع$_{١}^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٤}\pi$) ،

عندما : م = −١ فإن : ع$_{٢}^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا ($-\frac{٣}{٤}\pi$) + ت حا ($-\frac{٣}{٤}\pi$))

، ع$^{\frac{١}{٢}}$ = ٢ (حتا + ت حا) ، م = ٠ ، −١

عندما : م = ٠ فإن : $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٤}\pi$) ،

عندما : م = −١ فإن : $\sqrt{ع}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا ($-\frac{٣}{٤}\pi$) + ت حا ($-\frac{٣}{٤}\pi$))

السؤال الخامس :

(أ) أثبت أن : إحدى قيم المقدار $\sqrt{ت}$ − $\sqrt{-ت}$ = $\sqrt{٢}$

الحل

نفرض أن : ع$_{١}$ = ت = حتا $\frac{١}{٢}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٢}\pi$

∴ ع$_{١}$ = $\sqrt{ت}$ = (حتا $\frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢م\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢م\pi}{٢}$)

، م = ٠ ، −١

عندما : م = ٠ فإن : $\sqrt{ع_{١}}$ = حتا $\frac{١}{٤}\pi$ + ت حا $\frac{١}{٤}\pi$

= $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت (١)

، عندما : م = −١ فإن : $\sqrt{ع_{١}}$ = حتا ($-\frac{٣}{٤}\pi$) + ت حا ($-\frac{٣}{٤}\pi$)

= − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت (٢)

و نفرض أن : ع$_{٢}$ = − ت = حتا ($-\frac{١}{٢}\pi$) + ت حا ($-\frac{١}{٢}\pi$)

∴ ع$_{٢}$ = $\sqrt{-ت}$ = (حتا $\frac{(-\frac{١}{٢}\pi) + ٢م\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{(-\frac{١}{٢}\pi) + ٢م\pi}{٢}$)

، م = ٠ ، ١

عندما : م = ٠ فإن : $\sqrt{ع_{٢}}$ = حتا ($-\frac{١}{٤}\pi$) + ت حا ($-\frac{١}{٤}\pi$)

= − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت (٣)

، عندما : م = ١ فإن : $\sqrt{ع_{٢}}$ = حتا $\frac{٣}{٤}\pi$ + ت حا $\frac{٣}{٤}\pi$

= − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت (٤)

من (٢) ، (٤) :

إحدى قيم المقدار $\sqrt{ت}$ − $\sqrt{-ت}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

= $\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = $\sqrt{٢}$

أحمد الشنتورى

(٢) إذا كان : (س − ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ١

، (س + ٤)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} + (ع − ٢)^{٢} = ٤ معادلتا كرتين

أوجد البعد بين مركزى الكرتين و بين أن الكرتين غير متقاطعتين

الحل

مركز الكرة الأولى (م$_{١}$) = (٢ ، −٤ ، ٢) ، نق$_{١}$ = ١

مركز الكرة الثانية (م$_{٢}$) = (−٤ ، ٤ ، ٢) ، نق$_{٢}$ = ٢

∴ (م$_{١}$م$_{٢}$)^{٢} = (−٤ − ٢)^{٢} + (٤ + ٤)^{٢} + (٢ − ٢)^{٢} = ١٠٠

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ = ١٠ ، ∵ نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ = ٣

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ الكرتان متباعدتان (غير متقاطعتين)

الاختبار الثالث

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) مجموع معاملات الحدود فى مفكوك (١ + س)^{٥} يساوى ....

(أ) صفر　　(ب) ٥　　(حـ) ٣٢　　(ء) ٥

الحل

مجموع معاملات الحدود فى مفكوك (١ + ١)^{٥} = (٢)^{٥} = ٣٢

(٢) إذا كان : س عدد مركب فإن : عدد حلول المعادلة

$\begin{vmatrix} س^{٣} + ١ & س - ١ \\ س + ١ & س^{٣} - ١ \end{vmatrix} = ٠$ يساوى ....

(أ) ٦　　(ب) ٥　　(حـ) ٤　　(ء) ٣

الحل

∵ Δ = (س^{٣} + ١)(س^{٣} − ١) − (س + ١)(س − ١)

= س^{٦} − ١ − (س^{٢} − ١) = س^{٦} − ١ − س^{٢} + ١ = س^{٦} − س^{٢}

= س^{٢}(س^{٤} − ١) = س^{٢}(س + ١)(س − ١)(س^{٢} + ١)

∴ المعادلة هى : س^{٢}(س + ١)(س − ١)(س^{٢} + ١) = ٠

، ∵ س عدد مركب ∴ عدد حلول : س^{٢} + ١ = ٠ هو : ٢

، ∵ عدد حلول : س^{٢}(س + ١)(س − ١) = ٠ هو : ٣

∴ عدد حلول المعادلة هو : ٥

(٣) إذا كان : (س ، ص ، ع) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(−٤ ، ٠ ، ٥) ، ب(−٢ ، ٤ ، −١٣) فإن : س + ص + ع = ...

(أ) −٥　　(ب) ٤　　(حـ) ٦　　(ء) ٩

الحل

∵ (س ، ص ، ع) منتصف $\overline{أب}$ ∴ س = $\frac{-٤ - ٢}{٢}$ = −٣

، ص = $\frac{٠ + ٤}{٢}$ = ٢ ، ع = $\frac{٥ - ١٣}{٢}$ = −٤

∴ س + ص + ع = −٣ + ٢ − ٤ = −٥

(٤) إذا كان : أ(−٤ ، −٢ ، ٣) ، ب(١ ، ٢ ، ك) و كان طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{٧٧}$ فإن : إحدى قيم ك هى ....

(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(حـ) ١٥　　(ء) ٢٠

الحل

∵ طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{٧٧}$ ∴ أب = $\sqrt{٧٧}$ ∴ (أب)^{٢} = ٧٧

∴ (١ + ٤)^{٢} + (٢ + ٢)^{٢} + (ك − ٣)^{٢} = ٧٧

∴ ٢٥ + ١٦ + (ك − ٣)^{٢} = ٧٧ ∴ (ك − ٣)^{٢} = ٣٦

∴ ك − ٣ = ٦ و منها : ك = ٩ " إحدى قيم ك "

أو ك − ٣ = − ٦ و منها : ك = − ٣

(٥) إذا كان : أ = (−١ ، ٣ ، ٤) ، ب = (٠ ، −٢ ، ٥) فإن :

|| أ ب || = ...

(أ) ٢ √٣ (ب) ٣ √٣ (جـ) ٤ √٣ (د) ٥ √٣

الحل

(|| أ ب ||)^{٢} = (٠ + ١)^{٢} + (− ٢ − ٣)^{٢} + (٥ − ٤)^{٢} = ٢٧

∴ || أ ب || = √٢٧ = ٣ √٣

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة أ (٣ ، ٠ ، − ٥) على المستوى ٢ س + √٥ ص + ٤ ع − ٦ = ٠ يساوى ....

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ١٦ (د) ٧

الحل

طول العمود = | ٢ × ٣ + √٥ × ٠ + ٤ × (−٥) − ٦ | ÷ √(٢ + ٥ + ١٦) = ٢٠ ÷ ٥ = ٤

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° فإن : سعة العدد ع = ...

الحل

∵ ع = حا ٦٠° − ت حتا ٦٠° = حتا (− ٩٠° + ٦٠°) + ت حا (− ٩٠° + ٦٠°)

= حتا (− ٣٠°) + ت حا (− ٣٠°)

∴ سعة العدد ع = (− ٣٠°) = (− $\frac{١}{٦}$ π)

(٢) رتبة المصفوفة أ (١ ١ ١ ؛ ٢ ٢ ٢ ؛ ٥ ٥ ٥) = ...

الحل

∵ |أ| = | ١ ١ ١ ؛ ٢ ٢ ٢ ؛ ٥ ٥ ٥ | = ١٠ | ١ ١ ١ ؛ ٢ ٢ ٢ ؛ ٥ ٥ ٥ | = ٠ لأن : ص$_{١}$ = ص$_{٢}$

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ قيمة كل المحددات الصغرى = ٠ ∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

(٣) فى الشكل الموضح :

أ = (١ ، ٢ ، − ١) ،

ب = (٦ ، ك ، ٠) ،

جـ = (٤ ، ٠ ، ٢ √٢)

قيمة ك = ...

ب = (٦ ، ك ، ٠) أ = (١ ، ٢ ، − ١)

جـ = (٤ ، ٠ ، ٢ √٢)

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين أ ، ب = θ ، بين ب ، جـ = β

، ∵ θ = β ∴ حتا θ = حتا β ∴ (أ • ب) ÷ (|| أ || || ب ||) = (ب • جـ) ÷ (|| ب || || جـ ||)

∴ (٦ + ٢ ك) ÷ (√٦ √(٣٦ + ك^{٢})) = ٢٤ ÷ (٢ √٦ √(٣٦ + ك^{٢}))

و منها : ٦ + ٢ ك = ١٢ و منها : ك = ٣

(٤) طول نصف قطر الكرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٤ س − ٦ ص + ٨ ع + ٤ = ٠

يساوى = ...

الحل

∵ مركز الكرة = (− ٢ ، ٣ ، − ٤) ، حـ = − ٤

∴ نق^{٢} = ٤ + ٩ + ١٦ − ٤ = ٢٥ ∴ نق = ٥

(٥) إذا كان : المستقيم $\frac{س + ٣}{٢} = \frac{ص + ١}{-٦} = \frac{ع - ٢}{ك}$ يوازى المستقيم $\frac{س + ٢}{٤} = \frac{ص - ٥}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ فإن : ك + م = ...

الحل

∵ المستقيمان متوازيان ∴ $\frac{٢}{٤} = \frac{-٦}{م} = \frac{ك}{٣}$ و منها :

٢م = -٢٤ ∴ م = -١٢ ، ٤ك = ٦ ∴ ك = ١,٥

∴ ك + م = -١٢ + ١,٥ = -١٠,٥

(٦) إذا كان : المستقيم $\frac{س + ٢}{٦} = \frac{ص - ١}{م} = \frac{ع - ١}{٣}$ عمودى على المستقيم $\frac{س - ٩}{-٢} = \frac{ص + ٨}{١}$ ، ع = ٣ فإن : م = ...

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (٦ ، م ، ٣) ، (-٢ ، ١ ، ٠)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (٦ ، م ، ٣) • (-٢ ، ١ ، ٠) = ٠

∴ -١٢ + م = ٠ ∴ م = ١٢

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كان : $(م + س)^{ن} = ٣أ + ٦أ\,س + ٥أ\,س^{٢} + ...$

حيث ن ∈ $ص^{+}$ أوجد قيمة كل من م ، أ

الحل

∵ معامل $ح_{١}$ = ٣أ ، معامل $ح_{٢}$ = ٦أ ، معامل $ح_{٣}$ = ٥أ

∴ $\frac{معامل\ ح_{٢}}{معامل\ ح_{١}} = \frac{٦أ}{٣أ} = ٢$ ∴ $\frac{ن - ١ + ١}{١} \times \frac{١}{م} = ٢$ ∴ ن = ٢م

، $\frac{معامل\ ح_{٣}}{معامل\ ح_{٢}} = \frac{٥أ}{٦أ} = \frac{٥}{٦}$ ∴ $\frac{ن - ٢ + ١}{٢} \times \frac{١}{م} = \frac{٥}{٦}$

و منها : ٣ن - ٣ = ٥م بالتعويض عن : ن = ٢م

∴ ٦م - ٣ = ٥م و منها : م = ٣ ، بالتالى : ن = ٦

، ∵ $م^{ن}$ = ٣أ ∴ $٣^{٦}$ = ٣أ و منها : أ = $٣^{٥}$ = ٢٤٣

(٢) أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية لها حل آخر غير الحل الصفرى و أكتب الصورة العامة لهذا الحل : ٢س - ص + ٣ع = ٠

، ٤س + ٥ص - ع = ٠ ، ٢س + ٣ص - ع = ٠

الحل

$$∵ |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ٣ \\ ٤ & ٥ & -١ \\ ٢ & ٣ & -١ \end{vmatrix} = ٢(-٥ + ٣) + ١(-٤ + ٢) - ٣(١٢ - ١٠) = ٠$$

∴ ر(أ) < ٣

$$، ∵ \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١٠ + ٤ = ١٤ \neq ٠$$

∴ ر(أ) < ٢

، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، ر(أ) < عدد المجاهيل

، المعادلات متجانسة ∴ للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول غير الحل الصفرى

لإيجاد الصورة العامة للحل نتبع الخطوات التالية :

١) نكتب المصفوفة الموسعة ($أ^{*}$) للمصفوفة أ " لاحظ الحدود المطلقة = ٠ "

٢) نجرى تحويلات أولية على صفوف $أ^{*}$ (كما فى المحددات) لنوجد مصفوفة مكافئة لها على صورة مصفوفة مثلثية أو تحتوى على أكبر عدد من الأصفار

٣) نقرأ المعادلات من خلال الصفوف ثم نوجد الحل " لاحظ : لا معنى لـ $أ^{-١}$ "

$$أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٠ \\ ٤ & ٥ & -١ & ٠ \\ ٢ & ٣ & -١ & ٠ \end{array}\right)$$

بإجراء : $ص_{٢} - ٢ص_{١}$ ، $ص_{٣} - ص_{١}$

أحمد الشتورى

$$\overset{*}{\text{أ}} = \left(\begin{array}{ccc|c} ٢ & -١ & ٣ & ٠ \\ ٠ & ٧ & -٧ & ٠ \\ ٠ & ٤ & -٤ & ٠ \end{array}\right)$$

∴ من الصف الثانى : ٧ ص − ٧ ع = ٠

∴ ص = ع ، بفرض أن : ص = ل ∴ ع = ل

، ∵ من الصف الأول : ٢ س − ص + ٣ ع = ٠ ∴ ٢ س − ل + ٣ ل = ٠

و منها : ٢ س = −٢ ل ∴ س = −ل

∴ الصورة العامة للحل هى : (−ل ، ل ، ل)

السؤال الرابع :

(١) إذا كان : $|\text{ع}_١| = |\text{ع}_٢| = ١$ ، سعة $(\text{ع}_١ \text{ع}_٢^{٣}) = ٨١^\circ$ ، سعة $\left(\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}\right) = ٣٣^\circ$ أوجد على صورة س + ص ت

$(\text{ع}_١^{١٥} + \text{ع}_٢^{١٥})$

الحل

نفرض أن : سعة $\text{ع}_١ = \theta_١$ ، سعة $\text{ع}_٢ = \theta_٢$

∴ $\theta_١ + ٣\theta_٢ = ٨١^\circ$ ، $\theta_١ - \theta_٢ = ٣٣^\circ$ بالطرح ينتج :

$٤\theta_٢ = ٤٨^\circ$ ∴ $\theta_٢ = ١٢^\circ$ ، $\theta_١ = ٤٥^\circ$

∴ $\text{ع}_١ =$ حتا ٤٥° + ت حا ٤٥° ، $\text{ع}_٢ =$ حتا ١٢° + ت حا ١٢°

∴ $\text{ع}_١^{١٥} =$ (حتا ٤٥° + ت حا ٤٥°)^{١٥} = حتا ٦٧٥° + ت حا ٦٧٥°

= حتا (-٤٥°) + ت حا (-٤٥°) = $\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ت

، $\text{ع}_٢^{١٥} =$ (حتا ١٢° + ت حا ١٢°)^{١٥} = حتا ١٨٠° + ت حا ١٨٠° = −١

∴ $(\text{ع}_١^{١٥} + \text{ع}_٢^{١٥}) = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} - ١\right) - \frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة أ (−٢ ، ٣ ، ١) على

المستقيم $\frac{\text{س} + ٢}{٢} = \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{ع} - ١}{٤}$

الحل

نفرض أن : $\frac{\text{س} + ٢}{٢} = \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{ع} - ١}{٤} = \text{ل}$

∴ $\frac{\text{س} + ٢}{٢} = \text{ل}$ و منها : س = −٢ + ٢ ل

، $\frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \text{ل}$ و منها : ص = ٣ + ٤ ل

، $\frac{\text{ع} - ١}{٤} = \text{ل}$ و منها : ع = ١ + ٤ ل

∴ $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (−٢ ، ٣ ، ١) + ل (٢ ، ٤ ، ٤)

∴ النقطة (−٢ ، ٣ ، ١) تقع على المستقيم ∴ طول العمود = صفر

السؤال الخامس :

(١) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{جـ} \\ \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{ب جـ} & \text{جـ أ} & \text{أ ب} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

بضرب $\text{ع}_١ \times \text{أ}$ ، $\text{ع}_٢ \times \text{ب}$ ، $\text{ع}_٣ \times \text{جـ}$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{١}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ} & \text{أ ب جـ} \end{vmatrix}$

بأخذ أ ب جـ مشترك من عناصر $\text{ص}_٣$

∴ الطرف الأيمن = $\frac{\text{أ ب جـ}}{\text{أ ب جـ}} \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}^٢ & \text{ب}^٢ & \text{جـ}^٢ \\ \text{أ}^٣ & \text{ب}^٣ & \text{جـ}^٣ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$ = الطرف الأيسر

(٢) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أ/ ب/ حـ/ ء/ متوازى مستطيلات

أوجد $\overrightarrow{\text{ب ء}} \bullet \overrightarrow{\text{أ حـ}}$

الحل

نعتبر ء/ نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ أ (٠ ، ٨ ، ٦) ، ب (٤ ، ٨ ، ٦) ،

حـ (٤ ، ٠ ، ٦) ، ء (٠ ، ٠ ، ٦)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ء}}$ = (٠ ، ٠ ، ٦) − (٤ ، ٨ ، ٦) = (−٤ ، −٨ ، ٠)

، $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = (٠ ، ٨ ، ٦) − (٤ ، ٠ ، ٦) = (−٤ ، ٨ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{\text{ب ء}} \bullet \overrightarrow{\text{أ حـ}}$ = (−٤ ، −٨ ، ٠) • (−٤ ، ٨ ، ٠)

= ١٦ − ٦٤ + ٠ = − ٤٨

الاختبار الرابع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : ${}^{10}\text{ق}_{ر+1} : {}^{10}\text{ق}_{ر-1} = 21 : 10$

فإن : قيمة ر = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (حـ) ٥ (ء) ٦

الحل

∵ $\frac{{}^{10}\text{ق}_{ر+1}}{{}^{10}\text{ق}_{ر-1}} = \frac{21}{10}$ ∴ $\frac{{}^{10}\text{ق}_{ر+1}}{{}^{10}\text{ق}_{ر}} \times \frac{{}^{10}\text{ق}_{ر}}{{}^{10}\text{ق}_{ر-1}} = \frac{21}{10}$

∴ $\frac{10 - ر - 1 + 1}{ر + 1} \times \frac{10 - ر + 1}{ر} = \frac{21}{10}$ ∴ $\frac{11 - ر}{ر} \times \frac{10 - ر}{ر + 1} = \frac{21}{10}$

∴ ٢١ ر (ر + ١) = ١٠ (١١ − ر) (١٠ − ر)

∴ ٢١ ر² + ٢١ ر = ١١٠٠ − ٢١٠ ر + ١٠ ر²

∴ ١١ ر² + ٢٣١ ر − ١١٠٠ = ٠ ∴ ر² + ٢١ ر − ١٠٠ = ٠

∴ (ر + ٢٥) (ر − ٤) = ٠ ر = − ٢٥ مرفوض ، ر = ٤

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} \text{لو}_2 3 & 3 & 9 \\ 0 & \text{لو}_3 5 & 7 \\ 0 & 0 & \text{لو}_5 \text{س} \end{vmatrix} = 4$ فإن : س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٣٢ (حـ) ٦٤ (ء) ١٢٨

الحل

∵ المحدد على الصورة القطرية ∴ Δ = لو$_2$ ٣ × لو$_3$ ٥ × لو$_5$ س

∴ لو$_2$ ٣ × لو$_3$ ٥ × لو$_5$ س = ٤ ∴ $\frac{\text{لو}_هـ 3}{\text{لو}_هـ 2} \times \frac{\text{لو}_هـ 5}{\text{لو}_هـ 3} \times \frac{\text{لو}_هـ \text{س}}{\text{لو}_هـ 5} = 4$

∴ $\frac{\text{لو}_هـ \text{س}}{\text{لو}_هـ 2} = 4$ ∴ لو$_2$ س = ٤ ∴ س = (٢)^4 = ١٦

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (١ ، −١ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٠ ، ٢ ، −٣) ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (−٢ ، ١ ، ٠) فإن : || ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ}}$ || = ...

(أ) ٨ $\sqrt{3}$ (ب) ١١ (حـ) ١٢ (ء) ٧ $\sqrt{2}$

الحل

∵ ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ}}$ = (٣ ، −٣ ، ٦) − (٠ ، ٢ ، −٣) +

(−٢ ، ١ ، ٠) = (١ ، −٤ ، ٩)

∴ || ٣ $\overrightarrow{\text{أ}}$ − $\overrightarrow{\text{ب}}$ + $\overrightarrow{\text{حـ}}$ || = || (١ ، −٤ ، ٩) || = $\sqrt{1 + 16 + 81}$

= $\sqrt{98}$ = ٧ $\sqrt{2}$ وحدة طول

(٤) إذا كان ل$_1$: $\frac{\text{س} + 2}{-1} = \frac{\text{ص} + 3}{3} = \frac{\text{ع} + 5}{2}$ عمودى على

ل١ : $\frac{\text{س}}{٢} = \frac{\text{ص} - ٥}{\text{ك}} = \frac{\text{ع} - ٦}{\text{م}}$ فإن : ٣ ك + ٢ م = ...

(أ) −١　　(ب) ٠　　(حـ) ٢　　(ء) ٤

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (−١ ، ٣ ، ٢) ، (٢ ، ك ، م)

، ∵ المستقيمان متعامدان　∴ (−١ ، ٣ ، ٢) • (٢ ، ك ، م) = ٠

∴ −٢ + ٣ ك + ٢ م = ٠　　∴ ٣ ك + ٢ م = ٢

(٥) قياس الزاوية بين المستقيمين س − ١ = $\frac{\text{ص} + ٢}{\sqrt{٢}}$ = − ع + ١

، − س = ع + ٣ ، ص = ٤ يساوى ....

(أ) ٤٥°　　(ب) ١٢٠°　　(حـ) ١٣٥°　　(ء) ١٥٠°

الحل

∵ $\frac{\text{س} - ١}{١} = \frac{\text{ص} + ٢}{\sqrt{٢}} = \frac{\text{ع} - ١}{١}$ ، $\frac{\text{س}}{-١} = \frac{\text{ع} + ٣}{١}$ ، ص = ٤

∴ متجها اتجاه المستقيمان هما : (١ ، $\sqrt{٢}$ ، −١) ، (−١ ، ١ ، ٠)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ

∴ حتا θ = $\frac{|(١ ، \sqrt{٢} ، -١) \bullet (-١ ، ١ ، ٠)|}{\sqrt{٤}\ \sqrt{٢}} = \frac{|-٢|}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ θ = ٤٥°

(٦) جيوب تمام الاتجاه للمتجه (٢ ، −٤ ، ٤) هى ....

(أ) (٢ ، −٤ ، ٤)　　(ب) (١ ، −٢ ، ٢)

(حـ) ($\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)　　(ء) ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

الحل

∵ ‖ (٢ ، −٤ ، ٤) ‖ = ٦

∴ جيوب تمام الاتجاه للمتجه = ($\frac{٢}{٦}$ ، $-\frac{٤}{٦}$ ، $\frac{٤}{٦}$) = ($\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) (٣ + ٧ ω + ٣ $\omega^٢$) (٣ − ٧ $\omega^٢$ + ٣ ω) = ...

الحل

المقدار = (٣ (١ + $\omega^٢$) + ٧ ω) (٣ (١ + ω) − ٧ $\omega^٢$)

= (−٣ ω + ٧ ω) (−٣ $\omega^٢$ − ٧ $\omega^٢$) = ٤ ω × (−١٠ $\omega^٢$)

= −٤٠ $\omega^٣$ = −٤٠

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٦ \\ -٣ & ٣ \\ ٤ & -١٢ \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∵ أ على النظم ٣ × ٢　∴ رتبة أعلى درجة محدد يمكن تكوينه منها هو ٢

∴ نوجد : $\begin{vmatrix} ٢ & -٦ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٦ − ١٨ = −١٢ ≠ ٠　∴ ر (أ) > ٢

(٣) مركز الكرة س^٢ + ص^٢ + ع^٢ + ٨ س − ١٢ ص + ٢ ع + ١ = ٠

يساوى　= ....

الحل

∵ مركز الكرة (−$\frac{١}{٢}$ معامل س ، −$\frac{١}{٢}$ معامل ص ، −$\frac{١}{٢}$ معامل ع)

∴ مركز الكرة = (−٤ ، ٦ ، −١)

(٤) أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ...

الحل

∵ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم

∴ ‖ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ‖ = ١٠ ، ‖ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ‖ = ١٠ $\sqrt{٢}$

، ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥°

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{أحـ}}$ = ‖ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ‖ ‖ $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ‖ حتا ٤٥° = ١٠ × ١٠ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠٠

(٥) متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ}$ (٢ ، ٣ ، ٢ $\sqrt{٣}$) يساوى ....

الحل

∵ $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = \sqrt{٢٥} = ٥$

∴ متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = (\frac{٢}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٢}{٥}\sqrt{٣})$

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (−٢ ، −٣ ، ١) على محور س يساوى ....

الحل

بفرض أن : أ (−٢ ، −٣ ، ١) ، ب (١ ، ٠ ، ٠) تقع على محور س ، حـ مسقط أ على محور س

∴ $\overrightarrow{بأ} = (-٢ ، -٣ ، ١) - (١ ، ٠ ، ٠) = (-٣ ، -٣ ، ١)$

∴ ب حـ هو مقياس مسقط $\overrightarrow{بأ}$ على محور س

∴ ب حـ $= \frac{|\overrightarrow{بأ} \bullet \overrightarrow{س}|}{\|\overrightarrow{س}\|} = \frac{|(-٣ ، -٣ ، ١)\bullet(١ ، ٠ ، ٠)|}{\sqrt{١ + ٠ + ٠}} = |-٣| = ٣$

، ∵ $\|\overrightarrow{بأ}\| = \sqrt{٤ + ٩ + ١} = \sqrt{١٩}$ ∴ من هندسة الشكل :

∴ $(أ حـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} - (ب حـ)^{٢} = (\sqrt{١٩})^{٢} - (٣)^{٢} = ١٩ - ٩ = ١٠$

∴ أ حـ $= \sqrt{١٠}$ ∴ طول العمود $= \sqrt{١٠}$ وحدة طول

حل آخر

بفرض أن : θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{بأ}$ و محور س

، ∵ $حتا θ = \frac{|\overrightarrow{بأ} \bullet \overrightarrow{س}|}{\|\overrightarrow{بأ}\| \, \|\overrightarrow{س}\|} = \frac{|(-٣ ، -٣ ، ١)\bullet(١ ، ٠ ، ٠)|}{\sqrt{٩ + ٩ + ١}\,\sqrt{١ + ٠ + ٠}} = \frac{٣}{\sqrt{١٩}}$

∴ $حا θ = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}}$

∴ $أ حـ = \|\overrightarrow{بأ}\| \, حا θ = \sqrt{١٩} \times \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}} = \sqrt{١٠}$

حل ثالث

بفرض أن : θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{بأ}$ و محور س ، ∵ $حا θ = \frac{\|\overrightarrow{بأ} \times \overrightarrow{س}\|}{\|\overrightarrow{بأ}\| \, \|\overrightarrow{س}\|}$

، ∵ $\overrightarrow{بأ} \times \overrightarrow{س} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & -٣ & ١ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = \overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع} = (٠ ، ١ ، ٣)$

∴ $\|\overrightarrow{بأ} \times \overrightarrow{س}\| = \|(٠ ، ١ ، ٣)\| = \sqrt{١٠}$ ∴ $حا θ = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}}$

∴ $أ حـ = \|\overrightarrow{بأ}\| \, حا θ = \sqrt{١٩} \times \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{١٩}} = \sqrt{١٠}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(أ) أوجد أكبر حد فى مفكوك $(٣ + ٢س)^{٦}$ عندما : س = ١

الحل

∵ عدد حدود المفكوك = ٦ + ١ = ٧ (عدد فردى)

∴ أكبر حد هو الحد الذى رتبته $= \frac{٦}{٢} = ٣$ أى : $ع_{٣}$

، $ع_{٣} = {}^{٦}ق_{٢} \times (٢س)^{٢} \times (٣)^{٤}$

و عندما : س = ١ فإن : $ع_{٣} = {}^{٦}ق_{٢} \times (٢)^{٢} \times (٣)^{٤} = ٤٨$

حل آخر

نفرض أن : $ع_{ر+١}$ هو أكبر حد فى المفكوك ∴ $ع_{ر} < ع_{ر+١}$

∴ $\frac{ع_{ر+١}}{ع_{ر}} \geq ١$ ∴ عندما : س = ١ فإن : $\frac{٦ - ر + ١}{ر} \times \frac{٢}{٣} \geq ١$

∴ $\frac{٢(٧ - ر)}{٣ر} \geq ١$ ∴ $١٤ - ٢ر \geq ٣ر$

∴ $١٤ - ٢ر \geq ٣ر$ ∴ $٥ر \leq ١٤$ ∴ $ر \leq \frac{١٤}{٥}$

∴ ر = ٢ ∴ أكبر هو $ع_{٣}$

، $ع_{٣} = {}^{٦}ق_{٢} \times (٢)^{٢} \times (٣)^{٤} = ٤٨٦٠$

(٢) أوجد حجم متوازى السطوح الذى فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ} = (١ ، -١ ، ٢)$ ، $\overrightarrow{ب} = (٣ ، -٢ ، ٠)$
$\overrightarrow{حـ} = (٠ ، ٢ ، ٤)$

الحل

حجم متوازى السطوح = $|\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ}|$

، ∵ $\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{حـ} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$

$= ١(-٨ + ٠) + ١(١٢ + ٠) + ٢(٦ + ٠) = ١٦$

∴ حجم متوازى السطوح = ١٦ وحدة حجم

السؤال الرابع :

(أ) أوجد جذور المعادلة : $ع^{٤} + ٤ = $ صفر على الصورة المثلثية

الحل

$ع^{٤} = -٤ = ٤ (حتا\ \pi + ت\ حا\ \pi)$

∴ $ع = (٤ (حتا\ \pi + ت\ حا\ \pi))^{\frac{١}{٤}} = ((\sqrt{٢})^{٤})^{\frac{١}{٤}} (حتا\ \pi + ت\ حا\ \pi)^{\frac{١}{٤}}$

$= \sqrt{٢} \left(حتا\ \frac{\pi + ٢ر\pi}{٤} + ت\ حا\ \frac{\pi + ٢ر\pi}{٤}\right)$

حيث : ر = ٠ ، ١ ، -١ ، -٢

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_{١}^{\frac{١}{٤}} = \sqrt{٢} (حتا\ \frac{١}{٤}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٤}\pi)$

عندما : ر = ١ فإن : $ع_{٢}^{\frac{١}{٤}} = \sqrt{٢} (حتا\ \frac{٣}{٤}\pi + ت\ حا\ \frac{٣}{٤}\pi)$

عندما : ر = -١ فإن : $ع_{٣}^{\frac{١}{٤}} = \sqrt{٢} (حتا (-\frac{١}{٤}\pi) + ت\ حا (-\frac{١}{٤}\pi))$

عندما : ر = -٢ فإن : $ع_{٤}^{\frac{١}{٤}} = \sqrt{٢} (حتا (-\frac{٣}{٤}\pi) + ت\ حا (-\frac{٣}{٤}\pi))$

(٢) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{حـ}$ ثلاثة متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى

أوجد : (أ) $\|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{حـ}\|$

(ب) إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (\frac{١}{٣} ، -\frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣})$ ، $\overrightarrow{ب} = (\frac{٣}{٥} ، ٠ ، -\frac{٤}{٥})$

أوجد $\overrightarrow{حـ}$

الحل

(أ) $(\|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{حـ}\|)^{٢} = (٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{حـ}) \bullet (٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{حـ})$

$= ٤\|\overrightarrow{أ}\|^{٢} - ٢\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} + ٦\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{حـ} - ٢\overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{أ} + \|\overrightarrow{ب}\|^{٢}$

$- ٣\overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{حـ} + ٦\overrightarrow{حـ} \bullet \overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{حـ} \bullet \overrightarrow{ب} + ٤\|\overrightarrow{حـ}\|^{٢}$

، ∵ المتجهات متعامدة مثنى مثنى

∴ $\|\overrightarrow{أ}\| = \|\overrightarrow{ب}\| = \|\overrightarrow{حـ}\| = ١$ ،

$\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{حـ} \bullet \overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب} \bullet \overrightarrow{حـ} = \overrightarrow{حـ} \bullet \overrightarrow{ب} = ٠$.

∴ $(\|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{حـ}\|)^{٢} = ٤ + ١ + ٩ = ١٤$

∴ $\|٢\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{حـ}\| = \sqrt{١٤}$

(ب) نفرض أن : $\overrightarrow{حـ} = (ك ، ل ، م)$

، ∵ $\overrightarrow{حـ}$ متجه وحدة ∴ $ك^{٢} + ل^{٢} + م^{٢} = ١$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{حـ} \perp \overrightarrow{أ}$ ∴ $\frac{١}{٣}ك - \frac{٢}{٣}ل + \frac{٢}{٣}م = ٠$ بالضرب × ٣

∴ $ك - ٢ل + ٢م = ٠$ (٢)

، ∵ $\overrightarrow{حـ} \perp \overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{٣}{٥}ك - \frac{٤}{٥}م = ٠$

و منها : $ك = \frac{٤}{٣}م$ (٣) بالتعويض من (٣) فى (٢) ينتج :

$\frac{٤}{٣}م - ٢ل + ٢م = ٠$ ∴ $\frac{١٠}{٣}م = ٢ل$ أى : $ل = \frac{٥}{٣}م$

بالتعويض فى (أ) ينتج :

$\frac{١٦}{٩}م^٢ + \frac{٢٥}{٩}م^٢ + م^٢ = ١$ ∴ $\frac{٥٠}{٩}م^٢ = ١$

و منها : $م = \pm \frac{٣}{١٠}\sqrt{٢}$ ∴ $ك = \pm \frac{٤}{١٠}\sqrt{٢}$ ، $ل = \pm \frac{٥}{١٠}\sqrt{٢}$

∴ $\overrightarrow{حـ} = \pm \frac{١}{١٠}\sqrt{٢}\ (٤ ، ٥ ، ٣)$

السؤال الخامس :

(أ) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية و أكتب الحل إن وجد :

س + ص = ٢ ، ٢س + ٣ص = ٥

الحل

∵ $أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \end{array}\right)$ ، $أ^*$ على النظم ٢ × ٣

، ∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٣ - ٢ = ١ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٢

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من $أ^*$ هى ٢

و قيمة جميع هذه المحددات ≠ ٠ ∴ ر ($أ^*$) = ٢

∴ ر (أ) = ر ($أ^*$) = ٢ = عدد المجاهيل ∴ للمجموعة حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س~ = ب حيث :

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $س\sim = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix}$ ، $أ^{-١} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \frac{١}{|أ|}\begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ٥ \end{pmatrix} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} ١ \\ ١ \end{pmatrix}$ ∴ س = ١ ، ص = ١

حل آخر

نجرى تحويلات أولية على صفوف $أ^*$ (كما فى المحددات)

$أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٥ \end{array}\right)$ بإجراء : $ص_٢ - ٢ص_١$ ∴ $أ^* = \left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \end{array}\right)$

∴ من الصف الثانى : ص = ١

، من الصف الأول : س + ص = ٢ ∴ س = ١

(٢) إذا كان : $ع = حا\ \frac{١}{٩}\pi + ت\ حتا\ \frac{١}{٩}\pi$ أوجد ($\overline{ع}$) على الصورة المثلثية ثم أوجد الجذور التكعيبية للعدد $(\overline{ع})^٩$

الحل

∵ $ع = حا\ \frac{١}{٩}\pi + ت\ حتا\ \frac{١}{٩}\pi$

∴ $\overline{ع} = حا\ \frac{١}{٩}\pi - ت\ حتا\ \frac{١}{٩}\pi = حتا\ (-\frac{١}{٢}\pi + \frac{١}{٩}\pi) + ت\ حا\ (-\frac{١}{٢}\pi + \frac{١}{٩}\pi)$

$= حتا\ (-\frac{٧}{١٨}\pi) + ت\ حا\ (-\frac{٧}{١٨}\pi)$

∴ $(\overline{ع})^٩ = (\ حتا\ (-\frac{٧}{١٨}\pi) + ت\ حا\ (-\frac{٧}{١٨}\pi)\ )^٩$

$= حتا\ (-\frac{٧}{٢}\pi) + ت\ حا\ (-\frac{٧}{٢}\pi) = (\ حتا\ \frac{١}{٢}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٢}\pi\ )$

الجذور التكعيبية للعدد $(\overline{ع})^٩$ هى :

$حتا\ \frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٣} + ت\ حا\ \frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٣}$ حيث : ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_١^{\frac{١}{٣}} = حتا\ \frac{١}{٦}\pi + ت\ حا\ \frac{١}{٦}\pi$

عندما : ر = ١ فإن : $ع_٢^{\frac{١}{٣}} = حتا\ \frac{٥}{٦}\pi + ت\ حا\ \frac{٥}{٦}\pi$

عندما : ر = −١ فإن : $ع_٣^{\frac{١}{٣}} = حتا\ (-\frac{١}{٢}\pi) + ت\ حا\ (-\frac{١}{٢}\pi)$

الاختبار الخامس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $^{\text{٢ن} - ١}\text{ل}_{\text{ن} - ١} = ٩ \; ^{\text{٢ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ فإن : ن = ...

(أ) ١   (ب) ٢   (حـ) ٣   (ء) ٤

الحل

∵ $٣٦ \; ^{\text{٢ن} - ١}\text{ل}_{\text{ن} - ١} = ٩ \; ^{\text{٢ن}}\text{ل}_{\text{ن}}$ ∴ $\dfrac{٤ \; \underline{|\text{٢ن} - ١}}{\underline{|\text{ن}}} = \dfrac{\underline{|\text{٢ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$

∴ $٤ \; \underline{|\text{٢ن} - ١} = \underline{|\text{٢ن}} = \text{٢ن} \; \underline{|\text{٢ن} - ١}$ و منها : ٢ن = ٤ ∴ ن = ٢

(٢) إذا كان للمعادلتين : س + ص = ٢ ، ٢س + ك ص = ٤ أكثر من حل فإن : ك = ...

(أ) −٢   (ب) −١   (حـ) ١   (ء) ٢

الحل

∵ $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & \text{ك} \end{pmatrix}$ ، $\text{أ}^{*} = \left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & \text{ك} & ٤ \end{array}\right)$ ، أ^{*} على النظم ٢ × ٣

، و المعادلتان غير متجانستين ، و لهما أكثر من حل

، و عدد المجاهيل = ٢   ∴ ر (أ) = ر (أ^{*}) = ١

، رتبة أعلى محدد يمكن تكوينه من أ^{*} هى ٢ ، و قيمته = ٠

∴ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & \text{ك} \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ك − ٢ = ٠   ومنها : ك = ٢

(٣) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أب}} = -٣\,\vec{\text{س}} + ٣\,\vec{\text{ص}} + ٧\,\vec{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{بحـ}} = \vec{\text{ص}} + ٥\,\vec{\text{ع}}$ فإن : $\| \overrightarrow{\text{أحـ}} \|$ = ...

(أ) ١٣   (ب) ١٢   (حـ) ١٠   (ء) ٩

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أحـ}} = \overrightarrow{\text{بحـ}} - \overrightarrow{\text{بأ}} = \overrightarrow{\text{بحـ}} + \overrightarrow{\text{أب}} = -٣\,\vec{\text{س}} + ٤\,\vec{\text{ص}} + ١٢\,\vec{\text{ع}}$

∴ $\| \overrightarrow{\text{أحـ}} \| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

(٤) إذا كان : $\vec{\text{أ}}$ = (−٧ ، ٣ ، ١٠) ، $\vec{\text{ب}}$ = (−٤ ، −١ ، −٢)

فإن : متجه الوحدة فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ = ...

(أ) $\left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣} \right)$ (ب) $\left(\frac{٣}{١٣} ، -\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣} \right)$

(حـ) $\left(-\frac{٣}{١٣} ، \frac{٤}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣} \right)$ (ء) $\left(-\frac{٣}{١٣} ، -\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣} \right)$

الحل

$\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−٤ ، −١ ، −٢) − (−٧ ، ٣ ، ١٠) = (٣ ، −٤ ، −١٢)

∴ $\| \overrightarrow{\text{أب}} \| = \sqrt{٩ + ١٦ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

∴ متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\| \overrightarrow{\text{أب}} \|} = \left(\frac{٣}{١٣} ، -\frac{٤}{١٣} ، -\frac{١٢}{١٣} \right)$

(٥) إذا كان : $\vec{\text{أ}}$ = (١ ، −١ ، ٢) ، $\vec{\text{ب}}$ = (٣ ، −٢ ، ٠) ، $\vec{\text{حـ}}$ = (٠ ، ٢ ، ٤) فإن : $\vec{\text{أ}} \bullet \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{حـ}}$ = ...

(أ) ١٠   (ب) ١٢   (حـ) ١٤   (ء) ١٦

الحل

$\vec{\text{أ}} \bullet \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} ١ & -١ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١(-٨ + ٠) + ١(١٢ + ٠) + ٢(٦ + ٠) = ١٦$

(٦) طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، ٠ ، ٢) على المستقيم $\dfrac{\text{س} - ٢}{٢} = \dfrac{\text{ص} + ١}{-١} = \dfrac{\text{ع} - ٣}{-٢}$ يساوى ....

(أ) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٤}$ (ب) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٥}$ (حـ) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٣}$ (ء) $\dfrac{\sqrt{٢٦}}{٦}$

الحل

أحمد الشنتورى

متجه اتجاه المستقيم ($\vec{هـ}$) = (٢ ، –١ ، –٢)

النقطة ب (٢ ، –١ ، ٣) ∈ المستقيم

بفرض أن حـ مسقط أ على المستقيم

، θ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ب أ}$ و المستقيم ، أ (١ ، ٠ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{ب أ}$ = (١ ، ٠ ، ٢) – (٢ ، –١ ، ٣) = (–١ ، ١ ، –١)

، ∵ جتا θ = $\frac{|\overrightarrow{ب أ} \bullet \vec{هـ}|}{\|\overrightarrow{ب أ}\| \, \|\vec{هـ}\|}$ = $\frac{|(-١ ، ١ ، -١) \bullet (٢ ، -١ ، -٢)|}{\sqrt{١+١+١}\,\sqrt{٤+١+٤}}$ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ ∴ حا θ = $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣\sqrt{٣}}$

، ∵ $\|\overrightarrow{ب أ}\|$ = $\sqrt{١+١+١}$ = $\sqrt{٣}$

∴ أ حـ = $\|\overrightarrow{ب أ}\|$ حا θ = $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣\sqrt{٣}}$ = $\frac{\sqrt{٢٦}}{٣}$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $(٢ + \frac{٣}{\omega})(٢ + \frac{٣}{\omega^٢})(٣ - \frac{٢}{\omega})(٣ - \frac{٢}{\omega^٢})$ = ...

الحل

المقدار = $(٢ + ٣\omega^٢)(٢ + ٣\omega)(٣ - ٢\omega^٢)(٣ - ٢\omega)$

= $(٤ + ٦\omega + ٦\omega^٢ + ٩)(٩ - ٦\omega - ٦\omega^٢ + ٤)$

= $(١٣ + ٦(\omega + \omega^٢))(١٣ - ٦(\omega + \omega^٢))$

= (١٣ – ٦) (١٣ + ٦) = ٧ × ١٩ = ١٣٣

(٢) إذا كان : معاملا $ع_٦$ ، $ع_{١٦}$ فى مفكوك $(أ + ب)^{ن}$ متساويين

فإن قيمة ن = ...

الحل

∵ معامل $ع_٦$ = معامل $ع_{١٦}$ ∴ $^{ن}ق_٥ = {}^{ن}ق_{١٥}$

∴ ن = ٥ + ١٥ = ٢٠

(٣) جيب تمام الزاوية المحصورة بين المستقيمين :

$\frac{س}{١} = \frac{ص}{-٢} = \frac{ع + ١}{-٢}$ ، $\frac{س}{١} = \frac{ص - ٢}{-٢} = \frac{ع}{٢}$

يساوى ....

الحل

متجه اتجاه المستقيمين هما : (١ ، –٢ ، –٢) ، (١ ، –٢ ، ٢)

بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ

∴ جتا θ = $\frac{|(١ ، -٢ ، -٢) \bullet (١ ، -٢ ، ٢)|}{\sqrt{١+٤+٤}\,\sqrt{١+٤+٤}}$ = $\frac{١}{٩}$

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا كان : $\|\overrightarrow{ب حـ}\|$ = $\sqrt{٦}$ ،

$\|\overrightarrow{أ حـ}\|$ = $\sqrt{٢}$ ،

= (–١ ، ٠ ، ١) : فإن

$\overrightarrow{ب أ} \bullet \overrightarrow{ب حـ}$ = ...

أ ، ب ، حـ ، $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٦}$ ، أحمد الشنتورى

الحل

$\|\overrightarrow{ب أ}\|$ = $\sqrt{١ + ٠ + ١}$ = $\sqrt{٢}$

∵ حتا ب = $\frac{٢ + ٦ - ٢}{٢\sqrt{٢}\,\sqrt{٦}}$ = $\frac{٣}{٤\sqrt{٣}}$ " قانون جيب التمام "

∴ $\overrightarrow{ب أ} \bullet \overrightarrow{ب حـ}$ = $\|\overrightarrow{ب أ}\| \, \|\overrightarrow{ب حـ}\|$ حتا ب = $\sqrt{٢}$ × $\sqrt{٦}$ × $\frac{٣}{٤\sqrt{٣}}$ = ٣

(٥) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، ٤ ، –٥)

و تمس المستوى ص ع

الحل

∵ الكرة تمس المستوى ص ع ∴ نق (للدائرة) = | ٣ | = ٣ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع + ٥)^٢ = ٩$

(٦) الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، –١ ، ٤) و متجه اتجاهه $\overrightarrow{ه} = (٤ ، ٧ ، ١)$ هى ....

الحل

الصورة المتجهة لمعادلة المستقيم : $\overrightarrow{ر} = (٢ ، -١ ، ٤) + ك (٤ ، ٧ ، ١)$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) فى مفكوك $(١ + س)^{١٨}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان معاملا الحدين $ع_{٢ر+٤}$ ، $ع_{ر-٢}$ متساويين ، أوجد قيمة ر

الحل

∵ معامل $ع_{٢ر+٤}$ = معامل $ع_{ر-٢}$ ∴ $^{١٨}ق_{٢ر+٣} = {}^{١٨}ق_{ر-٣}$

∴ ٢ر + ٣ = ر – ٣ ∴ ر = –٦ مرفوض

أو ٢ر + ٣ + ر – ٣ = ١٨ ∴ ر = ٦

(٢) إذا كان : طول العمود المرسوم من النقطة أ (٠ ، –١ ، ٢) على المستوى $\sqrt{٢}$ س + ص – ع + ك = ٠ يساوى ٢ وحدة طول أوجد قيمة ك

الحل

∵ طول العمود = $\frac{| ٠ \times \sqrt{٢} - ١ \times ١ + ٢ \times -١ + ك |}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$ ∴ $٢ = \frac{| -٣ + ك |}{٢}$

∴ | –٣ + ك | = ٤ ∴ –٣ + ك = ٤ و منها : ك = ٧

أو –٣ + ك = –٤ و منها : ك = –١

السؤال الرابع :

(١) حل المعادلات الآتية : ٢س + ص – ٢ع = ١٠ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ ، ٥س + ٤ص + ٣ع = ٦ باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix} \quad ∴ |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix} =$$

∴ |أ| = ٢ (٦ – ٨) – ١ (٣ – ١٠) – ٢ (٤ – ١٠) = ١٥

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ & -٢ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٥ & ٤ & ٣ \end{pmatrix} ، \quad س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، \quad ب = \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١ \\ ٦ \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{أ_{١١}}$ = ٦ – ٨ = –٢ ،

$\overline{أ_{١٢}}$ = – (٣ – ١٠) = ٧ ، $\overline{أ_{١٣}}$ = ٤ – ١٠ = –٦ ،

$\overline{أ_{٢١}}$ = – (٣ + ٨) = –١١ ، $\overline{أ_{٢٢}}$ = ٦ + ١٠ = ١٦ ، $\overline{أ_{٢٣}}$ = – (٨ – ٥) = –٣ ،

$\overline{أ_{٣١}}$ = ٢ + ٤ = ٦ ، $\overline{أ_{٣٢}}$ = – (٤ + ٢) = –٦ ، $\overline{أ_{٣٣}}$ = ٤ – ١ = ٣

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ٧ & -٦ \\ -١١ & ١٦ & -٣ \\ ٦ & -٦ & ٣ \end{pmatrix}$

، $أ^{مد} = \begin{pmatrix} -٢ & -١١ & ٦ \\ ٧ & ١٦ & -٦ \\ -٦ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} -٢ & -١١ & ٦ \\ ٧ & ١٦ & -٦ \\ -٦ & -٣ & ٣ \end{pmatrix}$ ∴ $س = أ^{-١} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} -٢ & -١١ & ٦ \\ ٧ & ١٦ & -٦ \\ -٦ & -٣ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١٠ \\ ١ \\ ٦ \end{pmatrix} = \frac{١}{١٥} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٥٠ \\ -٤٥ \end{pmatrix}$

∴ س = $\frac{١}{٣}$ ، ص = $\frac{١٠}{٣}$ ، ع = –٣ ،

مجموعة الحل = { ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١٠}{٣}$ ، –٣) }

(٢) إذا كان : $ع_١ = \frac{٦ + ٤ت}{١ + ت}$ ، $ع_٢ = \frac{٢٦}{٥ - ت}$

، ع = ٤ ($ع_١ - ع_٢$) أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

$$ع_١ = \frac{٦+٤ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت} = \frac{٦ - ٦ت + ٤ت - ٤ت}{٢} = \frac{١٠ - ٢ت}{٢} = ٥ - ت$$

$$، \quad ع_٢ = \frac{٢٦}{٥-ت} \times \frac{٥+ت}{٥+ت} = \frac{٢٦(٥+ت)}{٢٦} = ٥ + ت$$

$$\therefore ع = ٤(ع_١ - ع_٢) = ٤(٥ - ت - ٥ - ت) = -٨ت$$

$$= ٨ (\text{حتا}(-\tfrac{١}{٢}\pi) + ت \text{ حا}(-\tfrac{١}{٢}\pi))$$

$$، \quad ع^{\frac{١}{٣}} = ٢ (\text{حتا} \frac{(-\tfrac{١}{٢}\pi) + ٢ ر \pi}{٣} + ت \text{ حا} \frac{(-\tfrac{١}{٢}\pi) + ٢ ر \pi}{٣})$$

، ر = ٠ ، ١ ، −١

عندما : ر = ٠ $\therefore ع_١^{\frac{١}{٣}} = ٢(\text{حتا}(-\tfrac{١}{٦}\pi) + ت \text{ حا}(-\tfrac{١}{٦}\pi)) = ٢ هـ^{-\frac{١}{٦}\pi ت}$

عندما : ر = ١ $\therefore ع_٢^{\frac{١}{٣}} = ٢(\text{حتا} \tfrac{١}{٢}\pi + ت \text{ حا} \tfrac{١}{٢}\pi) = ٢ هـ^{\frac{١}{٢}\pi ت}$

عندما : ر = −١ $\therefore ع_٣^{\frac{١}{٣}} = ٢(\text{حتا}(-\tfrac{٥}{٦}\pi) + ت \text{ حا}(-\tfrac{٥}{٦}\pi)) = ٢ هـ^{-\frac{٥}{٦}\pi ت}$

السؤال الخامس :

(أ) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} أ^٢+١ & أب & أجـ \\ أب & ب^٢+١ & ب جـ \\ أجـ & ب جـ & جـ^٢+١ \end{vmatrix} = أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢ + ١$$

الحل

بكتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الأول)

$$\text{الطرف الأيمن} = \begin{vmatrix} أ^٢ & أب & أجـ \\ أب & ب^٢+١ & ب جـ \\ أجـ & ب جـ & جـ^٢+١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & أب & أجـ \\ ٠ & ب^٢+١ & ب جـ \\ ٠ & ب جـ & جـ^٢+١ \end{vmatrix}$$

بأخذ أ مشتركاً من الصف الأول ، و العمود الأول

، و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثانى)

$$\text{الطرف الأيمن} = أ^٢ \begin{vmatrix} ١ & ب & جـ \\ ب & ب^٢+١ & ب جـ \\ جـ & ب جـ & جـ^٢+١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & أب & أجـ \\ ٠ & ب^٢ & ب جـ \\ ٠ & ب جـ & جـ^٢+١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & ٠ & أجـ \\ ٠ & ١ & ب جـ \\ ٠ & ٠ & جـ^٢+١ \end{vmatrix}$$

بإجراء : ($ع_٢ - ب ع_١$) فى $ع_٢$ ، ($ع_٣ - جـ ع_١$) فى $ع_٣$ على المحدد الأول ،

بأخذ ب مشتركاً من الصف الثانى ، و العمود الثانى بالمحدد الثانى

المحدد الثالث على الصورة المثلثية ∴ قيمته = جـ² + ١

$$\text{الطرف الأيمن} = أ^٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ب & ١ & ٠ \\ جـ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & أجـ \\ ٠ & ١ & جـ \\ ٠ & جـ & جـ^٢+١ \end{vmatrix} + جـ^٢ + ١$$

المحدد الأول على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ١ ،

و كتابة المحدد الثانى كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

$$\text{الطرف الأيمن} = أ^٢ \times ١ + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & جـ & ١ \end{vmatrix} + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & أجـ \\ ٠ & ١ & جـ \\ ٠ & جـ & جـ^٢ \end{vmatrix} + جـ^٢ + ١$$

بتبديل عناصر ($ع_٢ - ع_٣$) ثم عناصر ($ص_٣ - ص_٢$) على المحدد الأول

، بإجراء ($جـ ع_٢ - ع_٣$) فى $ع_٣$ على المحدد الثانى

$$\text{الطرف الأيمن} = أ^٢ + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ & أ \\ ٠ & ١ & جـ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{vmatrix} + ب^٢ \begin{vmatrix} ١ & أ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & جـ & ٠ \end{vmatrix} + جـ^٢ + ١$$

المحدد الأول على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ١ ،

عناصر $ع_٣$ المحدد الثانى كلها أصفار ∴ قيمته = ٠

الطرف الأيمن = $أ^٢ + ب^٢ + ب^٢ × ٠ + حـ^٢ + ١ = أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢ + ١$ = الطرف الأيسر

(٢) إذا قطع المستوى : ٢ س − ص − ٢ع + ١٢ = ٠ الكرة :

$(س + ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع − ١)^٢ = ١٥$ أوجد مساحة المقطع الناتج

الحل

المستوى يقطع الكرة التى مركزها م فى دائرة مركزها ن حيث : م (−٣ ، −٢ ، ١)

و يكون : أ ن = طول نصف قطر الدائرة

، متجه الاتجاه العمودى على المستوى (٢ ، −١ ، −٢)

∴ م ن = طول العمود المرسوم من م على المستوى

$$= \frac{|٢ × (−٣) − ١ × (−٢) − ٢ × ١ + ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}} = \frac{|−٦ + ٢ − ٢ + ١٢|}{\sqrt{٩}}$$

$= \frac{٦}{٣} = ٢$ وحدة طول

، م أ = طول نصف قطر الكرة = $\sqrt{١٥}$ وحدة طول

من هندسة الشكل :

$(أ ن)^٢ = (أ م)^٢ − (م ن)^٢ = ١٥ − ٤ = ١١$

∴ أ ن = $\sqrt{١١}$ وحدة طول ، مساحة الدائرة = $\pi نق^٢ = ١١ \pi$ وحدة مربعة

الاختبار السادس

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $ق^{ن}_{٣} : ق^{ن-١}_{٤} = ٨ : ٥$ فإن : قيمة ن = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (حـ) ٨ (ء) ٩

الحل

∵ $\frac{ق^{ن}_{٣}}{ق^{ن-١}_{٤}} = \frac{٨}{٥}$ ∴ $\frac{|ن}{|ن−٣ \; |٣} × \frac{|ن−٥ \; |٤}{|ن−١} = \frac{٨}{٥}$

∴ $\frac{ن \; |ن−١}{(ن−٣)(ن−٤) \; |ن−٥ \; |٣} × \frac{٤ \; |ن−٥ \; |٣}{|ن−١} = \frac{٨}{٥}$

و منها : ٢ (ن − ٣) (ن − ٤) = ٥ ن

∴ $٢ن^٢ − ١٤ ن + ٢٤ = ٥ ن$ أى : $٢ن^٢ − ١٩ ن + ٢٤ = ٠$

∴ (٢ن − ٣) (ن − ٨) = ٠ و منها : ن = $\frac{٣}{٢}$ مرفوض ، ن = ٨

(٢) معامل الحد الأوسط فى مفكوك $(٣ س − \frac{١}{٦})^{١٠}$ يساوى ....

(أ) $−\frac{٦٣}{٨}$ (ب) $−\frac{٦٧}{٨}$ (حـ) $\frac{٦٣}{٨}$ (ء) $\frac{٦٧}{٨}$

الحل

رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٠}{٢} + ١ = ٦$

∴ معامل الحد الأوسط = معامل $ع_٦$ = $ق^{١٠}_{٥} × (−\frac{١}{٦})^{٥} × (٣)^{٥} = −\frac{٦٣}{٨}$

(٣) قياس الزاوية المحصورة بين المستويين س + ص − ١ = ٠ ، ص + ع − ١ = ٠ يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٦٠° (ء) ٧٥°

الحل

∵ متجه الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما : (١ ، ١ ، ٠) ، (٠ ، ١ ، ١) ، بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ $حتا θ = \frac{|(١ ، ١ ، ٠) \bullet (٠ ، ١ ، ١)|}{\sqrt{١ + ١ + ٠} \; \sqrt{٠ + ١ + ١}} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

(٤) إذا كان : أ⃗ = (٢ ، ١ ، −٢) ، أ⃗ + ب⃗ = أ⃗ × ب⃗
فإن : ب⃗ = ...

(أ) (٢ ، −١ ، −٢)   (ب) (٢ ، ١ ، −٢)
(حـ) (−٢ ، −١ ، ٢)   (ء) (−٢ ، −١ ، −٣)

الحل

بفرض أن : ب⃗ = (ك ، ل ، م)
∴ (٢ ، ١ ، −٢) + (ك ، ل ، م) = (٢ ، ١ ، −٢) × (ك ، ل ، م)
∴ (٢ + ك) س⃗ + (١ + ل) ص⃗ + (−٢ + م) ع⃗ = | س⃗ ص⃗ ع⃗ ، ٢ ١ −٢ ، ك ل م |
= (م + ٢ ل) س⃗ − (٢ م + ٢ ك) ص⃗ + (٢ ل − ك) ع⃗
∴ ٢ + ك = م + ٢ ل (١) ، ١ + ل = −٢ م − ٢ ك (٢)
، −٢ + م = ٢ ل − ك (٣) بطرح (٣) من (١) ينتج :
٤ + ك − م = م + ك و منها : م = ٢
بضرب (٣) × ٢ و طرحها من (٢) ينتج : ٥ + ل − ٢ م = −٢ م − ٤ ل
و منها : ل = −١ بالتعويض فى (١) ينتج : ك = −٢
∴ ب⃗ = (−٢ ، −١ ، ٢)

(٥) إذا كان : أ⃗ (−٢ ، ٠ ، ٣) ، ب⃗ (٤ ، ٢ ، −٥) فإن :
|| أب⃗ || = ... وحدة طول

(أ) √١٢   (ب) √٤٠   (حـ) √٤٤   (ء) √١٠٤

الحل

أب⃗ = (٤ ، ٢ ، −٥) − (−٢ ، ٠ ، ٣) = (٦ ، ٢ ، −٨)
∴ || أب⃗ || = √(٣٦ + ٤ + ٦٤) = √١٠٤

(٦) إذا كان : أ⃗ ⊥ ب⃗ ، أ⃗ ⊥ حـ⃗ و كان : ب⃗ = (٢ ، ٣ ، ١) ، حـ⃗ = (١ ، ٢ ، ١) ، || أ⃗ || = ٤√٢ فإن : أ⃗ = ...

(أ) (٢ ، ٣ ، ١)   (ب) ± (−٤ ، ٠ ، ٤)
(حـ) (٤ ، ٤ ، ٠)   (ء) (٠ ، −٤ ، ٤)

الحل

بفرض أن : أ⃗ = (ك ، ل ، م)
∵ || أ⃗ || = ٤√٢ ∴ ك² + ل² + م² = ٣٢ (١)
، ∵ أ⃗ ⊥ ب⃗ ∴ (ك ، ل ، م) • (٢ ، ٣ ، ١) = ٠
∴ ٢ ك + ٣ ل + م = ٠ (٢)
، ∵ أ⃗ ⊥ حـ⃗ ∴ (ك ، ل ، م) • (١ ، ٢ ، ١) = ٠
∴ ك + ٢ ل + م = ٠ (٣)
بضرب (٣) × ٢ و طرحها من (٢) ينتج : ل = ٠
بالتعويض فى (٢) ينتج : ك = − م بالتعويض فى (١) ينتج :
ك² + ٠ + ك² = ٣٢ ∴ ٢ ك² = ٣٢ ∴ ك² = ١٦ ∴ ك = ± ٤
∴ م = ∓ ٤ ∴ أ⃗ = ± (−٤ ، ٠ ، ٤)

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $(1 - \frac{1}{\omega})(1 - \frac{1}{\omega^2})(1 - \frac{1}{\omega^4})(1 - \frac{1}{\omega^8})$ ..... إلى ١٠ عوامل = ...

الحل

المقدار = $((1 - \omega^2)(1 - \omega))((1 - \omega^2)(1 - \omega))$ .... إلى ١٠ عوامل
= $(1 - \omega - \omega^2 + 1)(1 - \omega - \omega^2 + 1)$ .... إلى ٥ عوامل
= $(2 - (\omega + \omega^2))(2 - (\omega + \omega^2))$ .... إلى ٥ عوامل
= $(2 - (-1))(2 - (-1))$ .... إلى ٥ عوامل
= ٣ × ٣ .... إلى ٥ عوامل = ٢٤٣

(٢) رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} -١ & ٠ & ٠ \\ -١ & -١ & ٠ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

∵ محدد المصفوفة يكون على الصورة المثلثية

و تكون قيمته = ١ ≠ ٠   ∴ رتبة المصفوفة = ٣

(٣) متجه اتجاه المستقيم : $\frac{س + ٢}{٣} = \frac{ع - ١}{٢}$ يساوى ....

الحل

متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، ٠ ، ٢)

(٤) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\frac{س}{أ} = \frac{ص}{٢} = \frac{ع}{١}$ ، $\frac{س}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع}{-١}$ يساوى ٦٠° فإن : قيمة أ = ... يساوى = ...

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمين هما : (أ ، ٢ ، ١) ، (٢ ، ١ ، -١)

، بفرض أن : قياس الزاوية بين المستقيمين = θ   ∴ حتا θ = حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{|(أ ، ٢ ، ١) \bullet (٢ ، ١ ، -١)|}{\sqrt{أ^٢ + ٤ + ١}\ \sqrt{٤ + ١ + ١}}$ و منها بالتربيع ينتج :

٤ (٢ أ + ١)^٢ = ٦ (أ^٢ + ٥)   ∴ ١٦ أ^٢ + ١٦ أ + ٤ = ٦ أ^٢ + ٣٠

∴ ١٠ أ^٢ + ١٦ أ − ٢٦ = ٠   ∴ ٥ أ^٢ + ٨ أ − ١٣ = ٠

∴ (أ − ١) (٥ أ + ١٣) = ٠   ∴ أ = ١   أو   أ = $-\frac{١٣}{٥}$

(٥) إذا كان : أ (١ ، ٠ ، ٠) ، ب (٠ ، ١ ، ١) ينتميان للمستوى ل س + ص + م ع + ٢ = ٠ فإن : ل + م = ...

الحل

∵ أ تنتمى للمستقيم   ∴ بالتعويض ينتج : ل + ٢ = ٠   ∴ ل = − ٢

، ∵ ب تنتمى للمستقيم   ∴ بالتعويض ينتج : ١ + م + ٢ = ٠   ∴ م = − ٣

∴ ل + م = − ٥

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، − ١ ، − ٢)

فإن : ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) • ($\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$) = ...

الحل

($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) • ($\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$) = ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$) • (− ($\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$))

= − ($\| \overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} \|$)^٢

، ∵ $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & -١ & -٢ \end{vmatrix}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ − $\overrightarrow{ع}$

∴ المقدار = − ($\|$ (٢ ، ٦ ، − ١) $\|$)^٢ = − ٤١

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كانت معاملات الحدود الرابع و الخامس و السادس فى مفكوك (٢ س + ص)^ن حسب قوى س التنازلية تكون متتابعة حسابية أوجد قيمة ن

الحل

∵ معامل $ح_٤$ ، معامل $ح_٥$ ، معامل $ح_٦$ فى تتابع حابى

∴ معامل $ح_٤$ + معامل $ح_٦$ = ٢ معامل $ح_٥$ بالقسمة ÷ معامل $ح_٥$ ينتج :

∴ $\frac{معامل\ ح_٤}{معامل\ ح_٥} + \frac{معامل\ ح_٦}{معامل\ ح_٥} = ٢$ ∴ $\frac{٤}{ن - ٤ + ١} \times \frac{٢}{١} + \frac{ن - ٥ + ١}{٥} \times \frac{١}{٢} = ٢$

∴ $\frac{٨}{ن - ٣} + \frac{ن - ٤}{١٠} = ٢$ بالضرب × ١٠ (ن − ٣) ينتج :

٨٠ + (ن − ٣) (ن − ٤) = ٢٠ (ن − ٣)

∴ ٨٠ + ن^٢ − ٧ ن + ١٢ = ٢٠ ن − ٦٠

∴ $ن^٢ - ٢٧ ن + ١٥٢ = ٠$ ∴ $(ن - ١٩) (ن - ٨) = ٠$

∴ $ن = ١٩$ أو $ن = ٨$

(٢) كرة مركزها (١ ، ٢ ، ١) تمس سطح المستوى $س + ص + ع = ١$ أوجد معادلة الكرة

الحل

∵ الكرة تمس المستوى

∴ نق (طول نصف قطر الكرة) = طول العمود المرسوم من مركز الكرة على المستوى

∴ $نق = \frac{| ١ \times ١ + ٢ \times ١ + ١ \times ١ - ١ |}{\sqrt{١ + ١ + ١}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٣$

السؤال الرابع :

(١) أبحث إمكانية حل المعادلات الآتية : $٤ س + ٣ ص - ٥ ع = ٦$ ، $٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢$ ، $٥ س - ٢ ص - ٧ ع = ١$

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix} \quad |أ| = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{vmatrix}$$

∴ $|أ| = ٤ (-١٤ + ٨) - ٣ (-٢١ - ٢٠) - ٥ (-٦ - ١٠) = ١٧٩$

∴ $|أ| \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

، المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٥ \\ ٣ & ٢ & ٤ \\ ٥ & -٢ & -٧ \end{pmatrix} ، \quad س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، \quad ب = \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١} = -١٤ + ٨ = -٦$ ،

$أ_{١٢} = - (-٢١ - ٢٠) = ٤١$ ، $أ_{١٣} = -٦ - ١٠ = -١٦$ ،

$أ_{٢١} = - (-٢١ - ١٠) = ٣١$ ، $أ_{٢٢} = -٢٨ + ٢٥ = -٣$ ، $أ_{٢٣} = - (-٨ - ١٥) = ٢٣$ ،

$أ_{٣١} = ١٢ + ١٠ = ٢٢$ ، $أ_{٣٢} = - (١٦ + ١٥) = -٣١$ ، $أ_{٣٣} = ٨ - ٩ = -١$

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} -٦ & ٤١ & -١٦ \\ ٣١ & -٣ & ٢٣ \\ ٢٢ & -٣١ & -١ \end{pmatrix}$

، $أ^{مل} = \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$

∴ $أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مل} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix}$ ∴ $س = أ^{-١} ب$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} -٦ & ٣١ & ٢٢ \\ ٤١ & -٣ & -٣١ \\ -١٦ & ٢٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٦ \\ ١٢ \\ ١ \end{pmatrix} = \frac{١}{١٧٩} \begin{pmatrix} ٣٥٨ \\ ١٧٩ \\ ١٧٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

∴ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١ ، مجموعة الحل = { (٢ ، ١ ، ١) }

(٢) إذا كان : $ع_١ = \left(\frac{\sqrt{٣} + ت}{٢} \right)^٤$ ، $ع_٢ = حا \frac{١}{٣} \pi + ت حتا \frac{١}{٣} \pi$ ، $ت^٢ = -١$ ، و كان : $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$ أوجد الجذور التربيعية للعدد ع على الصورة المثلثية

الحل

∴ $ع_١ = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} + \frac{١}{٢} \right)^٤ = (حتا \frac{١}{٦} \pi + ت حا \frac{١}{٦} \pi)^٤$

$= حتا \frac{٢}{٣} \pi + ت حا \frac{٢}{٣} \pi$

، $ع_٢ = حا \frac{١}{٣} \pi + ت حتا \frac{١}{٣} \pi = حتا (-\frac{١}{٢} \pi + \frac{١}{٣} \pi) + ت حا (-\frac{١}{٢} \pi + \frac{١}{٣} \pi)$

$= حتا \frac{١}{٦} \pi + ت حا \frac{١}{٦} \pi$

∴ $ع = \frac{\text{حتا } \frac{٢}{٣}\pi + \text{ت حا } \frac{٢}{٣}\pi}{\text{حتا } \frac{١}{٦}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٦}\pi} = \text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٢}\pi$

، $ع^{\frac{١}{٢}} = \left(\text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٢}\pi\right)^{\frac{١}{٢}}$

∴ $ع^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا } \frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٢} + \text{ت حا } \frac{\frac{١}{٢}\pi + ٢ر\pi}{٢}$ ، ر = ٠ ، −١

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_{١}^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\left(\text{حتا } \frac{١}{٤}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٤}\pi\right)$ ،

عندما : ر = −١ فإن : $ع_{٢}^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{٢}\left(\text{حتا } (-\frac{٣}{٤}\pi) + \text{ت حا } (-\frac{٣}{٤}\pi)\right)$

السؤال الخامس :

(١) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} س & أ & ب \\ أ & س & ب \\ ب & أ & س \end{vmatrix} = (س + أ + ب)(س - أ)(س - ب)$$

الحل

بإجراء : $ع_{١} + ع_{٢} + ع_{٣}$ فى $ع_{١}$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} س+أ+ب & أ & ب \\ س+أ+ب & س & ب \\ س+أ+ب & أ & س \end{vmatrix}$ بإخراج (س + أ + ب) مشترك من $ع_{١}$

∴ الطرف الأيمن = (س + أ + ب) $\begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ١ & س & ب \\ ١ & أ & س \end{vmatrix}$

بإجراء : $ص_{٢} - ص_{١}$ فى $ص_{٢}$ ، $ص_{٣} - ص_{١}$ فى $ص_{٣}$

∴ الطرف الأيمن = (س + أ + ب) $\begin{vmatrix} ١ & أ & ب \\ ٠ & س - أ & ٠ \\ ٠ & ٠ & س - ب \end{vmatrix}$

= (س + أ + ب) (س − أ) (س − ب) = الطرف الأيسر

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ١ ، −٣) و يوازى المستقيم $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص + ٣}{٢} = \frac{ع - ١}{٣}$

الحل

معادلة المستقيم المعطى هى : $\frac{س - ١}{٥} = \frac{ص + ٣}{٢} = \frac{ع - ١}{-٣}$

∵ المستقيم المطلوب // المستقيم المعطى

∴ ميل المستقيم المطلوب = ميل المستقيم المعطى = (٥ ، ٢ ، −٣)

، ∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (٢ ، ١ ، −٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هى :

$\vec{ر} = (٢ ، ١ ، -٣) + ك\,(٥ ، ٢ ، -٣)$

و المعادلات البارامترية هى : س = ٢ + ٥ ك ، ص = ١ + ٢ ك

، ع = −٣ − ٣ ك

و المعادلة الإحداثية هى : $\frac{س - ٢}{٥} = \frac{ص - ١}{٢} = \frac{ع + ٣}{-٣}$

الاختبار السابع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $ق^{٣٠}_{ر} = ق^{٣٠}_{ر + ١٠}$ ، $ل^{ن}_{٧} = ٩٠\ ل^{ن - ٢}_{٥}$

فإن : $\underline{|ن - ر}$ = ...

(أ) صفر　　(ب) ١　　(حـ) ١٠　　(ء) $\underline{|٢٠}$

الحل

∵ $ق^{٣٠}_{ر} = ق^{٣٠}_{ر + ١٠}$ ∴ ر + ر + ١٠ = ٣٠ و منها : ر = ١٠

، ∵ $ل^{ن}_{٧} = ٩٠\ ل^{ن - ٢}_{٥}$ ∴ $\frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٧}} = \frac{٩٠\ \underline{|ن - ٢}}{\underline{|ن - ٧}}$ و منها :

ن (ن − ١) $\underline{|ن - ٢}$ = ٩٠ $\underline{|ن - ٢}$ ∴ ن (ن − ١) = ٩٠

∴ $ل^{ن}_{٢} = ل^{١٠}_{٢}$ ∴ ن = ١٠ ∴ $\underline{|ن - ر} = \underline{|٠} = ١$

(٢) إذا كان للمعادلات : ٣ س − ٢ ص + ع = ٠ ، ٦ س − ٥ ص + ٢ ع = ٠ ، ٩ س − ٦ ص + ك ع = ٠ حلول غير الحل الصفرى فإن : ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & −٢ & ١ \\ ٦ & −٥ & ٢ \\ ٩ & −٦ & ك \end{pmatrix} \quad ، \quad |أ| = \begin{vmatrix} ٣ & −٢ & ١ \\ ٦ & −٥ & ٢ \\ ٩ & −٦ & ك \end{vmatrix}$$

∵ المعادلات متجانسة و لها حلول غير الحل الصفرى ، عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) < ٣ ∴ |أ| = ٠

∴ ٣ (−٥ ك + ١٢) + ٢ (٦ ك − ١٨) + ١ (−٣٦ + ٤٥) = ٠

∴ −١٥ ك + ٣٦ + ١٢ ك − ٣٦ − ٣٦ + ٤٥ = ٠

∴ ٣ ك = ٩ ∴ ك = ٣

(٣) طول العمود المرسوم بين المستويين ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = ٩ ، ٣ س + ١٢ ص − ٤ ع = −١٧ يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

الحل

بفرض نقطة تنتمى للمستوى الأول بوضع : ص = ٠ ، ع = ٠

∴ س = ٣ ∴ النقطة أ (٣ ، ٠ ، ٠) تنتمى للمستوى الأول

و يكون طول العمود المرسوم بين المستويين = طول العمود من أ على المستوى الثانى

$$= \frac{|٣ \times ٣ + ١٢ \times ٠ − ٤ \times ٠ + ١٧|}{\sqrt{٩ + ١٤٤ + ١٦}} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$$ وحدة طول

(٤) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، −ك ، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٢ ، م) و كان : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ فإن : ك + م = ...

(أ) −٣ (ب) −٢ (جـ) −١ (د) صفر

الحل

∵ $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{٤}{٢} = \frac{−ك}{٢} = \frac{٦}{م}$ ومنها : ك = −٤ ، م = ٣

∴ ك + م = −٤ + ٣ = −١

(٥) إذا كان : المستقيم س = ٣ ص = أ ع يوازى المستوى س + ٣ ص + ٢ ع + ٤ = ٠ فإن : أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) −١

الحل

معادلة المستقيم هى : $\frac{س}{٣ أ} = \frac{ص}{أ} = \frac{ع}{٣}$

∴ متجه اتجاه المستقيم = (٣ أ ، أ ، ٣) ،

متجه اتجاه العمودى على المستوى = (١ ، ٣ ، ٢)

، ∵ المستقيم // المستوى

∴ متجه اتجاه المستقيم ⊥ متجه اتجاه العمودى على المستوى

∴ (٣ أ ، أ ، ٣) • (١ ، ٣ ، ٢) = ٠

∴ ٣ أ + ٣ أ + ٦ = ٠ ∴ ٦ أ = −٦ و منها : أ = −١

(٦) إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، −٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٢ ، ١ ، ٢) فإن : متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = ...

(أ) ($\frac{٤}{٩}$ ، $−\frac{٢}{٩}$ ، $−\frac{٤}{٩}$) (ب) ($\frac{٤}{٩}$ ، $\frac{٢}{٩}$ ، $\frac{٤}{٩}$)

(جـ) ($−\frac{٤}{٩}$ ، $−\frac{٢}{٩}$ ، $−\frac{٢}{٩}$) (د) ($\frac{٤}{٩}$ ، $−\frac{٢}{٩}$ ، $−\frac{٤}{٩}$)

الحل

متجه اتجاه $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ = مركبة $\overrightarrow{أ}$ فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$ (متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ب}$)

$$= \frac{\overrightarrow{أ} \bullet \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} \left(\frac{\overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{ب}\|} \right) = \frac{(١ ، −٢ ، ١) \bullet (−٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٩}} \left(\frac{(−٢ ، ١ ، ٢)}{\sqrt{٩}} \right)$$

$$= −\frac{٢}{٩} (−٢ ، ١ ، ٢) = (\frac{٤}{٩} ، −\frac{٢}{٩} ، −\frac{٤}{٩})$$

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $\left(\frac{3 + 5\omega}{5 + 3\omega^2} + \frac{5 + 3\omega^2}{3 + 5\omega} \right)^8 = \dots$

الحل

المقدار $= \left(\frac{\omega(3\omega^2 + 5)}{3\omega^2 + 5} + \frac{\omega^2(5\omega + 3)}{5\omega + 3} \right)^8 = (\omega + \omega^2)^8 = (-1)^8 = 1$

(٢) رتبة المصفوفة $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ تساوى ....

الحل

$\therefore |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4 - 3) - 1(4 + 1) + 3(-3 - 1) = -16 \neq 0$

$\therefore \text{ر}(\text{أ}) = 3$

(٣) إذا كان : المستوى س_1 : $\text{س} - \text{ع} + 1 = 0$ و المستوى س_2 : $2\text{س} - 2\text{ص} - \text{ع} = 0$ فإن : قياس الزاوية بين المستويين = ...°

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

$(1 ، 0 ، -1) ، (2 ، -2 ، -1)$

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

$\therefore \text{حتا}\,\theta = \frac{|(1 ، 0 ، -1) \bullet (2 ، -2 ، -1)|}{\sqrt{1 + 0 + 1}\,\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta = 45^\circ$

(٤) طول نصف قطر الكرة $(\text{س} - 2)^2 + (\text{ص} + 4)^2 + (\text{ع} - 5)^2 = 64$ يساوى ....

الحل

$\text{نق} = \sqrt{64} = 8$ وحدة طول

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = (4 ، -5 ، 1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (2 ، -\text{ك} ، -2)$ ، $\overrightarrow{\text{ح}} = (-4 ، 4 ، \text{م} - 2)$ و كان : $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ح}}$ فإن : $\text{ك} + \text{م} = \dots$

الحل

$\overrightarrow{\text{أب}} = (2 ، -\text{ك} ، -2) - (4 ، -5 ، 1) = (-2 ، -\text{ك} + 5 ، -3)$

، ∵ $\overrightarrow{\text{أب}} \parallel \overrightarrow{\text{ح}}$ $\therefore \frac{-2}{-4} = \frac{-\text{ك} + 5}{4} = \frac{-3}{\text{م} - 2}$

$\therefore -\text{ك} + 5 = 2$ و منها : $\text{ك} = 3$

، $\text{م} - 2 = -6$ و منها : $\text{م} = -4$ $\therefore \text{ك} + \text{م} = -1$

(٦) إذا كان : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = 2$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = 3$ ، $\|\overrightarrow{\text{ح}}\| = 12$ و كان : $\overrightarrow{\text{أ}} ، \overrightarrow{\text{ب}} ، \overrightarrow{\text{ح}}$ متعامدة مثنى مثنى فإن : $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\| = \dots$

الحل

$(\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\|)^2 = (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}) \bullet (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}})$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^2 + \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ح}} + \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^2 + \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{ح}} + \overrightarrow{\text{ح}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ح}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} + \|\overrightarrow{\text{ح}}\|^2$

، ∵ المتجهات متعامدة مثنى مثنى

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\| = 4$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = 9$ ، $\|\overrightarrow{\text{ح}}\| = 144$ ،

$\overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{أ}} \bullet \overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ح}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{ب}} \bullet \overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ح}} \bullet \overrightarrow{\text{ب}} = 0$.

$\therefore (\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\|)^2 = 4 + 9 + 144 = 157$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\| = \sqrt{157}$

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(٢) إذا كان : $ع_١ = (\text{حا } \frac{١}{٩}\pi + \text{ت حتا } \frac{١}{٩}\pi)^{٥}$ ،

$ع_٢ = (\text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٢}\pi)^{٤}$ ، و كان : $ع = \frac{ع_١}{ع_٢}$

أوجد الجذور التكعيبية للعدد ع على الصورة الأسية

الحل

$ع_١ = (\text{حا } \frac{١}{٩}\pi + \text{ت حتا } \frac{١}{٩}\pi)^{٥} = \text{حا } \frac{٥}{٩}\pi + \text{ت حتا } \frac{٥}{٩}\pi$

$= \text{حتا } (\frac{١}{٢}\pi - \frac{٥}{٩}\pi) + \text{ت حا } (\frac{١}{٢}\pi - \frac{٥}{٩}\pi)$

$ع_١ = \text{حتا } (-\frac{١}{١٨}\pi) + \text{ت حا } (-\frac{١}{١٨}\pi)$

، $ع_٢ = (\text{حتا } \frac{١}{٢}\pi + \text{ت حا } \frac{١}{٢}\pi)^{٤} = \text{حتا } ٢\pi + \text{ت حا } ٢\pi = \text{حتا } ٠ + \text{ت حا } ٠$

$\therefore ع = \frac{ع_١}{ع_٢} = \frac{\text{حتا } (-\frac{١}{١٨}\pi) + \text{ت حا } (-\frac{١}{١٨}\pi)}{\text{حتا } ٠ + \text{ت حا } ٠}$

$= \text{حتا } (-\frac{١}{١٨}\pi - ٠) + \text{ت حا } (-\frac{١}{١٨}\pi - ٠)$

$= \text{حتا } (-\frac{١}{١٨}\pi) + \text{ت حا } (-\frac{١}{١٨}\pi)$

، $ع^{\frac{١}{٢}} = (\text{حتا } (-\frac{١}{١٨}\pi) + \text{ت حا } (-\frac{١}{١٨}\pi))^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore ع^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا } \frac{-\frac{١}{١٨}\pi + ٢ر\pi}{٢} + \text{ت حا } \frac{-\frac{١}{١٨}\pi + ٢ر\pi}{٢}$ ، ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ فإن : $ع_١^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا } (-\frac{١}{٣٦}\pi) + \text{ت حا } (-\frac{١}{٣٦}\pi)$

$= هـ^{-\frac{١}{٣٦}\pi \text{ت}}$

عندما : ر = ١ فإن : $ع_٢^{\frac{١}{٢}} = \text{حتا } \frac{٣٥}{٣٦}\pi + \text{ت حا } \frac{٣٥}{٣٦}\pi = هـ^{\frac{٣٥}{٣٦}\pi \text{ت}}$

(٢) إذا كان : $\overline{أ} = (٢ \text{ حتا } \theta \text{ ، لو}_٣ \text{ س ، حا } \theta)$ ،

$\overline{ب} = (\text{حتا } \theta \text{ ، لو}_٥ ٢٧ \text{ ، } ٢ \text{ حا } \theta)$ و كان : $\overline{أ} \bullet \overline{ب} = ١١$

أوجد قيمة س

الحل

$(٢ \text{ حتا } \theta \text{ ، لو}_٣ \text{ س ، حا } \theta) \bullet (\text{حتا } \theta \text{ ، لو}_٥ ٢٧ \text{ ، } ٢ \text{ حا } \theta) = ١١$

$\therefore ٢ \text{ حتا}^٢ \theta + \text{لو}_٣ \text{ س} \times \text{لو}_٥ ٢٧ + ٢ \text{ حا}^٢ \theta = ١١$

$\therefore ٢ (\text{حتا}^٢ \theta + \text{حا}^٢ \theta) + \frac{\text{لوس}}{\text{لو٣}} \times \frac{\text{لو٢٧}}{\text{لو٥}} = ١١$

$\therefore ٢ \times ١ + \frac{\text{لوس}}{\text{لو٣}} \times \frac{٣\text{لو٣}}{\text{لو٥}} = ١١$

$\therefore ٢ + \frac{\text{لوس}}{١} \times \frac{٣}{\text{لو٥}} = ١١$ $\therefore \frac{٣\text{لوس}}{\text{لو٥}} = ٩$

$\therefore \frac{\text{لوس}}{\text{لو٥}} = ٣$ $\therefore \text{لو}_٥ \text{ س} = ٣$ $\therefore \text{س} = (٥)^٣ = ١٢٥$

السؤال الرابع :

(١) فى مفكوك $(١ + \text{س})^{ن}$ حسب قوى س التصاعدية إذا كان :

$ح_٣ = ١٧$ ، $٣ ح_٢ \times ح_٤ = ٥٤٤$ أوجد قيمة كل من : ن ، س

الحل

$\because ح_٣ = ١٧$ $\therefore {}^{ن}ق_٢ \text{ س}^٢ = ١٧$ (١)

، $\because ٣ ح_٢ \times ح_٤ = ٥٤٤$ بالقسمة ÷ $(ح_٣)^٢$

$\therefore ٣ \times \frac{ح_٢}{ح_٣} \times \frac{ح_٤}{ح_٣} = \frac{٤٤٥}{١٧ \times ١٧}$

$\therefore ٣ \times \frac{٢}{ن - ٢ + ١} \times \frac{١}{\text{س}} \times \frac{ن - ٣ + ١}{٣} \times \frac{\text{س}}{١} = \frac{٣٢}{١٧}$

$\therefore \frac{ن - ٢}{ن - ١} = \frac{١٦}{١٧}$ $\therefore ١٦ن - ١٦ = ١٧ن - ٣٤$

∴ ن = ١٨ بالتعويض (١) ينتج : $^{\text{١٨}}\text{ق}_{\text{٢}}\ \text{س}^{\text{٢}} = \text{١٧}$

∴ ١٥٣ $\text{س}^{\text{٢}}$ = ١٧ ∴ $\text{س}^{\text{٢}} = \frac{\text{١}}{\text{٩}}$ ∴ س = ± $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{أ+ب+٢} \\ \text{ب} & \text{٢أ+ب+١} & \text{١} \\ \text{أ+٢ب+١} & \text{أ} & \text{١} \end{vmatrix} = \text{٢}(\text{أ} + \text{ب} + \text{١})^{\text{٣}}$$

الحل

بإجراء : $\text{ع}_{\text{١}} + \text{ع}_{\text{٢}} + \text{ع}_{\text{٣}}$ فى $\text{ع}_{\text{١}}$

∴ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{٢(أ+ب+١)} \\ \text{ب} & \text{٢أ+ب+١} & \text{٢(أ+ب+١)} \\ \text{أ+٢ب+١} & \text{أ} & \text{٢(أ+ب+١)} \end{vmatrix}$

بإخراج : ٢ (أ+ب+١) مشترك من $\text{ع}_{\text{١}}$

∴ الطرف الأيمن = ٢ (أ+ب+١) $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{ب} & \text{٢أ+ب+١} & \text{١} \\ \text{أ+٢ب+١} & \text{أ} & \text{١} \end{vmatrix}$

بإجراء : $\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}$ فى $\text{ص}_{\text{٢}}$ ، $\text{ص}_{\text{٣}} - \text{ص}_{\text{١}}$ فى $\text{ص}_{\text{٣}}$

∴ الطرف الأيمن = ٢ (أ+ب+١) $\begin{vmatrix} \text{ب} & \text{أ} & \text{١} \\ \text{٠} & \text{أ+ب+١} & \text{٠} \\ \text{أ+ب+١} & \text{٠} & \text{٠} \end{vmatrix}$

المحدد على الصورة المثلثية

∴ الطرف الأيمن = ٢ (أ+ب+١) (أ+ب+١) (أ+ب+١)

= ٢ (أ + ب + ١)$^{\text{٣}}$ = الطرف الأيسر

السؤال الخامس :

(أ) إذا كان : أ = $\begin{pmatrix} \text{ع} & \text{٢ص} & \text{٠} \\ \text{−ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{−ص} & \text{س} \end{pmatrix}$ و كان : $\text{أ}^{\text{مد}} = \text{أ}^{\text{−١}}$

أوجد قيم كل من : س ، ص ، ع

الحل

∵ أ = $\begin{pmatrix} \text{ع} & \text{٢ص} & \text{٠} \\ \text{−ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{−ص} & \text{س} \end{pmatrix}$ ∴ $\text{أ}^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} \text{س} & \text{س} & \text{٠} \\ \text{−ص} & \text{ص} & \text{٢ص} \\ \text{ع} & \text{−ع} & \text{ع} \end{pmatrix}$

|أ| = $\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{٢ص} & \text{٠} \\ \text{−ع} & \text{ص} & \text{س} \\ \text{ع} & \text{−ص} & \text{س} \end{vmatrix}$ = ٠ − ٢ص (س ع + س ع) + ع (− س ص − س ص)

∴ |أ| = − ٤ س ص ع − ٢ س ص ع = − ٦ س ص ع

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\overline{\text{أ}}_{\text{١١}}$ = ص ع − ص ع = ٠ ،

$\overline{\text{أ}}_{\text{٢١}}$ = − (س ع + س ع) = − ٢ س ع ،

$\overline{\text{أ}}_{\text{٣١}}$ = − س ص − س ص = − ٢ س ص ،

$\overline{\text{أ}}_{\text{١٢}}$ = − (٢ ص ع − ص ع) = − ٣ ص ع ، $\overline{\text{أ}}_{\text{٢٢}}$ = ٠ − س ع = − س ع ،

$\overline{\text{أ}}_{\text{٣٢}}$ = − (٠ − ٢ ص ع) = ٢ ص ع ،

$\overline{\text{أ}}_{\text{١٣}}$ = − ٢ ص ع − ص ع = − ٣ ص ع ، $\overline{\text{أ}}_{\text{٢٣}}$ = − (٠ − س ع) = س ع ،

$\overline{\text{أ}}_{\text{٣١}}$ = ٠ − ٢ س ص = − ٢ س ص

∴ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} \text{−٢س ص} & \text{−٢س ع} & \text{٠} \\ \text{٢ص ع} & \text{−س ع} & \text{−٣ص ع} \\ \text{−٢س ص} & \text{س ع} & \text{−٣ص ع} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{ا}^{-1} = \frac{1}{|\text{ا}|} \times \text{ا}^{\text{مل}} = \frac{1}{-\text{٦ س ص ع}} \begin{pmatrix} -\text{٣ص ع} & -\text{٣ص ع} & ٠ \\ \text{س ع} & -\text{س ع} & -\text{٢س ع} \\ -\text{٢س ص} & \text{٢ص ع} & -\text{٢س ص} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{٢ س}} & \frac{1}{\text{٢ س}} & ٠ \\ \frac{-1}{\text{٦ ص}} & \frac{1}{\text{٦ ص}} & \frac{1}{\text{٣ ص}} \\ \frac{1}{\text{٣ ع}} & \frac{-1}{\text{٣ ع}} & \frac{1}{\text{٣ ع}} \end{pmatrix}$ ، $\because \text{ا}^{\text{مد}} = \text{ا}^{-1}$

$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} & \text{س} & ٠ \\ -\text{ص} & \text{ص} & \text{٢ص} \\ \text{ع} & -\text{ع} & \text{ع} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{٢ س}} & \frac{1}{\text{٢ س}} & ٠ \\ \frac{-1}{\text{٦ ص}} & \frac{1}{\text{٦ ص}} & \frac{1}{\text{٣ ص}} \\ \frac{1}{\text{٣ ع}} & \frac{-1}{\text{٣ ع}} & \frac{1}{\text{٣ ع}} \end{pmatrix}$

$\therefore \text{س} = \frac{1}{\text{٢ س}}$ $\therefore \text{س}^2 = \frac{1}{2}$ $\therefore \text{س} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \text{ص} = \frac{1}{\text{٦ ص}}$ $\therefore \text{ص}^2 = \frac{1}{6}$ $\therefore \text{ص} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\therefore \text{ع} = \frac{1}{\text{٣ ع}}$ $\therefore \text{ع}^2 = \frac{1}{3}$ $\therefore \text{س} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستقيم س = ص = ع مع المستوى
س + ٢ ص + ٣ ع = ١٢

الحل

∵ س = ص = ع بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ س + ٢ س + ٣ س = ١٢ ∴ ٦ س = ١٢ ∴ س = ٢

∴ ص = ٢ ، ص = ٢ ∴ نقطة التقاطع هى (٢ ، ٢ ، ٢)

الاختبار الثامن

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : $|\text{١ + لوس}| = 1$ فإن : س = ...

الحل

١ + لوس = ١ ∴ لوس = ٠ ∴ س = ١

أو : ١ + لوس = ٠ ∴ لوس = −١ ∴ $\text{س} = (10)^{-1} = \frac{1}{10}$

(٢) إذا كان : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \text{حـ} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix} = 5$ فإن قيمة $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \text{حـ}+5 & \text{ب}+5 & \text{ا}+5 \end{vmatrix} = ...$

الحل

كتابة المحدد كمجموع محددين (عناصر العمود الثالث)

∴ الطرف الأيمن $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \text{حـ} & \text{ب} & \text{ا} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

، ∵ قيمة المحدد الأول = ٥ ، قيمة المحدد = ٠ " عناصر الصف الأول أصفار "

∴ الطرف الأيمن = ٥ + ٠ = ٥

(٣) قياس الزاوية بين المستقيمين :

$\vec{\text{ر}} = (-٢ ، ٥ ، -٧) + \text{ك} (-٦ ، ٦ ، ٨)$ ،

$\vec{\text{ر}} = (١ ، -٢ ، ٣) + \text{ك} (٤ ، ١٢ ، -٦)$ يساوى ....

الحل

متجها اتجاه المستقيمين هما : (−٦ ، ٦ ، ٨) ، (٤ ، ١٢ ، −٦)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

$\therefore \text{حتا}\,\theta = \frac{|(-٦ ، ٦ ، ٨) \bullet (٤ ، ١٢ ، -٦)|}{\sqrt{36+36+64}\,\sqrt{16+144+36}} = \frac{\text{صفر}}{\sqrt{136}\,\sqrt{196}} = \text{صفر}$

∴ θ = ٩٠°

(٤) إذا كان : || أ || = ٤ ، || ب || = ٦ و كان : قياس الزاوية بين المتجهين أ ، ب يساوى ٦٠° فإن : (٢ أ + ب) • (أ − ب) = ...

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين المتجهين = θ ، ∵ θ = ٦٠°

∴ ١/٢ = (أ • ب) / (٤ × ٦)　　∴ أ • ب = ١٢

، المقدار = ٢ (|| أ ||)² − ٢ أ • ب + ب • أ − (|| ب ||)²

= ٢ × ١٦ − ٢ × ١٢ + ١٢ − ٣٦

= ٣٢ − ٢٤ + ١٢ − ٣٦ = − ١٦

(٥) معادلة الدائرة التى قطرها أب حيث أ (٧ ، ١ ، −٤) ، ب (٣ ، −١ ، ٢) هى ....

الحل

مركز الكرة = ((٧ + ٣)/٢ ، (١ − ١)/٢ ، (−٤ + ٢)/٢) = (٥ ، ٠ ، −١)

، ∵ أب = (٣ ، −١ ، ٢) − (٧ ، ١ ، −٤) = (−٤ ، −٢ ، ٦)

∴ || أب || = √(١٦ + ٤ + ٣٦) = √٥٦ = ٢ √١٤

∴ طول نصف قطر الكرة = √١٤

∴ معادلة الكرة هى : (س − ٥)² + ص² + (ع + ١)² = ١٤

(٦) إذا كان : أ = (١ ، ٢ ، −٤) ، ب = (١ ، ١ ، ك − ١) و كان || أ + ب || = ٧ وحدة طولية فإن : ك = ...

الحل

أ + ب = (١ ، ٢ ، −٤) + (١ ، ١ ، ك − ١) = (٢ ، ٣ ، ك − ٥)

، ∵ || أ + ب || = ٧　　∴ (|| أ + ب ||)² = ٤٩

∴ ٤ + ٩ + (ك − ٥)² = ٤٩　　∴ (ك − ٥)² = ٣٦

∴ ك − ٥ = ٦　　و منها : ك = ١١

أو : ك − ٥ = − ٦　　و منها : ك = − ١

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : (أ² + ب²) / (أ + ب ت) = ٢ + ٣ ت فإن : أ × ب = ...

حيث : أ × ب ∈ ح*

(أ) − ٦　　(ب) − ٥　　(حـ) ٥　　(ء) ٦

الحل

أ² + ب² = (أ + ب ت) (٢ + ٣ ت) = (٢ أ − ٣ ب) + (٣ أ + ٢ ب) ت

∴ أ² + ب² = ٢ أ − ٣ ب　(١)　، ٣ أ + ٢ ب = ٠　∴ ب = − ٢/٣ أ　(٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) ينتج : ٤/٩ ب² + ب² = − ٤/٣ ب − ٣ ب　بالضرب × ٩

∴ ٤ ب² + ٩ ب² = − ١٢ ب − ٢٧ ب　　∴ ١٣ ب² + ٣٩ ب = ٠

∴ ب (ب + ٣) = ٠　∴ ب = ٠　مرفوض　" ب ∈ ح* "

أو ب = − ٣　بالتعويض فى (٢) ينتج : أ = ٢　　∴ أ × ب = − ٦

(٢) رتبة المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$ تساوى ....

(أ) ٣　　(ب) ٢　　(حـ) ١　　(ء) صفر

الحل

∵ |أ| = $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}$ = ٠　　لأن : ص٣ = ص٢ × (− ١,٥)

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} -٢ & ٠ \\ -٢ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ \neq ٠$ ∴ ر (أ) = ٢

(٣) أ ب حـ ء متوازى أضلاع و كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (٢ ، ٢ ، −١) ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ = (−١ ، ٢ ، −٣) فإن مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = ... سم٣

(أ) ٦ (ب) $٧\sqrt{٢}$ (حـ) $٣\sqrt{١١}$ (ء) $\sqrt{١٠١}$

الحل

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أء}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & ٢ & -١ \\ -١ & ٢ & -٣ \end{vmatrix} = -٤\overrightarrow{\text{س}} + ٧\overrightarrow{\text{ص}} + ٦\overrightarrow{\text{ع}}$

مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء = $\| \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أء}} \|$

$= \sqrt{١٦ + ٤٩ + ٣٦} = \sqrt{١٠١}$

(٤) فى الشكل المقابل :

مخروط دائرى قائم محيط قاعدته = ١٢ π سم ، حـ منتصف $\overline{\text{م أ}}$ فإن :

$\overrightarrow{\text{ب حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}}$ = ...

(أ) −٤٣ (ب) −٤٠

(حـ) −٣٧ (ء) −٣٣

الحل

∵ محيط قاعدة المخروط = ١٢ π سم

∴ ٢ نق π = ١٢ π ∴ نق = ب و = ٦ سم

∴ حتا ∠ م ب و = $\frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

، ∵ م حـ = حـ أ ، ب و = و أ ∴ $\overline{\text{م ب}}$ // $\overline{\text{و حـ}}$

∴ ق (∠ حـ و ب) + ق (∠ م ب و) = ١٨٠°

∴ حتا ∠ حـ و ب = − حتا ∠ م ب و = $-\frac{٣}{٥}$

من △ م و أ : ∵ ق (∠ م و أ) = ٩٠° ، م حـ = حـ أ

∴ حـ و = $\frac{١}{٢}$ م أ = ٥ سم

من △ ب و حـ : (ب حـ)^{٢} = ٣٦ + ٢٥ − ٢ × ٦ × ٥ × ($-\frac{٣}{٥}$) = ٩٩

∴ ب حـ = $٣\sqrt{١١}$ سم " قانون جيب التمام "

، حتا ∠ ب حـ و = $\frac{٢٥ + ٩٩ - ٣٦}{٢ \times ٥ \times ٣\sqrt{١١}} = \frac{٤٣}{١٥\sqrt{١١}}$ " قانون جيب التمام "

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} = -(\overrightarrow{\text{حـ ب}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}}) = -\| \overrightarrow{\text{حـ ب}} \| \, \| \overrightarrow{\text{حـ و}} \|$ حتا ∠ ب حـ و

$= -(٣\sqrt{١١} \times ٥ \times \frac{٤٣}{١٥\sqrt{١١}}) = -٤٣$

حل آخر

من ب و حـ : $\overrightarrow{\text{ب و}} + \overrightarrow{\text{و حـ}} = \overrightarrow{\text{ب حـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{ب حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} = (\overrightarrow{\text{ب و}} + \overrightarrow{\text{و حـ}}) \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} = \overrightarrow{\text{ب و}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} + \overrightarrow{\text{و حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}}$

$= \overrightarrow{\text{ب و}} \bullet \overrightarrow{\text{حـ و}} - \overrightarrow{\text{و حـ}} \bullet \overrightarrow{\text{و حـ}}$

$= \| \overrightarrow{\text{ب و}} \| \, \| \overrightarrow{\text{حـ و}} \|$ حتا ∠ حـ و ب $- (\| \overrightarrow{\text{و حـ}} \|)^{٢}$

$= ٦ \times ٥ \times (-\frac{٣}{٥}) - ٢٥ = -٤٣$

(٥) إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = ٢\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}})$ = ...

(أ) $\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ع}}$ (ب) $-٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$

(حـ) $-٣\overrightarrow{\text{س}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}}$ (ء) $٣\overrightarrow{\text{س}} - ٣\overrightarrow{\text{ص}}$

الحل

$\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}} = -\overrightarrow{\text{س}} + ٢\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ١ \\ -١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = -٣\overrightarrow{\text{ص}} + ٣\overrightarrow{\text{ع}}$

(٦) إذا كان $ل_١$: س = ٠ ، ص = ع ، $ل_٢$: ص = ٠ ، س = ع مستقيمان فى الفراغ قياس الزاوية بينهما θ فإن : θ = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٥٠° (د) ١٦٥°

الحل

متجها اتجاه المستقمين هما : (٠ ، ١ ، ١) ، (١ ، ٠ ، ١)

، ∵ بفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

∴ حتا θ = $\frac{|(٠ ، ١ ، ١)\bullet(١ ، ٠ ، ١)|}{\sqrt{٢}\ \sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٦٠°

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

٢ س − ص + ع = −١ ، س − ع = ٢ ، س + ص = ٣

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

$$∴ |أ| = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{vmatrix} = ٢(٠+١)+١(٠+١)+١(١-٠) = ٤$$

∴ |أ| ≠ ٠ ∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

، المعادلات غير متجانسة ∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$أ = \begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ ١ & ٠ & -١ \\ ١ & ١ & ٠ \end{pmatrix} ، س = \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $أ_{١١}$ = ٠ + ١ = ١ ،

$أ_{١٢}$ = −(٠ + ١) = −١ ، $أ_{١٣}$ = ١ − ٠ = ١ ،

$أ_{٢١}$ = −(٠ − ١) = ١ ، $أ_{٢٢}$ = ٠ − ١ = −١ ، $أ_{٢٣}$ = −(٢ + ١) = −٣ ،

$أ_{٣١}$ = ١ − ٠ = ١ ، $أ_{٣٢}$ = −(−٢ − ١) = ٣ ، $أ_{٣٣}$ = ٠ + ١ = ١

$$∴ \text{مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة } أ = \begin{pmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ١ & -١ & -٣ \\ ١ & ٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$، أ^{مد} = \begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٣ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix}$$

$$∴ أ^{-١} = \frac{١}{|أ|} \times أ^{مد} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٣ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix} \qquad ∴ س = أ^{-١} ب$$

$$∴ \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -١ & -١ & ٣ \\ ١ & -٣ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix} = \frac{١}{٤}\begin{pmatrix} ٤ \\ ٨ \\ -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$$

∴ س = ١ ، ص = ٢ ، ع = −١ ، مجموعة الحل = {(١ ، ٢ ، −١)}

(٢) أوجد نقطة تقاطع المستويات : ٢ س − ص + ع = −٥ ، س + ص + ع = ٢ ، ٣ س − ص − ع = ٦

الحل

راجع الأختبار الأول .. السؤال الخامس (٢)

السؤال الرابع :

(أ) إذا كان : $ع_١$ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت ، $ع_٢$ = حتا θ + ت حا θ ، $ع_٣$ = (حتا $\frac{١}{٢}$θ − ت حا $\frac{١}{٢}$θ)^٢ و كان : ع = $\frac{ع_١ ع_٢}{ع_٣}$

أوجد المقياس و السعة للعدد ع ، ثم أوجد الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية عند : $\theta = \frac{١}{٦}\pi$

الحل

∵ ع$_١$ = ١ − $\sqrt{٣}$ ت ∴ س = ١ ، ص = − $\sqrt{٣}$

∴ ل^٢ = $(١)^٢ + (-\sqrt{٣})^٢$ = ١ + ٣ = ٤ ∴ ل = ٢

∴ طا θ = − $\sqrt{٣}$ ، ∵ س > ٠ ، ص < ٠

∴ ع يقع فى الربع الرابع ، ∴ θ = طا$^{-١}$ (− $\sqrt{٣}$) = − $\frac{١}{٣}\pi$

∴ ع$_١$ = ٢ (حتا (− $\frac{١}{٣}\pi$) + ت حا (− $\frac{١}{٣}\pi$))

، ع$_٢$ = حتا θ + ت حا θ

، ع$_٣$ = (حتا $\frac{١}{٢}\theta$ − ت حا $\frac{١}{٢}\theta$)^٢ = حتا θ − ت حا θ

= حتا (− θ) + ت حا (− θ)

∴ ع = ٢ (حتا (− $\frac{١}{٣}\pi$ + θ − (− θ)) + ت حا (− $\frac{١}{٣}\pi$ + θ − (− θ)))

∴ ع = ٢ (حتا (− $\frac{١}{٣}\pi$ + ٢θ) + ت حا (− $\frac{١}{٣}\pi$ + ٢θ))

∴ | ع | = ٢ ، سعة ع = (− $\frac{١}{٣}\pi$ + ٢θ)

، عندما : θ = $\frac{١}{٦}\pi$ ∴ ع = ٢ (حتا ٠ + ت حا ٠)

= حتا (− $\frac{١}{١٨}\pi$) + ت حا (− $\frac{١}{١٨}\pi$)

، ع$^{\frac{١}{٢}}$ = (٢ (حتا ٠ + ت حا ٠))$^{\frac{١}{٢}}$

∴ ع$^{\frac{١}{٢}}$ = $\sqrt{٢}$ (حتا $\frac{٠ + ٢ر\pi}{٢}$ + ت حا $\frac{٠ + ٢ر\pi}{٢}$) ، ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ فإن : الجذر الأول = $\sqrt{٢}$ (حتا ٠ + ت حا ٠)

عندما : ر = ١ فإن : الجذر الأول = $\sqrt{٢}$ (حتا π + ت حا π)

(٢) إبحث إمكانية وجود حل خلاف الحل الصفرى لمجموعة المعادلات الخطية الآتية : س + ٣ ص − ٢ ع = ٠ ،

س − ٨ ص + ٨ ع = ٠ ، ٣ س − ٢ ص + ٤ ع = ٠

الحل

$$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ١ & -٨ & ٨ \\ ٣ & -٢ & ٤ \end{pmatrix} \qquad |أ| = \begin{vmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ ١ & -٨ & ٨ \\ ٣ & -٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

∴ |أ| = ١ (−٣٢ + ١٦) − ٣ (٤ − ٢٤) − ٢ (−٢ + ٢٤) = ٠

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٨ \end{vmatrix}$ = −١١ ≠ ٠ ∴ ر (أ) = ٢ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) < عدد المجاهيل ، ∵ المعادلات متجانسة

∴ يوجد حل خلاف الحل الصفرى

السؤال الخامس :

(أ) فى مفكوك (س^٢ + $\frac{١}{٢ س}$)^{٣ن} حسب قوى س التنازلية

أولاً : أثبت أن الحد الخالى من س رتبته (٢ ن + ١)

ثانياً : أوجد النسبة بين الحد الخالى من س و الحد الأوسط عندما ن = ٤ ، س = ١

الحل

أولاً : نفرض أن : الحد الخالى من س هو الحد العام

∴ ح$_{ر+١}$ = ^{٣ن}ق$_ر$ ($\frac{١}{٢ س}$)^ر (س^٢)$^{٣ن - ر}$

= ^{٣ن}ق$_ر$ × (٢)$^{-ر}$ × س$^{-ر}$ × س$^{٦ن - ٢ر}$

= ^{٣ن}ق$_ر$ × (٢)$^{-ر}$ × س$^{٦ن - ٣ر}$

نضع : ٦ ن − ٣ ر = ٠ ∴ ٦ ن = ٣ ر ∴ ر = ٢ ن

∴ رتبة الحد الخالى من س = ٢ ن + ١

ثانياً : عندما : ن = ٤ ∴ عدد الحدود = ١٢

، رتبة الحد الأوسط = $\frac{١٢}{٢}$ + ١ = ٧

، رتبة الحد الخالى من س = ٢ × ٤ + ١ = ٩

∴ $\frac{ح_٩}{ح_٧} = \frac{ح_٩}{ح_٨} \times \frac{ح_٨}{ح_٧} = \frac{١٢-٨+١}{٨} \times \frac{\frac{١}{٢}}{١} \times \frac{١٢-٧+١}{٧} \times \frac{\frac{١}{٢}}{١} = \frac{١٥}{١١٢}$

(٢) إذا كانت الكرتان $(س - ٣)^٢ + ص^٢ + (ع - ٣)^٢ = ١٦$ ، $(س + ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ + (ع - ك)^٢ = ٢٥$ متماستان فأوجد قيمة ك

الحل

بالنسبة للكرة الأولى : $م_١$ = (٣ ، ٠ ، ٣) ، $نق_١$ = ٤ ،

بالنسبة للكرة الثانية : $م_٢$ = (−١ ، ٤ ، ك) ، $نق_٢$ = ٥

∵ الكرتان متماستان ∴ أولاً : إذا كانت متماستان من الخارج فإن :

$م_١ م_٢ = نق_١ + نق_٢ = ٩$ ∴ $(م_١ م_٢)^٢ = ٨١$

∴ $(٣ + ١)^٢ + (٠ - ٤)^٢ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$

∴ $١٦ + ١٦ + (٣ - ك)^٢ = ٨١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = ٤٩$

∴ ٣ − ك = ٧ و منها : ك = −٤ أو

٣ − ك = −٧ و منها : ك = ١٠

ثانياً : إذا كانت متماستان من الداخل فإن :

$م_١ م_٢ = نق_٢ - نق_١ = ٩$ ∴ $(م_١ م_٢)^٢ = ١$

∴ $١٦ + ١٦ + (٣ - ك)^٢ = ١$ ∴ $(٣ - ك)^٢ = -٣١$ مرفوض

الاختبار التاسع

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى

(١) إذا كان : $ل^{س+ص}_٤ = ٣٦٠$ ، $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٤٠$ فإن : $ق^{ص}_{٢س}$ = ...

الحل

∵ $ل^{س+ص}_٤ = ٣٦٠$ ∴ $ل^{س+ص}_٤ = ل^{٦}_٤$ ∴ س + ص = ٦ (١)

، ∵ $\underline{|٢س + ص} = ٥٠٥٠$ ∴ $\underline{|٢س + ص} = \underline{|٧}$ ∴ ٢ س + ص = ٧ (٢)

بطرح (١) من (٢) ينتج : س = ١ ، بالتعويض فى (١) ينتج : ص = ٥

∴ $ق^{ص}_{٢س} = ق^{٥}_{٢} = ١٠$

(٢) مجموعة حل المعادلة : $\begin{vmatrix} أ+١ & ٣ & ٢ \\ ٠ & أ-١ & ٥ \\ ٠ & ٠ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١$ هى ....

الحل

∵ المحدد على الصورة المثلثية ∴ قيمته = ٧ (أ + ١)(أ − ١)

و تكون المعادلة هى : ٧ (أ + ١)(أ − ١) = ٢١

∴ $أ^٢ - ١ = ٣$ ∴ $أ^٢ = ٤$ ∴ أ = ± ٢ ∴ مجموعة الحل = {٢ ، −٢}

(٣) جيب تمام الزاوية بين المتجهين $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، −٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٠ ، ١) يساوى ....

الحل

بفرض أن : قياس الزاوية بين المتجهين = θ

∴ حتا θ = $\frac{(١، -٣، ٠) \bullet (٢، ٠، ١)}{\sqrt{١ + ٩ + ١}\sqrt{٤ + ٠ + ١}} = \frac{٢}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}}{٥}$

أحمد الشنتورى

(٤) طول نصف قطر الكرة :

$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢س - ٢ص - ٤ع - ٣ = ٠$

يساوى = ...

الحل

مركز الكرة : م = (−١ ، ١ ، ٢) ، حـ = −٣

∴ طول نصف قطر الكرة : نق = $\sqrt{١ + ١ + ٤ + ٣} = \sqrt{٩}$ = ٣ وحدة طول

(٥) إذا كان : أ = $(-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٤} ، ك)$ متجه وحدة فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ أ متجه وحدة ∴ || أ || = ١

∴ $\frac{١}{٤} + \frac{٩}{١٦} + ك^{٢} = ١$ ∴ $ك^{٢} = \frac{٣}{١٦}$ ∴ $ك = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٤}$

(٦) إذا كان : أ = (ك ، −٣ ، ١) ، ب = (٢ ، ٣ ، −ك) متعامدان فإن : قيمة ك = ...

الحل

∵ المتجهان متعامدان ∴ (ك ، −٣ ، ١) • (٢ ، ٣ ، −ك) = ٠

∴ ٢ك − ٩ − ك = ٠ ∴ ك = ٩

السؤال الثانى : أكمل ما يلى :

(١) $(١ + \omega)^{٤} + (١ + \omega^{٢})^{٤} + (\omega + \omega^{٢})^{٤}$ = ...

الحل

المقدار = $(\omega^{٢})^{٤} + (\omega)^{٤} + (-١)^{٤} = \omega^{٨} + \omega^{٤} + ١$

$= \omega^{٦} \times \omega^{٢} + \omega^{٣} \times \omega + ١ = \omega^{٢} + \omega + ١$ = صفر

(٢) رتبة المصفوفة أ $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ = ...

الحل

∵ $|أ| = \begin{vmatrix} ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$ = ٢ (٤ − ١) − ١ (−٢ − ٣) + ٣ (−٢ − ٦) = −١٣

∴ |أ| ≠ ٠ ∴ ر (أ) = ٣

(٣) إذا كان : أ = (٣ ، −٢ ، ك) ، ب = (١ ، م ، ٢)

و كان : أ // ب فإن : ك = ... ، م = ...

الحل

∵ المتجهان متوازيان ∴ $\frac{٣}{١} = \frac{-٢}{م} = \frac{ك}{٢}$ ∴ ك = ٦ ، م = $-\frac{٢}{٣}$

(٤) إذا كان : قياس الزاوية التى يصنعها أ = (٢ ، ٤ ، ك) مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات يساوى ٤٥° فإن : ك = ...

الحل

متجه الاتجاه الموجب لمحور الصادات = (٠ ، ١ ، ٠)

، ∵ قياس الزاوية = ٤٥°

∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{(٢ ، ٤ ، ك) \bullet (٠ ، ١ ، ٠)}{\sqrt{٤ + ١٦ + ك^{٢}} \sqrt{٠ + ١ + ٠}}$ و منها و بالتربيع ينتج :

$٢٠ + ك^{٢} = ٣٢$ ∴ $ك^{٢} = ١٢$ ∴ $ك = \pm ٢\sqrt{٣}$

(٥) إذا كان المستويان : س + ٢ص + ك ع = ٢ ، ٣س − ص + ٢ع + ٤ = ٠ متعامدان فإن : ك = ...

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

(١ ، ٢ ، ك) ، (٣ ، −١ ، ٢) ∵ المستويان متعامدان

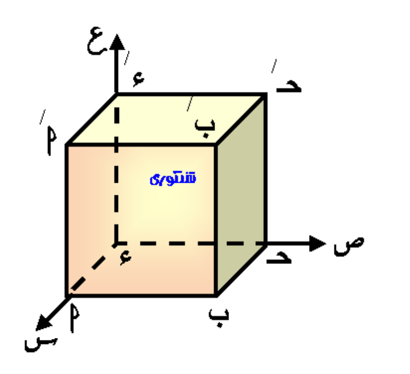
∴ (١ ، ٢ ، ك) • (٣ ، −١ ، ٢) = ٠

∴ ٣ − ٢ + ٢ك = ٠ ومنها : ك = $-\frac{١}{٢}$

(٦) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أ' ب' حـ' ء' مكعب طول ضلعه الوحدة فإن :

$\overrightarrow{\text{أب}'} \bullet \overrightarrow{\text{بء}} = ...$



الحل

نعتبر ء نقطة الأصل (٠ ، ٠ ، ٠)

∴ أ (١ ، ٠ ، ١) ، ب' (١ ، ١ ، ١) ،

ء (٠ ، ٠ ، ١) ، ب (١ ، ١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{\text{بء}}$ = (٠ ، ٠ ، ١) − (١ ، ١ ، ٠) = (−١ ، −١ ، ١)

، $\overrightarrow{\text{أب}'}$ = (١ ، ١ ، ١) − (١ ، ٠ ، ١) = (٠ ، ١ ، ٠)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}'} \bullet \overrightarrow{\text{بء}}$ = (٠ ، ١ ، ٠) • (−١ ، −١ ، ١) = −١

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(١) إذا كان : $ع_١ = ٢\,(\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi)$ ، $ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٤}\pi - ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٤}\pi)$ ، $ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\,ت$

أوجد العدد $ع = \frac{ع_١^٣ \times ع_٢^٤}{ع_٣^٥}$ على الصورة الأسية ثم الجذرين التربيعيين للعدد ع على الصورة المثلثية

الحل

$\because ع_١ = ٢\,(\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi)$

$\therefore ع_١ = ٢\,(\text{حتا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٣}\pi) + ت\,\text{حا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٣}\pi))$

$= ٢\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٦}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٦}\pi)$

$\therefore (ع_١)^٣ = (٢\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٦}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٦}\pi))^٣$

$= ٨\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٢}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٢}\pi)$

$، \because ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حا}\,\frac{١}{٤}\pi - ت\,\text{حتا}\,\frac{١}{٤}\pi)$

$\therefore ع_٢ = \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,(-\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٤}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٢}\pi - \frac{١}{٤}\pi))$

$= \sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi))$

$\therefore (ع_٢)^٤ = (\sqrt{٢}\,(\text{حتا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{٣}{٤}\pi)))^٤$

$= ٤\,(\text{حتا}\,(-\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\pi))$

$\because ع_٣ = ١ + \sqrt{٣}\,ت \qquad \therefore س = ١ \;،\; ص = \sqrt{٣}$

$\therefore ل^٢ = (١)^٢ + (\sqrt{٣})^٢ = ١ + ٣ = ٤ \qquad \therefore ل = ٢$

$\therefore \text{طا}\,\theta = \sqrt{٣} \;،\; \because س > ٠ \;،\; ص > ٠$

$\therefore ع_٣$ يقع فى الربع الأول ، $\therefore \theta = \text{طا}^{-١}(\sqrt{٣}) = \frac{١}{٣}\pi$

$\therefore ع_٣ = ٢\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi)$

$\therefore (ع_٣)^٥ = (٢\,(\text{حتا}\,\frac{١}{٣}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{١}{٣}\pi))^٥ = ٣٢\,(\text{حتا}\,\frac{٥}{٣}\pi + ت\,\text{حا}\,\frac{٥}{٣}\pi)$

$= ٣٢\,(\text{حتا}\,(\frac{٥}{٣}\pi - ٢\pi) + ت\,\text{حا}\,(\frac{٥}{٣}\pi - ٢\pi))$

$= ٣٢\,(\text{حتا}\,(-\frac{١}{٣}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٣}\pi))$

$\therefore ع = \frac{٨ \times ٤}{٣٢}\,(\text{حتا}\,\frac{\frac{١}{٢}\pi - \pi}{-\frac{١}{٣}\pi} + ت\,\text{حا}\,\frac{\frac{١}{٢}\pi - \pi}{-\frac{١}{٣}\pi})$

$\therefore ع = (\text{حتا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \pi + \frac{١}{٣}\pi) + ت\,\text{حا}\,(\frac{١}{٢}\pi - \pi + \frac{١}{٣}\pi))$

$= \text{حتا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) = هـ^{-\frac{١}{٦}\pi\,ت}$

$، ع^{\frac{١}{٢}} = (\text{حتا}\,(-\frac{١}{٦}\pi) + ت\,\text{حا}\,(-\frac{١}{٦}\pi))^{\frac{١}{٢}}$

$\therefore$ ع$^{\frac{1}{2}}$ = $\left(\text{حتا}\ \frac{-\frac{1}{2}\pi + ٢ ر\pi}{٢} + \text{ت حا}\ \frac{-\frac{1}{2}\pi + ٢ ر\pi}{٢}\right)$ ، ر = ٠ ، ١

عندما : ر = ٠ فإن : الجذر الأول = $\left(\text{حتا} - \frac{١}{١٢}\pi + \text{ت حا} - \frac{١}{١٢}\pi\right)$

عندما : ر = ١ فإن : الجذر الأول = $\left(\text{حتا}\ \frac{١١}{١٢}\pi + \text{ت حا}\ \frac{١١}{١٢}\pi\right)$

(٢) إذا مر المستوى : ٢ أ س − ٣ أ ص + ٤ أ ع + ٦ = ٠

بمنتصف القطعة المستقيمة المارة بين مركزى الكرتين :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٦ س − ٨ ص − ٢ ع = ١٣ ،

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − ١٠ س + ٤ ص − ٢ ع = ٨ فما قيمة أ

الحل

مركز الكرة الأولى : م$_{١}$ = (−٣ ، ٤ ، ١)

مركز الكرة الثانية : م$_{٢}$ = (٥ ، −٢ ، ١)

إحداثيات منتصف $\overline{م_{١}م_{٢}}$ = $\left(\frac{-٣+٥}{٢} ، \frac{٤-٢}{٢} ، \frac{١+١}{٢}\right)$ = (١ ، ١ ، ١)

و هى تنتمى للمستوى أى تحقق معادلته ، و بالتعويض فى معادلة المستوى ينتج :

٢ أ × ١ − ٣ أ × ١ + ٤ أ × ١ + ٦ = ٠

$\therefore$ ٢ أ − ٣ أ + ٤ أ + ٦ = ٠　　$\therefore$ ٣ أ + ٦ = ٠　　$\therefore$ أ = −٢

السؤال الرابع :

(أ) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل المعادلات الآتية :

س − ٢ ص + ٢ ع = ٢ ، ٣ س + ٤ ع = ١٠

، ٦ ع − ص = ٥

الحل

أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$　　|أ| = $\begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{vmatrix}$

$\therefore$ |أ| = ١ (٠ + ٤) + ٢ (١٨ − ٠) + ٢ (−٣ − ٠) = ٣٤ ≠ ٠

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب　　حيث :

أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٢ \\ ٣ & ٠ & ٤ \\ ٠ & -١ & ٦ \end{pmatrix}$ ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : أ$_{١١}$ = ٠ + ٤ = ٤ ،

أ$_{١٢}$ = − (١٨ − ٠) = −١٨ ، أ$_{١٣}$ = −٣ − ٠ = −٣ ،

أ$_{٢١}$ = − (−١٢ + ٢) = ١٠ ، أ$_{٢٢}$ = ٦ − ٠ = ٦ ، أ$_{٢٣}$ = − (−١ − ٠) = ١ ،

أ$_{٣١}$ = −٨ − ٠ = −٨ ، أ$_{٣٢}$ = − (٤ − ٦) = ٢ ، أ$_{٣٣}$ = ٠ + ٦ = ٦

$\therefore$ مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ٤ & -١٨ & -٣ \\ ١٠ & ٦ & ١ \\ -٨ & ٢ & ٦ \end{pmatrix}$

، أ^{مد} = $\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$

$\therefore$ أ$^{-١}$ = $\frac{١}{|أ|}$ × أ^{مد} = $\frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}$　　$\therefore$ س = أ$^{-١}$ ب

$\therefore$ $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix}$ = $\frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٤ & ١٠ & -٨ \\ -١٨ & ٦ & ٢ \\ -٣ & ١ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ \\ ١٠ \\ ٥ \end{pmatrix}$ = $\frac{١}{٣٤}\begin{pmatrix} ٦٨ \\ ٣٤ \\ ٣٤ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س = ٢ ، ص = ١ ، ع = ١ ، مجموعة الحل = { (٢ ، ١ ، ١) }

(٢) أثبت أن الحد الخالى من س فى مفكوك (س^{٢} + $\frac{١}{س^{٣}}$)^{٥ن}

حيث ن ∈ ص$_{+}$ يساوى $\frac{|\underline{٥ن}}{|\underline{٢ن}\ |\underline{٣ن}}$

الحل

نفرض أن : الحد الخالى من س هو الحد العام

∴ $ح_{ر+١} = {}^{٥ن}ق_{ر} \left(\frac{١}{س^{٣}}\right)^{ر} (س^{٢})^{٥ن-ر}$

$= {}^{٥ن}ق_{ر} \times س^{-٣ر} \times س^{١٠ن-٢ر}$

$= {}^{٥ن}ق_{ر} \times س^{١٠ن-٥ر}$

نضع : $١٠ن - ٥ر = ٠$ ∴ $١٠ن = ٥ر$ ∴ $ر = ٥ن$

∴ الحد الخالى من س $= {}^{٥ن}ق_{٢ر} = \frac{|٥ن}{|٢ن \; |٣ن}$

السؤال الخامس :

(أ) أوجد قيمة ك التى تجعل للمعادلات : ك س + ص + ع = ١ ، س + ك ص + ع = ١ ، س + ص + ك ع = ١ عدد غير منتهى من الحلول

الحل

$أ = \begin{pmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{pmatrix}$ ∴ $|أ| = \begin{vmatrix} ك & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ \\ ١ & ١ & ك \end{vmatrix}$ ، $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ك & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ك & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ك & ١ \end{array}\right)$

$|أ| = ك(ك^{٢} - ١) - ١(ك - ١) + ١(١ - ك)$

$= ك(ك - ١)(ك + ١) - (ك - ١) - (ك - ١)$

$= (ك - ١)\left(ك(ك + ١) - ١ - ١\right)$

$= (ك - ١)(ك^{٢} + ك - ٢) = (ك - ١)(ك - ١)(ك + ٢)$

∴ ك = ١ أو ك = −٢

عندما : ك = ١ فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ لأن : $ص_{١} = ص_{٢}$

∴ ر (أ) < ٣

، ∵ $\begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠$ ∴ ر (أ) < ٢ ∴ ر (أ) = ١

، $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ & ١ \end{array}\right)$ ، وهى على النظم ٣ × ٤

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٣ ، و قيمته = ٠ .

و أى رتبة محدد تالى يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٢ قيمته = ٠ .

∴ ر (أ) = ر ($أ^{*}$) = ١ ، ، ∵ عدد المجاهيل = ٣

∴ ر (أ) = ر ($أ^{*}$) < عدد المجاهيل ، ∵ و المعادلات متجانسة

∴ عندما : ك = ١ يوجد عدد غير منتهى من الحلول

، عندما : ك = −٢ فإن : $|أ| = \begin{vmatrix} -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix}$

، $|أ| = -٢(٤ - ١) - ١(-٢ - ١) + ١(١ + ٢) = ٠$ ∴ ر (أ) < ٣

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من أ هى ٢

، ∵ $\begin{vmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = -٢ - ١ = -٥$ ∴ ر (أ) = ٢

، ∵ $أ^{*} = \left(\begin{array}{ccc|c} -٢ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ & ١ \end{array}\right)$ ، وهى على النظم ٣ × ٤

∴ أعلى رتبة محدد يمكن تكوينه من $أ^{*}$ هى ٣ حيث :

$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ -٢ & ١ & ١ \\ ١ & -٢ & ١ \end{vmatrix} = ١(١ + ٢) - ١(-٢ - ١) + ١(٤ - ١) = ٩$

∴ ر ($أ^{*}$) = ٣ ∴ ر (أ) ≠ ر ($أ^{*}$)

، ∵ المعادلات متجانسة ∴ عندما : ك = ١ لا يوجد حل على الاطلاق

(٢) أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤ ، ١ ، ١) على المستقيم

$$\frac{س + ٣}{١} = \frac{ص - ١}{\sqrt{٥}} = \frac{ع + ٢}{٢}$$

(أ) (ب) (حـ) (د)

الحل

متجه اتجاه المستقيم ($\vec{هـ}$) = (١ ، $\sqrt{٥}$ ، ٢)

النقطة ب (−٣ ، ١ ، −٢) ∈ المستقيم

بفرض أن حـ مسقط أ على المستقيم

، θ قياس الزاوية بين $\vec{ب أ}$ و المستقيم ، أ (−٤ ، ١ ، ١)

∴ $\vec{ب أ}$ = (−٤ ، ١ ، ١) − (−٣ ، ١ ، −٢) = (−١ ، ٠ ، ٣)

، ∵ حتا θ = $\frac{|\vec{ب أ} \cdot \vec{هـ}|}{\|\vec{ب أ}\| \|\vec{هـ}\|} = \frac{(−١ ، ٠ ، ٣) \cdot (١ ، \sqrt{٥} ، ٢)}{\sqrt{١ + ٠ + ٩}\ \sqrt{١ + ٥ + ٤}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$

∴ حا θ = ٦٠°

، ∵ $\|\vec{ب أ}\| = \sqrt{١ + ٠ + ٩} = \sqrt{١٠}$

∴ أ حـ = $\|\vec{ب أ}\|$ حا θ = $\sqrt{١٠} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{\sqrt{٣٠}}{٢}$

الاختبار العاشر

أولاً : أجب عن سؤال واحد فقط من السؤالين الآتيين :

السؤال الأول : أكمل ما يلى :

(١) إذا كان : س = $\frac{−١ − \sqrt{٣}\ ت}{٢}$ حيث : ت^{٢} = −١ فإن :

القيمة العددية للمقدار : س^{٨} + س^{٤} + ٥ = ...

الحل

س = $−\frac{١}{٢} − \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ت = ω

∴ س^{٨} + س^{٤} + ٥ = ω^{٨} + ω^{٤} + ٥ = ω^{٢} + ω + ٥ = −١ + ٥ = ٤

أو : س = ω^{٢}

∴ س^{٨} + س^{٤} + ٥ = ω^{١٦} + ω^{٨} + ٥ = ω + ω^{٢} + ٥ = −١ + ٥ = ٤

(٢) إذا كان : ن! ، (ن − ٢)! ، (٢ − ن)! هى أطوال أضلاع مثلث

فإن : القيمة العددية لمحيط المثلث = ...

الحل

∵ طول الضلع الأول للمثلث = ن! ∴ ن ≥ صفر

∴ ن = { ٠ ، ١ ، ٢ ، .... } (١)

، ∵ طول الضلع الثانى للمثلث = (ن − ٢)! ∴ ن − ٢ ≥ ٠

∴ ن ≥ ٢ ∴ ن = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... } (٢)

، ∵ طول الضلع الثانى للمثلث = (٢ − ن)! ∴ ٢ − ن ≥ ٠

∴ ن ≤ ٢ ∴ ن = { ٠ ، ١ ، ٢ } (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ ن = ٢

∴ طول الضلع الأول = ٢! = ٢

، طول الضلع الثانى = ٠! = ١ ، طول الضلع الثانى = ٢ ٠! = ٢

∴ محيط المثلث = ٢ + ١ + ٢ = ٥ وحدة طول

(٣) إذا كان : $\vec{أ}$ = (−٢ ، ل ، −٣) يوازى المستقيم

$\frac{س + ٣}{٤} = \frac{ص}{٨} = \frac{ع - ١}{٦}$ فإن : ل = ...

الحل

∵ متجه اتجاه المستقيم = (٤ ، ٨ ، ٦) ، المتجه $\vec{أ}$ // المستقيم

∴ $\frac{−٢}{٤} = \frac{ل}{٨}$ ∴ ل = −٤

(٤) قياس الزاوية التى يصنعها المتجه $\vec{أ}$ = (٣ ، ٤ ، $\sqrt{١١}$)

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوى ....

الحل

متجه الاتجاه الموجب لمحور السينات = (١ ، ٠ ، ٠)

، بفرض أن : قياس الزاوية المطلوبة = θ

∴ حتا $\theta = \frac{(٣ ، ٤ ، \sqrt{١١}) \bullet (١ ، ٠ ، ٠)}{\sqrt{٩ + ١٦ + ١١}\ \sqrt{١ + ٠ + ٠}} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$ ∴ $\theta = ٦٠^\circ$

(٥) إذا كان : المستوى س − ٣ ص + م ع = ٥ ، المستوى ٣ س + ل ص + ٦ ع = ١٠ متوازيان فإن : ل × م = ...

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما (١ ، −٣ ، م) ، (٣ ، ل ، ٦) ∵ المستويان متوازيان

∴ $\frac{١}{٣} = \frac{-٣}{ل} = \frac{م}{٦}$ ∴ ل = −٩ ، م = ٢ ∴ ل × م = −١٨

(٦) طول العمود المحصور بين المستويين المتوازيين
٤ س + ٦ ص + ١٢ ع + ١٨ = ٠ ،
٤ س + ٦ ص + ١٢ ع − ١٠ = ٠ يساوى ....

الحل

نفرض نقطة تقع على المستوى الأول بوضع : س = ٠ ، ع = ٠

∴ ص = −٣ ، أ (٠ ، −٣ ، ٠) تقع على المستوى الأول

∴ طول العمود المحصور بين المستويين = طول العمود المرسوم من أ على المستوى الثانى $= \frac{| ٤ \times ٠ - ٦ \times ٣ + ١٢ \times ٠ - ١٠ |}{\sqrt{١٦ + ٣٦ + ١٤٤}} = \frac{٢٨}{١٤} = ٢$ وحدة طول

السؤال الثانى : أختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) $١ - ٦ س + \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} س^{٢} + \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} س^{٣} + ... + س^{٦} = ٦٤$
فإن : س = ...

(أ) −١ (ب) ٣ (حـ) { −١ ، ٣ } (ء) ٢

الحل

الطرف الأيمن = $(س - ١)^{٦}$ ∴ $(س - ١)^{٦} = ٦٤ = (٢)^{٦}$

∴ ١ − س = ٢ و منها : س = −١

أو : ١ − س = −٢ و منها : س = ٣

(٢) $\left(\frac{٥ - ٣ \omega^{٢}}{٥ \omega - ٣} + \frac{٢ - ٧ \omega}{٢ \omega^{٢} - ٧} \right)^{٢} = ...$

(أ) ٣ (ب) −٣ (حـ) ٣ ت (ء) −٣ ت

الحل

المقدار $= \left(\frac{\omega^{٢} (٥ \omega - ٣)}{٥ \omega - ٣} + \frac{\omega (٢ \omega^{٢} - ٧)}{٢ \omega^{٢} - ٥} \right)^{٢} = (\omega^{٢} - \omega)^{٢}$

$= (- \sqrt{٣}\ ت)^{٢} = -٣$

(٣) إذا كان المستقيمان : $\frac{س + ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٤}$ ، $\frac{س}{٣} = \frac{ص + ١}{٤} = \frac{ع - ١}{ل}$ متعامدان فإن : ل = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (حـ) $\frac{٩}{٢}$ (ء) $-\frac{٩}{٢}$

الحل

∵ متجها اتجاه المستقيمان هما : (٢ ، ٣ ، ٤) ، (٣ ، ٤ ، ل)

، ∵ المستقيمان متعامدان ∴ (٢ ، ٣ ، ٤) • (٣ ، ٤ ، ل) = ٠

∴ ٦ + ١٢ + ٤ م = ٠ ∴ ل = $-\frac{٩}{٢}$

(٤) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، −٢ ، ١) و طول نصف قطرها = ٥ سم هى ....

(أ) $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٥$

(ب) $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} + (ع + ١)^{٢} = ٢٥$

(حـ) $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع - ١)^{٢} = ٢٥$

(ء) $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = \sqrt{٥}$

الحل

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٢٥$

(٥) قياس الزاوية بين المستويين : $س + \sqrt{٢}\,ص - ع = ٥$ ، $س - \sqrt{٢}\,ص + ع = ١$ يساوى ....

(م) ٠° (ب) ٤٥° (حـ) ٩٠° (ء) ١٣٥°

الحل

متجها الاتجاه العمودى على كل من المستويين هما

$(١ ، \sqrt{٢} ، -١) ، (١ ، -\sqrt{٢} ، ١)$

نفرض أن : قياس الزاوية بين المستويين = θ

$\therefore$ حتا $\theta = \frac{|(١ ، \sqrt{٢} ، -١) \bullet (١ ، -\sqrt{٢} ، ١)|}{\sqrt{١+٢+١}\,\sqrt{١+٢+١}} = \frac{٠}{٤} =$ صفر $\therefore \theta = ٩٠°$

(٦) فى الشكل المقابل :

م ب حـ ء م' ب' حـ' ء' متوازى مستطيلات

و كان : م (٤ ، ٠ ، ٠) ،

حـ (٠ ، ٩ ، ٠) ، ء' (٠ ، ٠ ، ٧)

فإن : $\|\overrightarrow{م حـ'}\| =$ ....

الحل

(م) $\sqrt{١٤٦}$ (ب) $\sqrt{١١٤}$ (حـ) ٥ (ء) $\sqrt{٢٠}$

الحل

من الشكل : حـ' (٠ ، ٩ ، ٧)

$\overrightarrow{م حـ'} = (٠ ، ٩ ، ٧) - (٤ ، ٠ ، ٠) = (-٤ ، ٩ ، ٧)$

$\therefore \|\overrightarrow{م حـ'}\| = \sqrt{١٦ + ٨١ + ٤٩} = \sqrt{١٤٦}$ وحدة طول

ثانياً : أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الثالث :

(ا) فى مفكوك $(٢س - ٣)^{١٥}$ حسب قوى س التنازلية أوجد قيم س التى تجعل : $١٣ح_٣ + ١٠ح_٤ + ح_٥ =$ صفر

الحل

$\because ١٣ح_٣ + ١٠ح_٤ + ح_٥ =$ صفر بالقسمة ÷ $ح_٤$ ينتج :

$١٣ \times \frac{ح_٣}{ح_٤} + ١٠ + \frac{ح_٥}{ح_٤} = ٠$

$\therefore ١٣ \times \frac{٣}{١٥-٣+١} \times \frac{-٣}{٢س} + ١٠ + \frac{١٥-٤+١}{٤} \times \frac{٢س}{-٣} = ٠$

$\therefore ١٣ \times \frac{٣}{١٣} \times \frac{-٣}{٢س} + ١٠ + \frac{١٢}{٤} \times \frac{٢س}{-٣} = ٠$

$\therefore \frac{-٩}{٢س} + ١٠ - ٢س = ٠$ بالضرب × $-٢س$ ينتج :

$٤س^٢ - ٢٠س + ٩ = ٠$ $\therefore (٢س - ٩)(٢س - ١) = ٠$

$\therefore س = \frac{٩}{٢}$ أو $س = \frac{١}{٢}$

(٢) بدون فك المحدد أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} ص + ع & س & س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٠ & ع & ص \\ ع & ٠ & س \\ ص & س & ٠ \end{vmatrix}$$

الحل

بإجراء : $ص_١ + ص_٣ - ص_٢$ (فى $ص_١$)

$\therefore$ الطرف الأيمن = $\begin{vmatrix} ٢ع & ٠ & ٢س \\ ص & ع + س & ص \\ ع & ع & س + ص \end{vmatrix}$ بإخراج (٢) مشترك من $ص_١$

∴ الطرف الأيمن = ٢ | ع . س ؛ ص ع + س ص ؛ ع ع س + ص |

بإجراء : ص٣ − ص١ (فى ص٣)

∴ الطرف الأيمن = ٢ | ع . س ؛ ص ع + س ص ؛ . ع ص | بإجراء : ص٣ − ص٢ (فى ص٢)

∴ الطرف الأيمن = ٢ | ع . س ؛ ص س . ؛ . ع ص | بتبديل : ص١ ، ص٣ ثم تبديل : ص٢ ، ص٣

∴ الطرف الأيمن = ٢ | . ع ص ؛ ع . س ؛ ص س . | = الطرف الأيسر

السؤال الرابع :

(١) أثبت أن : ((١ + حا ى + ت حتا ى) / (١ + حا ى − ت حتا ى))^ن = حتا ن (½ π − ى) + ت حا ن (½ π − ى)

الحل

∵ ١ = حا² ى + حتا² ى = حا² ى − ت² حتا² ى

= (حا ى + ت حتا ى) (حا ى − ت حتا ى)

∴ (١ + حا ى + ت حتا ى) / (١ + حا ى − ت حتا ى) = [(حا ى + ت حتا ى) (حا ى − ت حتا ى) + (حا ى + ت حتا ى)] / (١ + حا ى − ت حتا ى)

= [(حا ى + ت حتا ى) ((حا ى − ت حتا ى) + ١)] / (١ + حا ى − ت حتا ى)

= حا ى + ت حتا ى = حتا (½ π − ى) + ت حا (½ π − ى)

∴ الطرف الأيمن = (حتا ن (½ π − ى) + ت حا ن (½ π − ى))

= الطرف الأيسر

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، −١ ، ٠) و يقطع المستقيم ر→ = (٢ ، ١ ، ١) + ك (١ ، ٢ ، −١) على التعامد

الحل

نفرض أن : المستقيمين يتقاطعين فى نقطة حـ

∴ من معادلة المستقيم المعطى تكون إحداثيات نقطة حـ هى :
(٢ + ك ، ١ + ٢ ك ، ١ − ك)

، ∵ المستقيم المطلوب يمر بالنقطة أ (٣ ، −١ ، ٠)

∴ أحـ→ = (٣ ، −١ ، ٠) − (٢ + ك ، ١ + ٢ ك ، ١ − ك)

= (١ − ك ، −٢ − ٢ ك ، −١ + ك)

، ∵ متجه اتجاه المستقيم المعطى = (١ ، ٢ ، −١) ، المستقيمان متعامدان

∴ (١ − ك ، −٢ − ٢ ك ، −١ + ك) • (١ ، ٢ ، −١) = ٠

∴ ١ − ك − ٤ − ٤ ك + ١ − ك = ٠   ∴ ٦ ك = −٢   ∴ ك = −⅓

∴ أحـ→ = (٤/٣ ، −٤/٣ ، −٤/٣) = (١ ، −١ ، −١)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى : ر→ = (٣ ، −١ ، ٠) + ك (١ ، −١ ، −١)

السؤال الخامس :

(١) باستخدام المعكوس الضربى للمصفوفة حل مجموعة المعادلات الآتية :

١/س + ١/ص + ١/ع = ١ ، ١/س − ١/ص + ٢/ع = ½

٢/س + ٣/ص − ٤/ع = ٤/٣ ، حيث : س ، ص ، ع لا تساوى صفر

الحل

نفرض أن : ١/س = ل ، ١/ص = م ، ١/ع = ن (١)

∴ المعادلات هى : ل + م + ن = ١ ،

ل − م + ٢ ن = ½ بالضرب × ٢ يكون : ٢ ل − ٢ م + ٤ ن = ٢ ،

٢ ل + ٣ م − ٤ ن = ٤/٣ بالضرب × ٣ يكون : ٦ ل + ٩ م − ١٢ ن = ٤

$$\therefore \text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -12 \end{pmatrix} \quad ، \quad |\text{أ}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -12 \end{vmatrix} ،$$

$$|\text{أ}| = 1(24 - 36) - 1(-24 - 24) + 1(18 + 12) = 66 \neq 0$$

∴ ر (أ) = ٣ ، ∵ عدد المجاهيل = ٣ ، المعادلات غير متجانسة

∴ للمعادلات حل وحيد

و تكون المعادلة المصفوفية هى : أ س = ب حيث :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 6 & 9 & -12 \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{س} = \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} \quad ، \quad \text{ب} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

، العوامل المرافقة لعناصر أ هى : $\text{أ}_{11} = 24 - 36 = -12$ ،

$\text{أ}_{12} = -(-24 - 24) = 48$ ، $\text{أ}_{13} = 18 + 12 = 30$ ،

$\text{أ}_{21} = -(-12 - 9) = 21$ ، $\text{أ}_{22} = -12 - 6 = -18$ ، $\text{أ}_{23} = -(9 - 6) = -3$ ،

$\text{أ}_{31} = 4 + 2 = 6$ ، $\text{أ}_{32} = -(4 - 2) = -2$ ، $\text{أ}_{33} = -2 - 2 = -4$

$$\therefore \text{مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة أ} = \begin{pmatrix} -12 & 48 & 30 \\ 21 & -18 & -3 \\ 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$، \quad \text{أ}^{\text{مل}} = \begin{pmatrix} -12 & 21 & 6 \\ 48 & -18 & -2 \\ 30 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{أ}^{-1} = \frac{1}{|\text{أ}|} \times \text{أ}^{\text{مل}} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} -12 & 21 & 6 \\ 48 & -18 & -2 \\ 30 & -3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{س} = \text{أ}^{-1}\text{ب}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} -12 & 21 & 6 \\ 48 & -18 & -2 \\ 30 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{66} \begin{pmatrix} 33 \\ 22 \\ 11 \end{pmatrix}$$

∴ $\text{ل} = \frac{1}{2}$ ، $\text{م} = \frac{1}{3}$ ، $\text{ن} = \frac{1}{6}$ بالتعويض فى (١) ينتج :

∴ س = ٢ ، ص = ٣ ، ع = ٦ ، مجموعة الحل = { (٢ ، ٣ ، ٦) }

(٢) أوجد المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أب}}$ حيث : أ (٢ ، ١ ، ٠) ، ب (٣ ، ١ ، $\sqrt{3}$) فى اتجاه المتجه $\overrightarrow{\text{م}}$ حيث $\overrightarrow{\text{م}} = (3 ، 2 ، 2\sqrt{3})$

الحل

$$\overrightarrow{\text{أب}} = (3 ، 1 ، \sqrt{3}) - (2 ، 1 ، 0) = (1 ، 0 ، \sqrt{3})$$

متجه الاتجاهية $\overrightarrow{\text{أب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$ =

مركبة $\overrightarrow{\text{أب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$ (متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$) =

$$\frac{\overrightarrow{\text{أب}} \bullet \overrightarrow{\text{م}}}{\|\overrightarrow{\text{م}}\|} \left(\frac{\overrightarrow{\text{م}}}{\|\overrightarrow{\text{م}}\|} \right) = \frac{(1 ، 0 ، \sqrt{3}) \bullet (3 ، 2 ، 2\sqrt{3})}{5} \left(\frac{(3 ، 2 ، 2\sqrt{3})}{5} \right)$$

$$= \frac{9}{5} \left(\frac{(3 ، 2 ، 2\sqrt{3})}{5} \right) = \left(\frac{27}{25} ، \frac{18}{25} ، \frac{18}{25}\sqrt{3} \right)$$

تم بحمد الله و عونه